

# Analiza matematyczna ISIM II

Ryszard Szwarc\*

## Spis treści

<b>1</b>	<b>Całki niewłaściwe</b>	<b>3</b>
1.1	Całki niewłaściwe z funkcji nieujemnych . . . . .	10
1.2	Całki i szeregi . . . . .	13
1.3	Całki niewłaściwe z osobliwością w kilku punktach . . . . .	18
1.4	Całki z parametrem . . . . .	20
1.5	Dwie ważne całki niewłaściwe . . . . .	30
1.5.1	Całka Eulera . . . . .	30
1.5.2	Całka Dirichleta . . . . .	33
<b>2</b>	<b>Charakteryzacja funkcji całkowlanych w sensie Riemanna</b>	<b>35</b>
<b>3</b>	<b>Całka Riemanna-Stieltjesa</b>	<b>40</b>
<b>4</b>	<b>Funkcje wielu zmiennych</b>	<b>50</b>
4.1	Granica funkcji wielu zmiennych . . . . .	53
<b>5</b>	<b>Pochodne cząstkowe</b>	<b>56</b>
5.1	Wyższe pochodne cząstkowe . . . . .	58
5.2	Reguła łańcucha . . . . .	59
5.3	Różniczkowalność funkcji wielu zmiennych . . . . .	61
5.3.1	Interpretacja geometryczna różniczkowalności . . . . .	63
5.4	Geometria odwzorowań z $\mathbb{R}^n$ w $\mathbb{R}^m$ . . . . .	73
5.5	Gradient i poziomice funkcji . . . . .	74
5.6	Ekstrema funkcji wielu zmiennych . . . . .	78

---

\*Wykład prowadzony w semestrze letnim 2014 na podstawie notatek Magdaleny Świczewskiej z 2005-2006, opracowany na podstawie notatek Mateusza Wasylkiewicza

5.7	Ekstrema warunkowe-metoda mnożników Lagrange'a . . . . .	82
5.7.1	Stosowanie metody Lagrange'a . . . . .	83
5.7.2	Procedura znajdowania wartości największej i najmniejszej funkcji na zbiorze zwartym . . . . .	85
5.7.3	Metoda mnożników Lagrange'a przy kilku warunkach . . . . .	86
5.8	Twierdzenie o funkcji uwikłanej . . . . .	87
5.9	Różniczka . . . . .	99
<b>6</b>	<b>Całki podwójne</b>	<b>100</b>
6.1	Zasada Cavalieriego . . . . .	100
6.2	Ścisłe określenie całki podwójnej Riemanna . . . . .	101
6.2.1	Obliczanie pól . . . . .	109
6.2.2	Zmiana kolejności całkowania . . . . .	111
6.2.3	Geometria odwzorowań z $\mathbb{R}^2$ w $\mathbb{R}^2$ . . . . .	112
6.3	Twierdzenie o zamianie zmiennych . . . . .	113
<b>7</b>	<b>Całki potrójne i wielokrotne</b>	<b>116</b>
7.0.1	Środek masy . . . . .	122
7.0.2	Moment bezwładności . . . . .	123
7.0.3	Potencjał grawitacyjny . . . . .	123
<b>8</b>	<b>Całki krzywoliniowe i powierzchniowe</b>	<b>125</b>
8.1	Całka krzywoliniowa niezorientowana . . . . .	125
8.1.1	Interpretacja całki . . . . .	125
8.2	Całka krzywoliniowa zorientowana . . . . .	127
<b>9</b>	<b>Całki powierzchniowe</b>	<b>132</b>
9.1	Powierzchnie w $\mathbb{R}^3$ . . . . .	132
9.2	Płaszczyzna styczna do powierzchni . . . . .	132
9.3	Pole powierzchni w $\mathbb{R}^3$ . . . . .	136
9.4	Całki powierzchniowe funkcji skalarnych (niezorientowane) . . . . .	138
9.4.1	Interpretacja całki powierzchniowej . . . . .	139
9.5	Całki powierzchniowe pól wektorowych (zorientowane) . . . . .	142
9.5.1	Interpretacja fizyczna całki powierzchniowej zorientowanej . . . . .	145
9.5.2	Całka powierzchniowa dla wykresów funkcji . . . . .	147

<b>10 Wzór Greena</b>	<b>147</b>
10.1 Rotacja . . . . .	151
<b>11 Twierdzenie Stokesa</b>	<b>151</b>
11.1 Interpretacja rotacji $\text{curl } F$ . . . . .	155
11.2 Interpretacja całki $\int_C (F \circ T) ds$ dla krzywej zamkniętej $C$ . . .	155
<b>12 Wzór Gaussa-Ostrogradskiego</b>	<b>156</b>
12.1 Interpretacja fizyczna dywergencji . . . . .	159
12.2 Potencjały i funkcje harmoniczne . . . . .	160
12.3 Inny zapis całki $\iint_S F \circ dS$ . . . . .	163

## 1 Całki niewłaściwe

Przykłady.

(a)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $0 < x \leq 1$ . Dla  $0 < a < 1$  mamy

$$\int_a^1 \frac{1}{x} dx = \log x \Big|_a^1 = -\log a \xrightarrow{a \rightarrow 0^+} \infty.$$

To oznacza, że pole obszaru pod wykresem funkcji  $y = 1/x$ ,  $0 < x \leq 1$ , jest nieskończone.

(b)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ,  $0 < x \leq 1$ . Wtedy dla  $0 < a < 1$  mamy

$$\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \Big|_a^1 = 2 - 2\sqrt{a} \xrightarrow{a \rightarrow 0^+} 2.$$

Pole pod wykresem  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ,  $0 < x \leq 1$ , jest skończone i równe 2 pomimo tego, że obszar pod wykresem jest nieograniczony.

(c)  $f(x) = \frac{2}{x^3}$ ,  $x \geq 1$ . Dla  $b > 1$  mamy

$$\int_1^b \frac{2}{x^3} dx = -\frac{1}{x^2} \Big|_1^b = 1 - \frac{1}{b^2} \xrightarrow{b \rightarrow \infty} 1.$$

**Definicja 1.1.** Mówimy, że całka  $\int_a^b f(x) dx$  jest niewłaściwa z osobliwością w punkcie  $b$  jeśli

1. Funkcja  $f(x)$  jest określona w przedziale  $[a, b)$ .
2.  $f(x)$  jest całkowna na każdym przedziale  $[a, b']$  dla  $a < b' < b$  (np.  $f(x)$  jest ciągła na  $[a, b)$ ).
3.  $b = \infty$  albo  $b < \infty$  i  $f(x)$  jest nieograniczona w pobliżu  $b$ .

Podobnie określa się całkę niewłaściwą  $\int_a^b f(x) dx$  z osobliwością w dolnej granicy całkowania  $a$ .

**Przykłady.**

Całka	Punkt osobliwy
$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$	$\infty$
$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$	1
$\int_0^1 \frac{1}{\log x} dx$	1
$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$	nie ma osobliwości
$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^2} dx$	0
$\int_{\pi}^{\infty} \frac{\operatorname{sgn}(\sin x)}{x} dx$	$\infty$

**Definicja 1.2.** Załóżmy, że dla całki  $\int_a^b f(x) dx$  z osobliwością w punkcie  $b$  istnieje granica  $\lim_{b' \rightarrow b^-} \int_a^{b'} f(x) dx$ . Mówimy wtedy, że całka  $\int_a^b f(x) dx$  jest zbież-

na i piszemy

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{b' \rightarrow b^-} \int_a^{b'} f(x) dx.$$

Podobnie określamy zbieżność całki z osobliwością w punkcie  $a$ . W przeciwnym wypadku, gdy granica nie istnieje, mówimy, że całka jest rozbieżna.

**Przykład.**

$$\begin{aligned} \int_0^1 \log x dx &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \log x dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} (x \log x - x) \Big|_a^1 \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^+} (-1 - a \log a + a) = -1, \end{aligned}$$

bo  $\lim_{a \rightarrow 0^+} a \log a = 0$ .

**Twierdzenie 1.3** (warunek Cauchy'ego zbieżności całki). *Załóżmy, że całka  $\int_a^b f(x) dx$  ma osobliwość w punkcie  $b$ . Całka ta jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej dodatniej liczby  $\varepsilon$  istnieje liczba  $a < b_0 < b$  taka, że dla dowolnych  $b'$  i  $b''$  z warunku  $b_0 < b' < b'' < b$  wynika*

$$\left| \int_{b'}^{b''} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

*Dowód.* Zbieżność całki oznacza z definicji istnienie granicy  $\lim_{b' \rightarrow b^-} F(b')$ , gdzie

$F(b') = \int_a^{b'} f(x) dx$ . Z kolei granica ta istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek Cauchy'ego, czyli w zapisie kwantyfikatorowym

$$\forall \varepsilon > 0 \exists b_0 < b \forall b', b'' [b_0 < b' < b'' < b] \implies |F(b'') - F(b')| < \varepsilon.$$

Ale

$$F(b'') - F(b') = \int_a^{b''} f(x) dx - \int_a^{b'} f(x) dx = \int_{b'}^{b''} f(x) dx.$$

□

**Przykład.** Sprawdzamy zbieżność całki  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ . Dla  $0 < b' < b''$  mamy<sup>1</sup>

$$\left| \int_{b'}^{b''} \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq \frac{2}{b'}.$$

Dla  $\varepsilon > 0$  przyjmijmy  $b_0 = \frac{2}{\varepsilon}$ . Wtedy dla  $b'' > b' > \frac{2}{\varepsilon}$  otrzymujemy

$$\left| \int_{b'}^{b''} \frac{\sin x}{x} dx \right| < \varepsilon.$$

Można udowodnić, że (por. 1.5.2)

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Przypuśćmy, że całka  $\int_a^b f(x) dx$  ma osobliwość w  $b$ . Dla  $a < c < b$  całki  $\int_c^b f(x) dx$  i  $\int_a^b f(x) dx$  są jednocześnie zbieżne lub jednocześnie rozbieżne, bo warunki Cauchy'ego są dla nich identyczne. Ponadto w przypadku zbieżności mamy

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Ostatni wzór otrzymujemy przez przejście graniczne  $b' \rightarrow b^-$  w równości

$$\int_a^{b'} f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^{b'} f(x) dx.$$

---

<sup>1</sup>Z drugiego twierdzenia o wartości średniej mamy  $\int_{b'}^{b''} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{b'} \int_{b'}^{\xi} \sin x dx = \frac{\cos b' - \cos \xi}{b'}$ , dla pewnego  $\xi$ ,  $b' < \xi < b''$ .

Dla całek z osobliwością w punkcie  $b$  spełniony jest wzór

$$\int_a^b [Af(x) + Bg(x)] dx = A \int_a^b f(x) dx + B \int_a^b g(x) dx,$$

o ile całki po prawej stronie są zbieżne.

**Definicja 1.4.** Mówimy, że całka  $\int_a^b f(x) dx$  z osobliwością w  $b$  jest bezwzględnie zbieżna, jeśli zbieżna jest całka  $\int_a^b |f(x)| dx$ .

**Twierdzenie 1.5.** Całka bezwzględnie zbieżna jest zbieżna.

*Dowód.* Dla  $b' < b'' < b$  mamy

$$\left| \int_{b'}^{b''} f(x) dx \right| \leq \int_{b'}^{b''} |f(x)| dx.$$

Zatem z warunku Cauchy'ego dla całki  $\int_a^b |f(x)| dx$  wynika ten warunek dla całki  $\int_a^b f(x) dx$ . □

**Przykład.**  $\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ . Sprawdzamy warunek Cauchy'ego dla całki  $\int_{\pi}^{\infty} \frac{|\sin x|}{x^2} dx$ .

$$\int_{b'}^{b''} \frac{|\sin x|}{x^2} dx \leq \int_{b'}^{b''} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{b'} - \frac{1}{b''} < \frac{1}{b'}.$$

**Twierdzenie 1.6** (kryterium porównawcze). Niech  $0 \leq f(x) \leq g(x)$  dla  $a \leq x < b$ .

(i) Ze zbieżności całki  $\int_a^b g(x) dx$  wynika zbieżność  $\int_a^b f(x) dx$ . Ponadto

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

(ii) Z rozbieżności całki  $\int_a^b f(x) dx$  wynika rozbieżność  $\int_a^b g(x) dx$ .

*Dowód.* (i) Dla  $a < b' < b'' < b$  mamy

$$0 \leq \int_{b'}^{b''} f(x) dx \leq \int_{b'}^{b''} g(x) dx.$$

Stąd otrzymujemy zbieżność całki z funkcji  $f(x)$ . Przechodzimy do granicy  $b' \rightarrow b^-$  w nierówności

$$\int_a^{b'} f(x) dx \leq \int_a^{b'} g(x) dx$$

aby otrzymać drugą część tezy.  $\square$

**Uwaga 1.7.** Jeśli całka  $\int_a^b f(x) dx$  z osobliwością w  $b$  jest bezwzględnie zbieżna, to

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Rzeczywiście, mamy  $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ . Po scałkowaniu otrzymujemy

$$-\int_a^{b'} |f(x)| dx \leq \int_a^{b'} f(x) dx \leq \int_a^{b'} |f(x)| dx.$$

Przechodzimy do granicy  $b' \rightarrow b^-$  i otrzymujemy

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

**Przykład.** Czy całka  $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$  jest bezwzględnie zbieżna ?

Dla  $k \geq 1$  mamy

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x| dx = \frac{1}{k\pi} \int_0^\pi \sin x dx = \frac{2}{k\pi}.$$



Zatem

$$\int_0^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx = \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \xrightarrow{n} \infty.$$

**Twierdzenie 1.8.** *Jeśli funkcja  $F(x)$  jest ciągła w przedziale  $[a, b]$  i różniczkowalna w sposób ciągły w  $[a, b)$  oraz  $F'(x) = f(x)$  dla  $a \leq x < b$ , to*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

*Dowód.*

$$\int_a^{b'} f(x) dx = F(b') - F(a) \xrightarrow{b' \rightarrow b^-} F(b) - F(a).$$

□

**Twierdzenie 1.9.** *Przy założeniach poprzedniego twierdzenia z  $b = \infty$  i dodatkowym założeniu, że  $L = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$  mamy*

$$\int_a^b f(x) dx = L - F(a).$$

**Przykłady.**

(a)  $\int_0^1 \log x dx = (x \log x - x) \Big|_{0^+}^1 = -1$ . Rolę funkcji  $F(x)$  spełnia

$$F(x) = \begin{cases} x \log x - x & 0 < x \leq 1, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

(b)  $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x}} = -\frac{2}{\sqrt{x}} \Big|_1^\infty = 2$ .

### 1.1 Całki niewłaściwe z funkcji nieujemnych

Przypuśćmy, że całka  $\int_a^b f(x) dx$  ma osobliwość w punkcie  $b$  oraz  $f(x) \geq 0$

dla  $a \leq x < b$ . Wtedy funkcja  $F(b') = \int_a^{b'} f(x) dx$  jest rosnąca. Zatem całka

$\int_a^b f(x) dx$  jest zbieżna albo rozbieżna do  $\infty$ .

**Przykłady.**

(a)  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+x^4}}$ . Mamy

$$0 < \frac{1}{\sqrt{x+x^4}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \Big|_0^1 = 2.$$

Zatem rozważana całka jest zbieżna.

(b)  $\int_1^\infty \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$ . Dla  $x \geq 1$  mamy

$$\frac{1}{x+\sqrt{x}} \geq \frac{1}{2x}, \quad \int_1^\infty \frac{dx}{2x} = \frac{1}{2} \log x \Big|_1^\infty = \infty.$$

Zatem  $\int_1^\infty \frac{dx}{x+\sqrt{x}} = \infty$ .

**Uwaga 1.10.** W kryterium porównawczym wystarczy, aby  $0 \leq f(x) \leq g(x)$  dla  $c \leq x < b$  dla pewnego punktu  $c$ ,  $a < c < b$ . Rzeczywiście, całki  $\int_c^b f(x) dx$

oraz  $\int_a^b f(x) dx$  są jednocześnie zbieżne lub jednocześnie rozbieżne.

**Twierdzenie 1.11** (kryterium graniczne). Załóżmy, że funkcje ciągłe  $f(x)$  i  $g(x)$  są określone i dodatnie na przedziale  $[a, b)$  oraz

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = A > 0.$$

Wtedy całki  $\int_a^b f(x) dx$  oraz  $\int_a^b g(x) dx$  są jednocześnie zbieżne lub jednocześnie rozbieżne.

*Dowód.* Z założenia można znaleźć punkt  $a \leq c < b$  taki, że dla  $c \leq x < b$  mamy

$$\frac{1}{2}A < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3}{2}A.$$

Wtedy

$$\frac{1}{2}Ag(x) < f(x) < \frac{3}{2}Ag(x), \quad c \leq x < b.$$

Z kryterium porównawczego i z Uwagi 1.10 otrzymujemy tezę twierdzenia.  $\square$

**Przykłady.**

(a)  $\int_0^1 \frac{dx}{x - \log(1+x)}$ . Mamy

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x - \log(1+x)}}{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x - \log(1+x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{1 - \frac{1}{1+x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2(1+x) = 2. \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_{0^+}^1 = \infty.$$

$$(b) \int_0^1 \frac{dx}{\log(1 + \sqrt{x})}.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\log(1 + \sqrt{x})}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\log(1 + \sqrt{x})} \stackrel{=}{=} \lim_{y \rightarrow 1^+} \frac{y - 1}{\log y} \\ &= \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 1^+} \frac{\log y}{y-1}} = \frac{1}{(\log y)' \Big|_{y=1}} = 1. \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \Big|_0^1 = 2.$$

**Uwaga 1.12.** Jeśli w założeniach twierdzenia  $A = 0$ , to ze zbieżności  $\int_a^b g(x) dx$  wynika zbieżność  $\int_a^b f(x) dx$ . Jeśli  $A = \infty$ , to z rozbieżności  $\int_a^b g(x) dx$  wynika rozbieżność  $\int_a^b f(x) dx$ . Rzeczywiście, jeśli  $A = 0$ , to

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq 1, \text{ dla } a < c \leq x < b.$$

Wtedy

$$0 \leq f(x) \leq g(x), \text{ dla } a < c \leq x < b.$$

Z kryterium porównawczego otrzymujemy tezę. Jeśli  $A = \infty$ , to

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{g(x)}{f(x)} = 0.$$

Korzystając z pierwszej części uzyskujemy żadaną konkluzję.

**Przykłady.**

(a) Dla  $\alpha, \beta > 0$  rozważamy całkę  $\int_1^\infty x^\alpha e^{-x^\beta} dx$ . Przyjmijmy  $f(x) = x^\alpha e^{-x^\beta}$  oraz  $g(x) = x^{-2}$ . Wtedy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\alpha+2}}{e^{x^\beta}} \stackrel{=}{=} \lim_{y=x^\beta} \frac{y^\gamma}{e^y},$$

dla  $\gamma = \frac{\alpha+2}{\beta}$ . Niech  $n = [\gamma] + 1$ . Wtedy

$$0 \leq \frac{y^\gamma}{e^y} \leq \frac{y^n}{e^y} \leq \frac{y^n}{\frac{y^{n+1}}{(n+1)!}} = \frac{(n+1)!}{y}.$$

Zatem  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ . Całka funkcji  $g(x) = x^{-2}$  jest zbieżna na półpro-

stej  $[1, \infty)$ , zatem zbieżna jest też całka  $\int_1^\infty x^\alpha e^{-x^\beta} dx$ .

- (b) Obracamy wykres funkcji  $y = x^{-1}$  dla  $x \geq 1$  wokół osi  $OX$ . Otrzymujemy tzw. róg archanioła Gabriela (opisany przez włoskiego matematyka i fizyka Evangelistę Torricellego 1608-1647).

Obliczamy objętość obszaru ograniczonego przez róg przyjmując, że  $x$  jest liczone w metrach.

$$V = \pi \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = -\frac{\pi}{x} \Big|_1^\infty = \pi \text{ (m}^3\text{)}.$$

Obliczamy pole powierzchni rogu<sup>2</sup>.

$$S = 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx \geq 2\pi \int_1^\infty \frac{dx}{x} = 2\pi \log x \Big|_1^\infty = \infty.$$

**Zagadka.** Wyobraźmy sobie, że róg wykonany jest z wsiąkliwej białej bibuły. Nalewamy do rogu  $\pi$  metrów sześciennych czarnego atramentu. Następnie wylewamy atrament. Wewnętrzna strona rogu zostanie zabarwiona na czarno. Czyli za pomocą skończonej ilości atramentu zabarwiliśmy nieskończoną powierzchnię. Jak wyjaśnić ten paradoks?

## 1.2 Całki i szeregi

Rozważamy całkę niewłaściwą  $\int_a^b f(x) dx$  z osobliwością w  $b \leq \infty$ . Niech  $a = b_0 < b_1 < b_2 < \dots < b_n \dots$ , oraz  $b_n \xrightarrow[n]{} b$ .

---


$${}^2S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

**Twierdzenie 1.13.**

(i) Jeśli całka  $\int_a^b f(x) dx$  jest zbieżna, to zbieżny jest szereg całek właściwych  $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{b_{n-1}}^{b_n} f(x) dx$ .

(ii) Jeśli  $f(x) \geq 0$ , to implikacja odwrotna jest również prawdziwa.

*Dowód.* (i) Obliczamy sumę częściową szeregu.

$$S_n = \sum_{k=1}^n \int_{b_{k-1}}^{b_k} f(x) dx = \int_a^{b_n} f(x) dx \xrightarrow{n} \int_a^b f(x) dx.$$

(ii) Niech  $f(x) \geq 0$ . Dla zbieżności całki  $\int_a^b f(x) dx$  wystarczy pokazać, że

całki  $\int_a^{b'} f(x) dx$  są wspólnie ograniczone, niezależnie od  $b' < b$ . Niech  $b' < b$ . Ponieważ  $b_n \rightarrow b$ , to  $b_{n_0} > b'$  dla pewnego wskaźnika  $n_0$ . Wtedy

$$\int_a^{b'} f(x) dx \leq \int_a^{b_{n_0}} f(x) dx = \sum_{k=1}^{n_0} \int_{b_{k-1}}^{b_k} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{b_{k-1}}^{b_k} f(x) dx.$$

□

**Twierdzenie 1.14.** Załóżmy, że  $f(x)$  jest dodatnią funkcją malejącą na przedziale  $[1, \infty)$ . Wtedy zbieżność całki  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  jest równoważna zbieżności szeregu  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ . Ponadto dla  $I_n = \int_1^n f(x) dx$  oraz  $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$  ciąg liczb  $S_n - I_n$  jest zbieżny.

*Dowód.* Z nierówności

$$f(k) \leq \int_{k-1}^k f(x) dx \leq f(k-1) \tag{1.1}$$

otrzymujemy, że zbieżność szeregu  $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$  jest równoważna ze zbieżnością szeregu  $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{k-1}^k f(x) dx$ . Z kolei zbieżność szeregu całek jest równoważna ze zbieżnością całki  $\int_1^{\infty} f(x) dx$ .

Zsumujmy (1.1) dla  $k = 2, 3, \dots, n$ . Wtedy

$$\underbrace{f(2) + f(3) + \dots + f(n)}_{S_n - f(1) + f(n)} \leq \underbrace{\int_1^n f(x) dx}_{I_n} \leq \underbrace{f(1) + f(2) + \dots + f(n-1)}_{S_n}.$$

Otrzymujemy więc  $0 \leq S_n - I_n \leq f(1) - f(n) \leq f(1)$ . Ciąg  $S_n - I_n$  jest rosnący. Rzeczywiście, mamy  $f(n) > \int_n^{n+1} f(x) dx$ . To oznacza, że  $S_{n+1} - S_n > I_{n+1} - I_n$ , czyli  $S_{n+1} - I_{n+1} > S_n - I_n$ . Ciąg  $S_n - I_n$  jest zatem zbieżny.  $\square$

### Przykłady.

(a)  $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ ,  $\alpha > 0$ . Mamy

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \log x & \alpha = 1, \\ \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} & \alpha \neq 1 \end{cases} \Big|_1^{\infty} = \begin{cases} \infty & 0 < \alpha \leq 1, \\ \frac{1}{\alpha-1} & \alpha > 1. \end{cases}$$

Zatem szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  jest zbieżny tylko dla  $\alpha > 1$ .

(b)  $f(x) = \frac{1}{x \log^\alpha x}$ ,  $\alpha > 0$ ,  $x \geq 2$ . Mamy

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \log^\alpha x} = \begin{cases} \log \log x & \alpha = 1, \\ \frac{1}{1-\alpha} (\log x)^{1-\alpha} & \alpha \neq 1 \end{cases} \Big|_2^{\infty} = \begin{cases} \infty & 0 < \alpha \leq 1, \\ \frac{1}{\alpha-1} (\log 2)^{1-\alpha} & \alpha > 1. \end{cases}$$

Wnioskujemy, że szereg

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^\alpha n}$$

jest zbieżny tylko dla  $\alpha > 1$ .

(c)  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Mamy

$$\begin{aligned} S_n - I_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \int_1^n \frac{1}{x} dx \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \log n \xrightarrow{n} c, \end{aligned}$$

gdzie  $c$  jest stałą Eulera ( $c = 0,57721\dots$ ).

**Twierdzenie 1.15.** *Jeśli funkcja  $g(x)$  jest nieujemna i malejąca w przedziale  $[a, b)$  oraz  $\lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = 0$ , natomiast dla  $a \leq b' < b$  całki (właściwe)  $\int_a^{b'} f(x) dx$  są wspólnie ograniczone, to całka  $\int_a^b f(x)g(x) dx$  jest zbieżna. W szczególności teza jest spełniona, gdy całka  $\int_a^b f(x) dx$  jest zbieżna.*

*Dowód.* Z założenia  $\left| \int_a^{b'} f(x) dx \right| \leq M$  dla pewnej stałej  $M$  i wszystkich  $a \leq b' < b$ . Sprawdzamy warunek Cauchy'ego zbieżności całki  $\int_a^b f(x)g(x) dx$ . Dla  $a \leq b' < b'' < b$ , na podstawie twierdzenia o wartości średniej, mamy

$$\int_{b'}^{b''} f(x)g(x) dx = g(b') \int_{b'}^{\xi} f(x) dx$$

dla pewnego punktu pośredniego  $\xi$ ,  $b' < \xi < b''$ . Zatem

$$\begin{aligned} \left| \int_{b'}^{b''} f(x)g(x) dx \right| &= g(b') \left| \int_a^{\xi} f(x) dx - \int_a^{b'} f(x) dx \right| \\ &\leq g(b') \left\{ \left| \int_a^{\xi} f(x) dx \right| + \left| \int_a^{b'} f(x) dx \right| \right\} \leq 2Mg(b'). \end{aligned}$$



Jeśli całka  $\int_a^b f(x) dx$  jest zbieżna, tzn. istnieje granica

$$\lim_{b' \rightarrow b^-} \int_a^{b'} f(x) dx$$

to całki  $\int_a^{b'} f(x) dx$  są wspólnie ograniczone.  $\square$

### Przykłady.

- (a) Badamy zbieżność całki Dirichleta  $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ . Wystarczy zbadać zbieżność całki  $\int_{\pi/2}^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ . Przyjmijmy  $g(x) = \frac{1}{x}$  oraz  $f(x) = \sin x$ . Wtedy

$$\left| \int_{\pi/2}^b \sin x dx \right| = |\cos(\pi/2) - \cos b| \leq 1.$$

Zatem całka  $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$  jest zbieżna. Można udowodnić, że wartość całki wynosi  $\pi/2$ .

- (b)  $\int_0^\infty \sin(x^2) dx$  nosi nazwę całki Fresnela. Zbadamy zbieżność całki  $\int_{\sqrt{\pi/2}}^\infty \sin(x^2) dx$ .

Przyjmujemy  $f(x) = 2x \sin(x^2)$  oraz  $g(x) = \frac{1}{2x}$ . Wtedy

$$\left| \int_{\sqrt{\pi/2}}^b 2x \sin(x^2) dx \right| = \left| -\cos(x^2) \right|_{\sqrt{\pi/2}}^b = |\cos(b^2)| \leq 1.$$

### 1.3 Całki niewłaściwe z osobliwością w kilku punktach

**Definicja 1.16.** Mówimy, że całka  $\int_a^b f(x) dx$  ma osobliwość w punktach  $a$  i  $b$ , jeśli całki  $\int_a^c f(x) dx$  i  $\int_c^b f(x) dx$  mają osobliwości w punktach  $a$  i  $b$ , odpowiednio, dla  $a < c < b$ . Mówimy, że całka  $\int_a^b f(x) dx$  jest zbieżna, jeśli zbieżne są całki  $\int_a^c f(x) dx$  i  $\int_c^b f(x) dx$ . Określamy wtedy

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Wartość całki po lewej stronie nie zależy od wyboru punktu  $c$ .

**Przykład.**

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^5 + x^2 + \sqrt{x}}.$$

Badamy całki

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^5 + x^2 + \sqrt{x}}, \quad \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^5 + x^2 + \sqrt{x}}.$$

Mamy

$$0 < \frac{1}{x^5 + x^2 + \sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad 0 < \frac{1}{x^5 + x^2 + \sqrt{x}} < \frac{1}{x^5}$$

oraz

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2, \quad \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^5} = \frac{1}{4}.$$

**Definicja 1.17.** Mówimy, że całka  $\int_a^b f(x) dx$  ma osobliwość w punktach  $a$ ,  $b$  i  $c$ ,  $a < c < b$  jeśli całki  $\int_a^c f(x) dx$  i  $\int_c^b f(x) dx$  mają osobliwości w punktach

$a$  i  $c$  oraz  $w$   $c$  i  $b$ , odpowiednio. Jeśli obie całki są zbieżne, to określamy

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

**Przykład.**  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}(x^2+1)}$ . Mamy trzy punkty osobliwe  $-\infty$ ,  $0$  oraz  $\infty$ .

Funkcja podcałkowa jest parzysta, więc wystarczy zbadać całkę  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}(x^2+1)}$ .

Mamy

$$\begin{aligned} 0 < x \leq 1, & \quad \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}(x^2+1)} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}, & \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 3; \\ x \geq 1, & \quad \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}(x^2+1)} \leq \frac{1}{x^2}, & \quad \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = 1. \end{aligned}$$

**Uwaga 1.18.** Mamy  $\int_{-a}^a \sin x dx = 0$ . Ale granica całek  $\int_a^b \sin x dx$ , gdy  $a \rightarrow -\infty$ ,  $b \rightarrow \infty$  nie istnieje, bo

$$\int_a^b \sin x dx = \cos a - \cos b.$$

Określa się słabszą zbieżność całki  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  w sensie wartości głównej.

Mówimy, że  $\text{pv} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  jest zbieżna, jeśli istnieje granica  $\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a f(x) dx$ .

Dla porównania, zbieżność całki w zwykłym sensie oznacza istnienie granicy

$$\lim_{\substack{a \rightarrow \infty \\ b \rightarrow -\infty}} \int_{-a}^b f(x) dx.$$

Rozważmy całkę  $\int_{-1}^1 f(x) dx$  z osobliwością w punkcie  $0$ . Mówimy, że całka

$\text{pv} \int_{-1}^1 f(x) dx$  jest zbieżna, jeśli istnieje granica

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[ \int_{-1}^{-\varepsilon} f(x) dx + \int_{\varepsilon}^1 f(x) dx \right].$$

Zwykła zbieżność tej całki oznaczałaby istnienie granicy

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0^+ \\ \eta \rightarrow 0^+}} \left[ \int_{-1}^{-\eta} f(x) dx + \int_{\varepsilon}^1 f(x) dx \right].$$

**Przykład.**  $\text{pv} \int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = 0$ , bo  $\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = 0$ . Całka nie jest zbieżna w zwykłym sensie, bo całki  $\int_0^1 \frac{dx}{x}$  i  $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x}$  nie są zbieżne.

## 1.4 Całki z parametrem

Niech  $f(x, y)$  będzie funkcją dwu zmiennych określoną na pewnym podzbiore  $U \subset \mathbb{R}^2$ . Np.  $U = \mathbb{R}^2$  lub  $U = [a, b] \times [c, d]$ .

**Przykłady.**

$$\begin{aligned} f(x, y) &= xy, \\ g(x, y) &= \sqrt{x^2 + y}, \quad [0, 1] \times [1, 2]. \end{aligned}$$

Gdy zbiór  $U$ , na którym określona jest funkcja  $f(x, y)$ , nie jest podany, to przyjmujemy za  $U$  największy możliwy zakres  $(x, y)$ , dla których zapis  $f(x, y)$  ma sens. W przeciwnym wypadku, gdy zbiór  $U$  jest podany, to  $f(x, y)$  jest określona tylko na  $U$ . W drugim przykładzie  $g(1, 1) = \sqrt{2}$ , ale wartość funkcji w punkcie  $(-1, 1)$  nie jest określona.

Funkcję  $f(x, y)$  określoną na  $[a, b] \times [c, d]$  możemy traktować jako rodzinę funkcji jednej zmiennej

$$[a, b] \ni x \mapsto f(x, y)$$

z parametrem  $y$  z przedziału  $[c, d]$ . Podobnie  $f(x, y)$  możemy traktować jako rodzinę funkcji

$$[c, d] \ni y \mapsto f(x, y)$$

z parametrem  $x$  z przedziału  $[a, b]$ .

**Przykłady.** Dla

$$f(x, y) = xy, \quad g(x, y) = \sqrt{x^2 + y}, \quad [0, 1] \times [1, 2]$$

mamy

$$\begin{aligned} f(x, 0) = 0 & \quad f(x, 1) = x & \quad g(x, 1) = \sqrt{x^2 + 1} & \quad g(x, 2) = \sqrt{x^2 + 2} \\ f(0, y) = 0 & \quad f(2, y) = 2y & \quad g(0, y) = \sqrt{y} & \quad g\left(\frac{1}{2}, y\right) = \sqrt{y + \frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

**Definicja 1.19.** Mówimy, że funkcja  $f(x, y)$  określona na  $U \subset \mathbb{R}^2$  jest ciągła w punkcie  $(x_0, y_0) \in U$ , jeśli dla dowolnych ciągów  $x_n \rightarrow x_0$  i  $y_n \rightarrow y_0$  takich, że  $(x_n, y_n) \in U$ , mamy  $f(x_n, y_n) \rightarrow f(x_0, y_0)$ .

Intuicyjnie oznacza to, że dla punktów  $(x, y)$  z  $U$  położonych blisko punktu  $(x_0, y_0)$  wartości  $f(x, y)$  leżą blisko  $f(x_0, y_0)$ . Zapis kwantyfikacyjny tego sformułowania ma postać:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \{ (x, y) \in U, |x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta \implies |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon \}.$$

Można udowodnić, że podany wyżej warunek jest równoważny z warunkiem z definicji.

**Definicja 1.20.** Mówimy, że funkcja  $f(x, y)$  jest ciągła na zbiorze  $U \subset \mathbb{R}^2$ , jeśli ta funkcja jest ciągła w każdym punkcie zbioru  $U$ .

**Przykład.** Funkcja  $f(x, y) = xy$  jest ciągła na  $\mathbb{R}^2$ .

**Uwaga 1.21.** Jeśli funkcja  $f(x, y)$  jest ciągła na  $[a, b] \times [c, d]$ , to każda z funkcji

$$\begin{aligned} [a, b] \ni x &\longmapsto f(x, y), & y &\in [c, d], \\ [c, d] \ni y &\longmapsto f(x, y), & x &\in [a, b] \end{aligned}$$

jest ciągła.

Te własności oznaczają, że funkcja  $f(x, y)$  jest ciągła ze względu na każdą zmienną z osobna i są słabsze niż ciągłość funkcji  $f(x, y)$  określona w definicji. Porównajmy ciągłość funkcji  $f(x, y)$  w punkcie  $(x_0, y_0)$  z połączonymi dwoma warunkami: ciągłością funkcji  $x \mapsto f(x, y_0)$  w punkcie  $x_0$  i ciągłością funkcji

$y \mapsto f(x_0, y)$  w punkcie  $y_0$ . Dla uproszczenia przyjmijmy, że punkt  $(x_0, y_0)$  leży wewnątrz prostokąta  $[a, b] \times [c, d]$ , czyli w  $(a, b) \times (c, d)$ .

Warunek ciągłości w  $(x_0, y_0)$  oznacza, że dla małych wartości  $\delta > 0$ , jeśli punkt  $(x, y)$  leży w kwadracie

$$|x - x_0| < \delta, \quad |y - y_0| < \delta, \quad (1.2)$$

to wartość  $f(x, y)$  leży blisko wartości  $f(x_0, y_0)$ .

Z kolei ciągłości funkcji  $x \mapsto f(x, y_0)$  oraz  $y \mapsto f(x_0, y)$  w punktach  $x_0$  i  $y_0$  (odpowiednio) oznacza, że jeśli  $(x, y)$  leży na jednym z odcinków,

$$\begin{aligned} |x - x_0| < \delta, \quad y = y_0, & \quad \text{poziomy} \\ x = x_0, \quad |y - y_0| < \delta, & \quad \text{pionowy} \end{aligned}$$

to wartość  $f(x, y)$  leży blisko wartości  $f(x_0, y_0)$ . Te odcinki leżą w kwadracie opisanym przez (1.2); są jego osiami symetrii.

**Zadanie.** Znaleźć funkcję  $f(x, y)$  określoną na  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  taką, że każda z funkcji  $x \mapsto f(x, y)$  i  $y \mapsto f(x, y)$  jest ciągła na przedziale  $[-1, 1]$ , ale funkcja  $f(x, y)$  nie jest ciągła w punkcie  $(0, 0)$ .

**Twierdzenie 1.22.** *Funkcja  $f(x, y)$  ciągła na prostokącie  $U = [a, b] \times [c, d]$  jest jednostajnie ciągła, tzn. dla dowolnej liczby  $\varepsilon > 0$  istnieje liczba  $\delta > 0$  taka, że z warunków  $(x, y), (x', y') \in U$  oraz  $|x - x'| < \delta, |y - y'| < \delta$  wynika  $|f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon$ .*

**Uwaga 1.23.** Warunek w tezie oznacza, że jeśli punkty  $(x, y)$  i  $(x', y')$  leżą blisko siebie, to wartości funkcji  $f$  w tych punktach są bliskie siebie.

*Dowód. (nie wprost).* Załóżmy, że dla pewnej liczby  $\varepsilon > 0$  oraz  $\delta_n = \frac{1}{n}$  istnieją punkty  $(x_n, y_n), (x'_n, y'_n) \in U$ , dla których

$$|x_n - x'_n| < \frac{1}{n}, \quad |y_n - y'_n| < \frac{1}{n}, \quad |f(x_n, y_n) - f(x'_n, y'_n)| \geq \varepsilon. \quad (1.3)$$

Z twierdzenia Bolzano-Weierstrassa można znaleźć rosnący ciąg liczb naturalnych  $n_k$  taki, że ciągi  $x_{n_k}$  oraz  $y_{n_k}$  są zbieżne. Niech  $x_{n_k} \xrightarrow[k]{} x_0$  oraz  $y_{n_k} \xrightarrow[k]{} y_0$ . Wtedy  $a \leq x_0 \leq b$  oraz  $c \leq y_0 \leq d$ , tzn.  $(x_0, y_0) \in U$ . Ponadto  $x'_{n_k} \xrightarrow[k]{} x_0$  oraz

$y'_{n_k} \xrightarrow{k} y_0$ , bo  $x_{n_k} - x'_{n_k} \xrightarrow{k} 0$  i  $y_{n_k} - y'_{n_k} \xrightarrow{k} 0$ . Z założenia ciągłości funkcji  $f$  (w punkcie  $(x_0, y_0)$ ) mamy

$$f(x_{n_k}, y_{n_k}) \xrightarrow{k} f(x_0, y_0), \quad f(x'_{n_k}, y'_{n_k}) \xrightarrow{k} f(x_0, y_0).$$

Zatem

$$f(x_{n_k}, y_{n_k}) - f(x'_{n_k}, y'_{n_k}) \xrightarrow{k} 0.$$

Ale to przeczy warunkowi (1.3).  $\square$

**Twierdzenie 1.24.** *Każda funkcja ciągła na prostokącie  $[a, b] \times [c, d]$  jest ograniczona.*

*Dowód.* (nie wprost). Załóżmy, że funkcja  $f$  nie jest ograniczona. Tzn. dla dowolnej liczby  $n$  można znaleźć punkt  $(x_n, y_n) \in U$  spełniający  $|f(x_n, y_n)| \geq n$ , czyli  $|f(x_n, y_n)| \xrightarrow{n} \infty$ . Podobnie jak w dowodzie poprzedniego twierdzenia, można znaleźć ciąg wskaźników  $n_k$  taki, że  $x_{n_k} \xrightarrow{k} x_0$  i  $y_{n_k} \xrightarrow{k} y_0$ . Wtedy z ciągłości funkcji  $f$  w punkcie  $(x_0, y_0)$  otrzymamy

$$f(x_{n_k}, y_{n_k}) \xrightarrow{k} f(x_0, y_0)$$

co przeczy warunkowi

$$n_k \leq |f(x_{n_k}, y_{n_k})| \xrightarrow{k} \infty.$$

$\square$

**Lemat 1.25.** *Założmy, że funkcja  $f(x, y)$  jest ciągła na prostokącie  $[a, b] \times [c, d]$ . Wtedy funkcje*

$$g(x) = \int_c^d f(x, y) dy \quad \text{i} \quad h(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

są ciągłe na przedziałach  $[a, b]$  i  $[c, d]$ , odpowiednio.

**Przykład.** Dla funkcji  $f(x, y) = x^2 y^{1/2} + x^3 y^3$  określonej na prostokącie  $[0, 1] \times [0, 1]$  mamy

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^1 f(x, y) dy = \int_0^1 (x^2 y^{1/2} + x^3 y^3) dy \\ &= \left( x^2 \frac{2}{3} y^{3/2} + x^3 \frac{1}{4} y^4 \right) \Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{2}{3} x^2 + \frac{1}{4} x^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h(y) &= \int_0^1 f(x, y) dx = \int_0^1 (x^2 y^{1/2} + x^3 y^3) dx \\
 &= \left( \frac{x^3}{3} y^{1/2} + \frac{1}{4} x^4 y^3 \right) \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3} y^{1/2} + \frac{1}{4} y^3.
 \end{aligned}$$

**Uwaga 1.26.** Przy całkowaniu względem  $dy$  zmienną  $x$  traktujemy jako parametr (stałą). Podobnie, przy całkowaniu względem  $dx$  zmienna  $y$  jest parametrem.

*Dowód.* (tylko dla funkcji  $g(x)$ ). Mamy

$$\begin{aligned}
 |g(x) - g(x')| &= \left| \int_c^d f(x, y) dy - \int_c^d f(x', y) dy \right| = \left| \int_c^d [f(x, y) - f(x', y)] dy \right| \\
 &\leq \int_c^d |f(x, y) - f(x', y)| dy.
 \end{aligned}$$

Z jednostajnej ciągłości funkcji  $f$  wiemy, że dla liczby  $\varepsilon > 0$  istnieje liczba  $\delta > 0$  taka, że jeśli  $|x - x'| < \delta$  oraz  $|y - y'| < \delta$ , to  $|f(x, y) - f(x', y')| < \frac{\varepsilon}{d - c}$ . Załóżmy, że  $|x - x'| < \delta$  oraz  $y = y'$ . Wtedy

$$|f(x, y) - f(x', y)| < \frac{\varepsilon}{d - c}.$$

Zatem

$$|g(x) - g(x')| < \frac{\varepsilon}{d - c} \cdot (d - c) = \varepsilon.$$

□

**Przykład.** Niech

$$f(x, y) = x \sin y, \quad [0, 1] \times [0, 2\pi].$$

Przy ustalonej wartości  $y$  funkcja  $x \mapsto f(x, y)$  jest różniczkowalna (jako funkcja liniowa). Mówimy wtedy, że istnieje pochodna cząstkowa funkcji  $f(x, y)$  względem zmiennej  $x$  (zmienna  $y$  traktowana jest jako parametr).

**Definicja 1.27.** Pochodna cząstkowa funkcji  $f(x, y)$  względem zmiennej  $x$  w punkcie  $(x_0, y_0)$  oznaczana jest symbolem  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$  i określona wzorem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{d}{dx} f(x, y) \Big|_{x=x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$



Podobnie określamy pochodną cząstkową funkcji  $f(x, y)$  względem  $y$  w punkcie  $(x_0, y_0)$ , czyli

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{d}{dy} f(x_0, y) \Big|_{y=y_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

**Przykład.** Dla  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^4}$  mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^4}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^4}}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^4}} \cdot 4y^3 = \frac{2y^3}{\sqrt{x^2 + y^4}}.$$

Otrzymujemy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = \frac{1}{\sqrt{17}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = \frac{16}{\sqrt{17}}.$$

**Uwaga 1.28.** Przy obliczaniu pochodnych cząstkowych w punkcie  $(x_0, y_0)$  wystarczy znać dwie funkcje  $x \mapsto f(x, y_0)$  oraz  $y \mapsto f(x_0, y)$  i zróżniczkować je w punktach  $x_0, y_0$  (odpowiednio). Alternatywnie można obliczyć pochodne cząstkowe funkcji  $f$  w dowolnym punkcie i na końcu wykonać podstawienie  $x = x_0, y = y_0$ .

**Przykłady.** Obliczyć  $\frac{\partial f}{\partial x}(\pi/2, 0)$  dla funkcji

$$f(x, y) = \sin(y \cos x) \sqrt{4 + e^{\arctg(x^2+1)+y^2} \log \sin x}.$$

Podstawiamy  $y = 0$  i otrzymujemy  $f(x, 0) = 0$ . Stąd

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\pi/2, 0) = \frac{d}{dx} f(x, 0) \Big|_{x=\pi/2} = 0.$$

**Twierdzenie 1.29.** Załóżmy, że funkcja  $f(x, y)$  jest ciągła na prostokącie  $[a, b] \times [c, d]$  oraz, że pochodna cząstkowa  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  jest ciągła na  $[a, b] \times [c, d]$ . Wtedy funkcja

$$g(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

jest różniczkowalna na przedziale  $[a, b]$  oraz

$$g'(x) = \frac{d}{dx} \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy.$$

**Uwaga 1.30.** Teza twierdzenia mówi, że można wejść z pochodną względem zmiennej  $x$  pod znak całki. Wewnątrz całki trzeba użyć pochodnej cząstkowej, bo funkcja pod całką zależy od dwu zmiennych.

**Uwaga 1.31.** Zwykle w przykładach występujące funkcje są określone i ciągłe oraz różniczkowalne na większym obszarze niż podany prostokąt. Jednak, gdy rygorystycznie ograniczamy się do obszaru  $[a, b] \times [c, d]$ , to pochodne funkcji  $g$  na końcach przedziału  $x = a$ ,  $x = b$  i pochodne cząstkowe funkcji  $f(x, y)$  w punktach postaci  $(x, y) = (a, y)$  i  $(x, y) = (b, y)$  traktujemy jako pochodne jednostronne: prawostronne, gdy  $x = a$  i lewostronne, gdy  $x = b$ .

*Dowód.* Obliczamy iloraz różnicowy

$$\begin{aligned} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} &= \frac{1}{h} \left[ \int_c^d f(x+h, y) dy - \int_c^d f(x, y) dy \right] \\ &= \frac{1}{h} \int_c^d [f(x+h, y) - f(x, y)] dy. \end{aligned}$$

Z twierdzenia Lagrange'a zastosowanego do każdej z funkcji  $x \mapsto f(x, y)$  otrzymujemy

$$f(x+h, y) - f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x + \theta h, y) h,$$

przy czym współczynnik  $\theta$  leży w przedziale  $(0, 1)$  i jego wartość zależy od  $x, y$  i  $h$ . Wtedy

$$\begin{aligned} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} &= \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x + \theta h, y) dy \\ &= \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy + \int_c^d \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x + \theta h, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right] dy. \quad (1.4) \end{aligned}$$

Funkcja  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  jest ciągła, zatem jest też jednostajnie ciągła. Stąd wynika, że granica przy  $h \rightarrow 0$  drugiego składnika wynosi 0 i uzyskujemy tezę twierdzenia.

Formalnie: dla ustalonej liczby  $\varepsilon > 0$  można znaleźć liczbę  $\delta > 0$  taką, że jeśli  $|x - x'| < \delta$ ,  $|y - y'| < \delta$ , to

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x', y') - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| < \frac{\varepsilon}{d - c}.$$

Założmy, że  $|h| < \delta$  wtedy dla  $x' = x + \theta h$  oraz  $y' = y$  otrzymujemy, że drugi składnik w (1.4) jest mniejszy niż  $\varepsilon$ . Stąd dostajemy tezę.  $\square$

**Twierdzenie 1.32.** Dla funkcji  $f(x, y)$  ciągłej na prostokącie  $[a, b] \times [c, d]$  mamy

$$\int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

**Uwaga 1.33.** Pojedyncze całki są funkcjami ciągłymi zmiennych  $x$  i  $y$  odpowiednio, zatem można wykonać operację całkowania względem pozostałej zmiennej.

*Dowód.* Określmy funkcję  $F(x)$  na przedziale  $[a, b]$  wzorem

$$F(x) = \int_c^d \left( \int_a^x f(t, y) dt \right) dy = \int_c^d h(x, y) dy,$$

gdzie

$$h(x, y) = \int_a^x f(t, y) dt.^3$$

To oznacza, że funkcja  $x \mapsto h(x, y)$  jest funkcją pierwotną do funkcji  $x \mapsto f(x, y)$  dla każdego ustalonego argumentu  $y$  z przedziału  $[c, d]$ . Tzn.

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = f(x, y).$$

Z poprzedniego twierdzenia zastosowanego do funkcji  $h(x, y)$  otrzymujemy

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_c^d h(x, y) dy = \int_c^d \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) dy = \int_c^d f(x, y) dy.$$

Z zasadniczego twierdzenia rachunku różniczkowego i całkowego otrzymujemy

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x) dx$$

---

<sup>3</sup>Por. ze wzorem  $h(x) = \int_a^x f(t) dt$

czyli

$$\int_c^d \left( \int_a^b f(t, y) dt \right) dy - 0 = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

□

**Uwaga 1.34.** Dla nieujemnej funkcji  $f(x, y)$  obie całki występujące w tezie można interpretować jako objętość obszaru pod wykresem funkcji  $z = f(x, y)$ , gdy  $a \leq x \leq b$  i  $c \leq y \leq d$ . Obszar dzielimy na  $n$  plasterków równej szerokości płaszczyznami pionowymi  $x = x_i$ . Następnie każdy plasterek dzielimy na  $m$  słupków równej szerokości płaszczyznami pionowymi  $y = y_j$ . Każdy słupek ma objętość równą w przybliżeniu

$$f(x_i, y_j) \Delta x_i \Delta y_j.$$

Sumujemy objętości słupków i otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=1}^m f(x_i, y_j) \Delta y_j \right] \Delta x_i &\sim \sum_{i=1}^n \left( \int_c^d f(x_i, y) dy \right) \Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^n g(x_i) \Delta x_i \sim \int_a^b g(x) dx = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx. \end{aligned}$$

Możemy sumę objętości słupków zapisać inaczej i otrzymać

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \left[ \sum_{i=1}^n f(x_i, y_j) \Delta x_i \right] \Delta y_j &\sim \sum_{j=1}^m \left( \int_a^b f(x, y_j) dx \right) \Delta y_j \\ &= \sum_{j=1}^m h(y_j) \Delta y_j \sim \int_c^d h(y) dy = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy. \end{aligned}$$

**Przykłady.**

1. Obliczyć  $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x} dx$ ,  $0 < a < b$ .

Funkcja podcałkowa jest określona w  $x = 0$  i w  $x = 1$  poprzez swoje granice

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^b - x^a}{\log x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^b - x^a}{\log x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{bx^{b-1} - ax^{a-1}}{x^{-1}} = b - a.$$

Z warunku  $\frac{\partial}{\partial y}(x^y) = x^y \log x$ <sup>4</sup> otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x} dx &= \int_0^1 \left( \int_a^b x^y dy \right) dx = \int_a^b \left( \int_0^1 x^y dx \right) dy \\ &= \int_a^b \frac{1}{y+1} x^{y+1} \Big|_{x=0}^{x=1} dy = \int_a^b \frac{1}{y+1} dy = \log(y+1) \Big|_{y=a}^{y=b} = \log \frac{b+1}{a+1}. \end{aligned}$$

2. Obliczyć  $\frac{d}{dx} \int_0^1 \operatorname{arctg} \frac{x}{y} dy$ ,  $x > 0$ . Funkcja podcałkowa przy ustalonej wartości  $x > 0$  ma granicę, gdy  $y \rightarrow 0^+$ , równą  $\pi/2$ . Jej pochodna cząstkowa względem  $x$  ma granicę równą 0, gdy  $y \rightarrow 0^+$ , co widać z obliczeń poniżej. Zatem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_0^1 \operatorname{arctg} \frac{x}{y} dy &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \left( \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \right) dy = \int_0^1 \frac{\frac{1}{y}}{1 + \frac{x^2}{y^2}} dy \\ &= \int_0^1 \frac{y}{x^2 + y^2} dy = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) \Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2} \log(x^2 + 1) - \log x. \end{aligned}$$

3. Obliczyć  $\frac{d}{dx} \int_0^1 \log(x^2 + y^2) dy$ .

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_0^1 \log(x^2 + y^2) dy &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \log(x^2 + y^2) dy \\ &= \int_0^1 \frac{2x}{x^2 + y^2} dy = 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \Big|_{y=0}^{y=1} = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

---

<sup>4</sup>  $\frac{\partial}{\partial y}(x^y) = \frac{\partial}{\partial y}(e^{y \log x}) = e^{y \log x} \log x = x^y \log x$ .

## 1.5 Dwie ważne całki niewłaściwe

### 1.5.1 Całka Eulera

Całka niewłaściwa

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

jest zbieżna, co wynika np. z nierówności

$$0 \leq e^{-x^2} \leq \frac{1}{x^2 + 1}$$

i z

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx = \operatorname{arctg} x \Big|_{x=0}^{\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

Można też użyć oszacowania

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \leq \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2}.$$

Wartość całki ma istotne znaczenie w rachunku prawdopodobieństwa. Zaczniemy od nieformalnego wyznaczenia wartości, które będzie podstawą ścisłych obliczeń.

Oznaczmy  $I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ . Wtedy

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{\infty} e^{-x^2} \left( \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy \right) dx \stackrel{y:=xy}{=} \int_0^{\infty} e^{-x^2} \left( \int_0^{\infty} x e^{-(xy)^2} dy \right) dx \\ &= \int_0^{\infty} \left( \int_0^{\infty} x e^{-x^2(y^2+1)} dx \right) dy = \int_0^{\infty} \frac{-1}{2(y^2+1)} e^{-x^2(y^2+1)} \Big|_{x=0}^{\infty} dy \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{2(y^2+1)} dy = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Zatem

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (1.5)$$

Przy obliczeniach zamiana kolejności całkowania wymaga uzasadnienia.

Przejdziemy do ścisłego wyprowadzenia wzoru (1.5). Oznaczmy

$$A_n = \int_{1/n^2}^{n^2} e^{-x^2} dx \cdot \int_{1/n^3}^{n^3} e^{-y^2} dy.$$

Mamy  $A_n \xrightarrow[n]{} I^2$ . Dalej

$$\begin{aligned} A_n &= \int_{1/n^2}^{n^2} e^{-x^2} \left[ \int_{1/n^3}^{n^3} e^{-y^2} dy \right] dx \stackrel{y:=xy}{=} \int_{1/n^2}^{n^2} e^{-x^2} \left[ \int_{1/(n^3x)}^{n^3/x} x e^{-(xy)^2} dy \right] dx \\ &\geq \int_{1/n^2}^{n^2} e^{-x^2} \left[ \int_{1/n}^n x e^{-(xy)^2} dx \right] dy = \int_{1/n}^n \left[ \int_{1/n^2}^{n^2} x e^{-x^2(y^2+1)} dx \right] dy \\ &= \int_{1/n}^n \frac{-1}{2(y^2+1)} e^{-x^2(y^2+1)} \Big|_{x=1/n^2}^{x=n^2} dy = \int_{1/n}^n \frac{1}{2(y^2+1)} \left[ e^{-(y^2+1)/n^4} - e^{-(y^2+1)n^4} \right] dy \\ &\geq \int_{1/n}^n \frac{1}{2(y^2+1)} \left[ e^{-(n^2+1)/n^4} - e^{-(1/n^2+1)n^4} \right] dy \\ &= \frac{1}{2} \left[ e^{-\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^4}} - e^{-n^2 - n^4} \right] \left[ \operatorname{arctg} n - \operatorname{arctg} \frac{1}{n} \right] \xrightarrow[n]{} \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Z drugiej strony

$$\begin{aligned} A_n &= \int_{1/n^2}^{n^2} e^{-x^2} \left[ \int_{1/(n^3x)}^{n^3/x} x e^{-(xy)^2} dy \right] dx \leq \int_{1/n^2}^{n^2} e^{-x^2} \left[ \int_{1/n^5}^{n^5} x e^{-(xy)^2} dy \right] dx \\ &= \int_{1/n^5}^{n^5} \left[ \int_{1/n^2}^{n^2} x e^{-x^2(y^2+1)} dx \right] dy = \int_{1/n^5}^{n^5} \frac{1}{2(y^2+1)} \left[ e^{-(y^2+1)/n^4} - e^{-(y^2+1)n^4} \right] dy \\ &\leq \int_{1/n^5}^{n^5} \frac{1}{2(y^2+1)} dy = \frac{1}{2} \left[ \operatorname{arctg} n^5 - \operatorname{arctg} \frac{1}{n^5} \right] \xrightarrow[n]{} \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Z twierdzenia o trzech ciągach uzyskujemy

$$A_n \xrightarrow[n]{} \frac{\pi}{4}.$$

Wzór

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

można wyprowadzić inaczej. Oznaczmy

$$I_n = \int_{-n}^n e^{-x^2} dx.$$

$$I_n^2 = \int_{-n}^n \left( \int_{-n}^n e^{-(x^2+y^2)} dy \right) dx.$$

Liczba  $I_n^2$  jest równa objętości obszaru pod wykresem funkcji

$$z = e^{-(x^2+y^2)}, \quad -n \leq x, y \leq n$$

(por. Uwaga na stronie 27). Ten obszar zawiera w sobie obszar pod wykresem odpowiadający kołu  $x^2 + y^2 \leq n^2$ . Z kolei jest zawarty w obszarze pod wykresem odpowiadający kołu  $x^2 + y^2 \leq 2n^2$ , bo

$$\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq n^2\} \subset [-n, n] \times [-n, n] \subset \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2n^2\}.$$

Obszary nad kołami możemy uzyskać przez obrót obszarów płaskich pod wykresami jednej funkcji

$$\begin{aligned} z &= e^{-x^2}, & 0 \leq x \leq n, \\ z &= e^{-x^2}, & 0 \leq x \leq n\sqrt{2}. \end{aligned}$$

wokół osi pionowej  $x = 0$ .

Ogólnie, gdy obracamy wokół osi  $x = 0$  obszar płaski pod wykresem funkcji

$$z = f(x) \geq 0, \quad 0 \leq x \leq a,$$

to w wyniku otrzymujemy obszar pod wykresem funkcji

$$z = f(\sqrt{x^2 + y^2}), \quad \sqrt{x^2 + y^2} \leq a.$$

Z powyższych rozważań wynika, że

$$I_n^2 \geq 2\pi \int_0^n x e^{-x^2} dx = -\pi e^{-x^2} \Big|_{x=0}^{x=n} = \pi(1 - e^{-n^2}) \xrightarrow{n} \pi.$$



Z drugiej strony

$$I_n^2 \leq 2\pi \int_0^{n\sqrt{2}} x e^{-x^2} dx = -\pi e^{-x^2} \Big|_{x=0}^{x=n\sqrt{2}} = \pi(1 - e^{-2n^2}) \xrightarrow{n} \pi.$$

Z twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy  $I_n^2 \xrightarrow{n} \pi$ .

### 1.5.2 Całka Dirichleta

Całka niewłaściwa

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

jest zbieżna. Ta wielkość pojawia się w kilku działach matematyki, np. w teorii szeregów i całek Fouriera, teorii funkcji zespolonych.

Jedynym punktem osobliwym jest  $\infty$ . Nieściśle obliczenie wartości całki jest następujące.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx &= \int_0^{\infty} \sin x \left( \int_0^{\infty} e^{-xy} dy \right) dx = \int_0^{\infty} \left( \int_0^{\infty} e^{-xy} \sin x dx \right) dy \\ &= \int_0^{\infty} \left[ -\frac{e^{-xy}(\cos x + y \sin x)}{y^2 + 1} \Big|_{x=0}^{\infty} \right] dy = \int_0^{\infty} \frac{1}{y^2 + 1} dy = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Podobnie jak przy całce Eulera zamiana kolejności całkowania wymaga uzasadnienia. Całka Dirichleta, w odróżnieniu od całki Eulera, nie jest bezwzględnie zbieżna, przez co ściśle obliczenie jej wartości jest bardziej kłopotliwe.

Oznaczmy

$$I_n = \int_{1/n}^n \frac{\sin x}{x} dx.$$

Wtedy

$$I_n \xrightarrow{n} \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Dalej

$$\begin{aligned}
 I_n &= \int_{1/n}^n \sin x \left[ \int_0^\infty e^{-xy} dy \right] dx \\
 &= \\
 &= \underbrace{\int_{1/n}^n \sin x \left[ \int_0^{n^2} e^{-xy} dy \right] dx}_{S_n} + \underbrace{\int_{1/n}^n \sin x \left[ \int_{n^2}^\infty e^{-xy} dy \right] dx}_{R_n}.
 \end{aligned}$$

Mamy

$$|R_n| \leq \int_{1/n}^n \left[ \int_{n^2}^\infty e^{-xy} dy \right] dx = \int_{1/n}^n \frac{e^{-n^2x}}{x} dx \leq ne^{-n} \cdot n \xrightarrow{n} 0.$$

$$\begin{aligned}
 S_n &= \int_0^{n^2} \left[ \int_{1/n}^n e^{-xy} \sin x dx \right] dy = \int_0^{n^2} \left[ -\frac{e^{-xy}(\cos x + y \sin x)}{y^2 + 1} \Big|_{x=1/n}^n \right] dy \\
 &= \int_0^{n^2} \left[ \frac{e^{-y/n} \left( \cos \frac{1}{n} + y \sin \frac{1}{n} \right)}{y^2 + 1} - \frac{e^{-ny} (\cos n + y \sin n)}{y^2 + 1} \right] dy \\
 &= \cos \frac{1}{n} \int_0^{n^2} \frac{1}{y^2 + 1} e^{-y/n} dy + \sin \frac{1}{n} \int_0^{n^2} \frac{y}{y^2 + 1} e^{-y/n} dy \\
 &\quad - \cos n \int_0^{n^2} \frac{1}{y^2 + 1} e^{-ny} dy - \sin n \int_0^{n^2} \frac{y}{y^2 + 1} e^{-ny} dy
 \end{aligned}$$

Suma wartości bezwzględnych dwu ostatnich składników jest mniejsza niż

$$\begin{aligned}
 \int_0^{n^2} \frac{y}{y^2 + 1} e^{-ny} dy + \int_0^{n^2} \frac{1}{y^2 + 1} e^{-ny} dy &\leq \left( \frac{1}{2} + 1 \right) \int_0^{n^2} e^{-ny} dy \\
 &= \frac{3}{2n} [1 - e^{-n^3}] \leq \frac{3}{2n} \xrightarrow{n} 0.
 \end{aligned}$$

Drugi składnik można oszacować z góry następująco:

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{n} \int_0^{n^2} \frac{y}{y^2+1} e^{-y/n} dy &\leq \frac{1}{n} \int_0^{n^2} \frac{y}{y^2+1} dy = \frac{\log(n^4+1)}{2n} \\ &\leq \frac{\log(2n^4)}{2n} = \frac{4 \log n + \log 2}{2n} \xrightarrow{n} 0. \end{aligned}$$

W pierwszym składniku  $\cos \frac{1}{n}$  dąży do 1. Dalej

$$\int_0^{n^2} \frac{1}{y^2+1} e^{-y/n} dy \leq \int_0^{n^2} \frac{1}{y^2+1} dy = \operatorname{arctg} n^2 \leq \frac{\pi}{2}.$$

Z drugiej strony

$$\begin{aligned} \int_0^{n^2} \frac{1}{y^2+1} e^{-y/n} dy &\geq \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{y^2+1} e^{-y/n} dy \geq e^{-1/\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{y^2+1} dy \\ &= e^{-1/\sqrt{n}} \operatorname{arctg} \sqrt{n} \xrightarrow{n} \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Reasumując, otrzymujemy  $S_n \xrightarrow{n} \frac{\pi}{2}$ , zatem  $I_n \xrightarrow{n} \frac{\pi}{2}$ .

## 2 Charakteryzacja funkcji całkowalnych w sensie Riemanna

**Definicja 2.1.** Zbiór  $A \subset \mathbb{R}$  nazywamy zbiorem miary zero, jeśli dla dowolnej liczby  $\varepsilon > 0$  istnieje pokrycie zbioru  $A$  skończoną lub przeliczalną sumą przedziałów otwartych  $(a_n, b_n)$  takich, że

$$\sum_{n=1}^N (b_n - a_n) \leq \varepsilon, \quad N \in \mathbb{N}, \text{ lub } N = \infty.$$

**Przykład.** Zbiory skończone mają miarę zero, bo

$$\{x_1, x_2, \dots, x_N\} \subset \bigcup_{n=1}^N \left(x_n - \frac{\varepsilon}{2N}, x_n + \frac{\varepsilon}{2N}\right).$$

**Uwaga 1.** Możemy przyjąć, że  $N = \infty$ , dołączając w razie potrzeby puste przedziały postaci  $(a_j, b_j)$ , gdzie  $b_j = a_j$ , dla  $j > N$ .

**Lemat 2.2.** *Przeliczalna suma zbiorów miary zero jest zbiorem miary zero.*

*Dowód.* Zakładamy, że zbiory  $A_j$ ,  $j \geq 1$ , mają miarę zero i rozważamy zbiór

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j.$$

Dla liczby  $\varepsilon > 0$  i wskaźnika  $j \geq 1$  istnieją przedziały  $(a_{nj}, b_{nj})$  takie, że

$$A_j \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_{nj}, b_{nj}), \quad \sum_{n=1}^{\infty} (b_{nj} - a_{nj}) \leq \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Zatem

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_{nj}, b_{nj})$$

oraz

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (b_{nj} - a_{nj}) \leq \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \varepsilon.$$

**Uwaga.** Na podstawie lematu można zmienić definicję zbioru miary zero dopuszczając pokrycie przedziałami domkniętymi  $[a_n, b_n]$ .

**Wniosek 2.3.** *Zbiór przeliczalny ma miarę zero. W szczególności zbiór liczb wymiernych  $\mathbb{Q}$  ma miarę zero.*

**Przykład.** Zbiór miary zero może być nieprzeliczalny. Zbiór Cantora  $C$  jest mocy continuum i ma miarę zero. Zbiór Cantora składa się z liczb przedziału  $[0, 1]$ , które w nieskończonym rozwinięciu w systemie trójkowym mają cyfry 0 i 2. Dla ustalonej wartości  $n$  rozważmy liczby  $x < 1$  zbioru Cantora, dla których  $x_{n+1} = 0$ . Wtedy

$$x \in [0.x_1 \dots x_n, 0.x_1 \dots x_n 1].$$

Długość przedziału wynosi  $3^{-n-1}$ . Mamy  $2^n$  takich przedziałów, więc opisane wyżej liczby są zawarte w skończonej sumie przedziałów o sumarycznej długości  $2^n 3^{-n-1}$ . Liczby zbioru Cantora, dla których  $x_{n+1} = 2$  można uzyskać z liczb, dla których  $x_{n+1} = 0$  poprzez dodanie liczby  $0.0 \dots 02 = 2 \cdot 3^{-n-1}$ . Zatem zbiór  $C$  jest zawarty w sumie przedziałów o sumarycznej długości  $2^{n+1} 3^{-n-1}$ . Stąd wynika, że zbiór ten jest miary zero.  $\square$

**Twierdzenie 2.4.** *Ograniczona funkcja  $f(x)$  na przedziale  $[a, b]$  jest całkowalna w sensie Riemanna wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór punktów nieciągłości funkcji  $f(x)$  ma miarę zero.*

*Dowód.* Dla liczby  $\delta > 0$  i punktu  $a \leq x \leq b$  określmy wielkość

$$\omega_\delta(f, x) = \sup_{\substack{|x'-x| < \delta \\ |x''-x| < \delta}} |f(x') - f(x'')| = \sup_{|x'-x| < \delta} f(x') - \inf_{|x'-x| < \delta} f(x').$$

Niech

$$\omega(f, x) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega_\delta(f, x) = \inf_{\delta > 0} \omega_\delta(f, x).$$

Liczbę  $\omega(f, x)$  nazywamy oscylacją funkcji  $f$  w punkcie  $x$ .

**Lemat 2.5.** *Ograniczona funkcja  $f$  na przedziale jest ciągła w punkcie  $x$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\omega(f, x) = 0$ .*

*Dowód.* Załóżmy, że  $f$  jest ciągła w  $x$ . Wtedy dla liczby  $\varepsilon > 0$  istnieje  $\delta > 0$  taka, że za warunku  $|x' - x| < \delta$  wynika  $|f(x') - f(x)| < \varepsilon/2$ . Wtedy dla  $|x' - x| < \delta$ ,  $|x'' - x| < \delta$  otrzymujemy

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - f(x)| + |f(x'') - f(x)| < \varepsilon.$$

Stąd

$$\omega(f, x) \leq \omega_\delta(f, x) \leq \varepsilon,$$

czyli  $\omega(f, x) = 0$ .

Jeśli  $\omega(f, x) = 0$  i  $\varepsilon > 0$ , to  $\omega_\delta(f, x) < \varepsilon$  dla pewnej liczby  $\delta > 0$ . Wtedy dla  $|x' - x| < \delta$  otrzymujemy  $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$ . To oznacza, że funkcja  $f$  jest ciągła w punkcie  $x$ .  $\square$

Wracamy do dowodu twierdzenia. Załóżmy, że funkcja  $f$  jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale  $[a, b]$ . Niech  $X$  oznacza zbiór punktów nieciągłości funkcji  $f$ , czyli

$$X = \{x : \omega(f, x) > 0\}.$$

Oznaczmy

$$X_n = \left\{ x : \omega(f, x) > \frac{1}{n} \right\}.$$

Wtedy

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n.$$

Wystarczy pokazać, że  $X_n$  jest miary zero dla dowolnej liczby  $n$ . Z całkowalności funkcji  $f$  istnieje podział  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$  przedziału  $[a, b]$  taki, że

$$\sum_{i=1}^N (M_i - m_i) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{n},$$

gdzie  $m_i$  i  $M_i$  oznaczają kresy dolny i górny funkcji  $f$  na przedziale  $[x_{i-1}, x_i]$ . Podzielimy liczby  $1, 2, \dots, N$  na dwa podzbiory  $A$  i  $B$ . Do  $A$  zaliczymy, te wskaźniki  $i$ , dla których  $X_n$  ma niepusty przekrój z przedziałem  $(x_{i-1}, x_i)$ . W związku z tym  $B$  składa się z tych liczb  $i$ , dla których  $X_n \cap (x_{i-1}, x_i) = \emptyset$ . Wtedy

$$X_n \subseteq \bigcup_{i \in A} [x_{i-1}, x_i] \cup \{x_0, x_1, \dots, x_N\}. \quad (2.1)$$

Zauważmy, że jeśli  $i \in A$ , to  $M_i - m_i \geq \frac{1}{n}$ . Stąd wynika, że

$$\frac{1}{n} \sum_{i \in A} \Delta x_i \leq \sum_{i \in A} (M_i - m_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^N (M_i - m_i) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{n},$$

czyli

$$\sum_{i \in A} \Delta x_i < \varepsilon.$$

Na podstawie (2.1) wnioskujemy, że  $X_n$  jest miary zero.

Odwrotnie, załóżmy, że zbiór  $X$  jest miary zero. Dla liczby  $\varepsilon > 0$  istnieją przedziały  $(a_n, b_n)$  takie, że

$$X \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n), \quad \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) < \varepsilon.$$

Dla  $x \in [a, b] \setminus X$  mamy  $\omega(f, x) = 0$ . Zatem istnieje liczba  $\delta_x > 0$  taka, że  $\omega_{\delta_x}(f, x) < \varepsilon$ . To oznacza, że jeśli  $V_x = (x - \delta_x, x + \delta_x)$ , to  $M_{V_x}(f) - m_{V_x}(f) < \varepsilon$ . Mamy

$$[a, b] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n) \cup ([a, b] \setminus X) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n) \cup \bigcup_{x \in [a, b] \setminus X} V_x.$$

**Lemat 2.6.** *Jeśli przedział  $[a, b]$  jest zawarty w rodzinie przedziałów  $(c_\lambda, d_\lambda)$ ,  $\lambda \in \Lambda$ , to*

$$[a, b] \subseteq (c_{\lambda_1}, d_{\lambda_1}) \cup (c_{\lambda_2}, d_{\lambda_2}) \cup \dots \cup (c_{\lambda_K}, d_{\lambda_K})$$

dla pewnego skończonego podzbioru  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K$ .

*Dowód.* Dla ustalonego parametru  $\lambda$  istnieją dwa ciągi  $c_{\lambda,n}$  i  $d_{\lambda,n}$  o wyrazach wymiernych spełniające

$$c_\lambda \underset{n}{\nearrow} c_{\lambda,n} \leq d_{\lambda,n} \underset{n}{\searrow} d_\lambda.$$

Wtedy

$$[a, b] \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (c_\lambda, d_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bigcup_{n=1}^{\infty} (c_{\lambda,n}, d_{\lambda,n}).$$

Ta rodzina przedziałów otwartych jest przeliczalna, zatem

$$[a, b] \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} (c_{\lambda_k, n_k}, d_{\lambda_k, n_k}) \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} (c_{\lambda_k}, d_{\lambda_k}),$$

dla pewnego ciągu parametrów  $\lambda_k$  i pewnego ciągu liczb naturalnych  $n_k$ . Załóżmy, nie wprost, że

$$[a, b] \not\subseteq \bigcup_{k=1}^K (c_{\lambda_k}, d_{\lambda_k})$$

dla dowolnej wartości  $K$ . Tzn. istnieje punkt  $x_K \in [a, b]$  leżący poza  $(c_{\lambda_k}, d_{\lambda_k})$  dla  $k = 1, 2, \dots, K$ . Ciąg  $x_K$  zawiera podciąg zbieżny do punktu  $z \in [a, b]$  z twierdzenia Bolzano-Weierstrassa. Oznaczmy symbolem  $x_0$  granicę tego podciągu. Wtedy  $x_0 \in (c_{\lambda_L}, d_{\lambda_L})$ , dla pewnego  $L$ . Ale w przedziale  $(c_{\lambda_L}, d_{\lambda_L})$  nie ma żadnego z punktów  $x_K$  dla  $K \geq L$ . Zatem  $x_0$  nie leży w  $(c_{\lambda_L}, d_{\lambda_L})$ , co prowadzi do sprzeczności.  $\square$

Z lematu otrzymujemy

$$[a, b] \subset \bigcup_{n=1}^N (a_n, b_n) \cup \bigcup_{k=1}^K V_{x_k}.$$

Niech  $P$  będzie podziałem przedziału  $[a, b]$  takim, że każdy jego domknięty podprzedział jest zawarty w jednym z przedziałów  $(a_n, b_n)$  dla  $n = 1, 2, \dots, N$  lub  $V_{x_k}$  dla  $k = 1, 2, \dots, K$ . Wtedy

$$U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon(b - a) + 2M\varepsilon,$$

gdzie  $M = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|$ . Ostatnia nierówność wynika z faktu, że jeśli przedział podziału jest zawarty w przedziale postaci  $(a_n, b_n)$ , to rozpiętość wartości funkcji na tym przedziale jest nie większa niż  $2M$ , a suma długości takich przedziałów jest mniejsza niż  $\varepsilon$ . Z kolei jeśli przedział podziału jest zawarty w pewnym  $V_{x_k}$ , to oscylacja funkcji  $f$  na tym przedziale jest mniejsza niż  $\varepsilon$  a suma długości takich (wszystkich) przedziałów nie przekracza  $b - a$ .  $\square$

### 3 Całka Riemanna-Stieltjesa

Niech  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją rosnącą (niekoniecznie ściśle rosnącą) spełniającą  $\alpha(a) < \alpha(b)$ . Można traktować przedział  $[a, b]$  jako pręt wykonany z niejednorodnego materiału, dla którego wielkość  $\alpha(x)$  oznacza masę fragmentu pręta od punktu  $a$  do punktu  $x$ . Dla podziału  $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  przedziału  $[a, b]$  określamy

$$\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Dalej dla ograniczonej funkcji  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definiujemy sumy górne i dolne wzorami

$$U(\mathcal{P}, f, \alpha) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta\alpha_i, \quad L(\mathcal{P}, f, \alpha) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta\alpha_i,$$

gdzie

$$M_i = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x), \quad m_i = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x).$$

Podobnie jak przy zwykłej całce Riemanna określamy całki górne i dolne

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \sup_{\mathcal{P}} L(\mathcal{P}, f, \alpha), \quad \int_a^{\bar{b}} f(x) d\alpha(x) = \inf_{\mathcal{P}} U(\mathcal{P}, f, \alpha).$$

Jeśli  $\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \int_a^{\bar{b}} f(x) d\alpha(x)$ , to mówimy, że funkcja  $f$  jest całkowna

względem funkcji  $\alpha$  i wspólną wartość oznaczamy symbolem  $\int_a^b f(x) d\alpha(x)$ .

Całka nosi nazwę całki Riemanna-Stieltjesa. Całkowność zapisujemy w skrócie poprzez  $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ . Dla  $\alpha(x) = x$  otrzymujemy zwykłe pojęcie całki Riemanna.

#### Przykłady

$$(a) \alpha : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \alpha(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

$$(b) \alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \alpha(x) = x^2.$$



W przykładzie (a) rozważmy podział

$$\mathcal{P}_n = \left\{ 0, 1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}, 2 \right\}.$$

Wtedy

$$L(\mathcal{P}_n, f, \alpha) = \inf_{1 - \frac{1}{n} \leq x \leq 1 + \frac{1}{n}} f(x), \quad U(\mathcal{P}_n, f, \alpha) = \sup_{1 - \frac{1}{n} \leq x \leq 1 + \frac{1}{n}} f(x).$$

Jeśli funkcja  $f(x)$  jest ciągła w punkcie 1, to

$$L(\mathcal{P}_n, f, \alpha) \xrightarrow{n} f(1), \quad U(\mathcal{P}_n, f, \alpha) \xrightarrow{n} f(1).$$

Niech  $\mathcal{P}^*$  będzie rozdrobnieniem podziału  $\mathcal{P}$ , tzn.  $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}^*$ . Wtedy

$$L(\mathcal{P}, f, \alpha) \leq L(\mathcal{P}^*, f, \alpha), \quad U(\mathcal{P}^*, f, \alpha) \leq U(\mathcal{P}, f, \alpha).$$

Uzasadnienie jest identyczne jak dla zwykłej całki Riemanna. Z tych nierówności wynika, że dla dowolnych dwu podziałów  $\mathcal{P}_1$  i  $\mathcal{P}_2$  mamy

$$L(\mathcal{P}_1, f, \alpha) \leq U(\mathcal{P}_2, f, \alpha),$$

co pociąga

$$\int_{\underline{a}}^b f(x) d\alpha(x) \leq \int_a^{\bar{b}} f(x) d\alpha(x).$$

Podobne rozumowanie jak dla zwykłej całki Riemanna prowadzi do następnego twierdzenia.

**Twierdzenie 3.1.** *Warunek  $f \in \mathcal{R}(\alpha)$  jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej dodatniej liczby  $\varepsilon$  istnieje podział  $\mathcal{P}$  przedziału  $[a, b]$  taki, że*

$$U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) < \varepsilon.$$

**Twierdzenie 3.2.** *Jeśli dla podziału  $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  i liczby  $\varepsilon > 0$  spełniony jest warunek  $U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) < \varepsilon$ , to dla dowolnego wyboru punktów  $s_i, t_i$  z przedziału  $[x_{i-1}, x_i]$  mamy*

$$\sum_{i=1}^n |f(s_i) - f(t_i)| \Delta\alpha_i < \varepsilon.$$

Ponadto jeśli  $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ , to

$$\left| \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta\alpha_i - \int_a^b f(x) d\alpha(x) \right| < \varepsilon.$$

*Dowód.* Mamy  $|f(s_i) - f(t_i)| \leq M_i - m_i$ . Zatem

$$\sum_{i=1}^n |f(s_i) - f(t_i)| \Delta \alpha_i \leq \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta \alpha_i = U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) < \varepsilon.$$

Jeśli  $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ , to

$$L(\mathcal{P}, f, \alpha) \leq \int_a^b f(x) d\alpha(x) \leq U(\mathcal{P}, f, \alpha)$$

oraz

$$L(\mathcal{P}, f, \alpha) \leq \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta \alpha_i \leq U(\mathcal{P}, f, \alpha)$$

dla dowolnego wyboru punktów  $t_i$  z  $[x_{i-1}, x_i]$ . Zatem

$$\left| \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta \alpha_i - \int_a^b f(x) d\alpha(x) \right| \leq U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) < \varepsilon.$$

□

**Twierdzenie 3.3.** *Jeśli  $f(x)$  jest funkcją ciągłą na  $[a, b]$ , to  $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ .*

*Dowód.* Przy dowodzie skorzystamy z Twierdzenia 3.1. Ustalmy liczbę  $\varepsilon > 0$ . Dla liczby  $\eta > 0$  istnieje liczba  $\delta > 0$ , taka, że

$$|s - t| < \delta \implies |f(s) - f(t)| < \eta.$$

Niech  $\mathcal{P}$  będzie podziałem przedziału  $[a, b]$  na  $n$  równych części tak, aby  $\frac{b-a}{n} < \delta$ . Wtedy  $M_i - m_i < \eta$  dla  $i = 1, 2, \dots, n$ . Stąd

$$\begin{aligned} U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) &= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta \alpha_i < \eta \sum_{i=1}^n \Delta \alpha_i \\ &= \eta \sum_{i=1}^n [\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] = \eta[\alpha(b) - \alpha(a)]. \end{aligned}$$

Wystarczy teraz przyjąć  $\eta = \frac{\varepsilon}{\alpha(b) - \alpha(a)}$ . □

**Twierdzenie 3.4.** *Jeśli  $\alpha(x)$  jest ciągła na przedziale  $[a, b]$ , natomiast funkcja  $f(x)$  jest monotoniczna na  $[a, b]$ , to  $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ .*

*Dowód.* Rozpatrzmy przypadek funkcji rosnącej  $f(x)$ . Dla ustalonej liczby naturalnej  $n$  rozważmy wielkości

$$\alpha(a) < \alpha(a) + i \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n} < \alpha(b), \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Z własności Darboux istnieją punkty  $x_i \in (a, b)$  takie, że

$$\alpha(x_i) = \alpha(a) + i \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n}, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Przyjmijmy  $x_0 = a$  i  $x_n = b$ . Wtedy  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$  oraz

$$\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}) = \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n}.$$

Dalej dla  $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) &= \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n} \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \\ &= \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n} \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})] = \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n} [f(b) - f(a)]. \end{aligned}$$

Jeśli  $n$  jest dostatecznie duże, to prawa strona jest mniejsza niż z góry ustalona liczba  $\varepsilon > 0$ .  $\square$

Twierdzenie 3.3 można uogólnić dopuszczając skończenie wiele punktów nieciągłości całkowanej funkcji.

**Twierdzenie 3.5.** *Niech  $f(x)$  będzie funkcją ograniczoną na  $[a, b]$  mającą skończenie wiele punktów nieciągłości. Załóżmy, że funkcja  $\alpha(x)$  jest ciągła w każdym punkcie nieciągłości funkcji  $f(x)$ . Wtedy  $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ .*

*Dowód.* Ustalmy  $\varepsilon > 0$ . Oznaczmy  $M = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|$ . Niech  $k$  oznacza liczbę punktów nieciągłości funkcji  $f(x)$ . Każdy taki punkt nieciągłości leży w przedziale  $[u_j, v_j] \subset [a, b]$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  takim, że

$$\alpha(v_j) - \alpha(u_j) < \frac{\varepsilon}{k}, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Można przyjąć, ewentualnie zwiększając  $u_j$  i zmniejszając  $v_j$ , że przedziały  $[u_j, v_j]$  są rozłączne, tzn.

$$u_1 < v_1 < u_2 < v_2 < \dots < u_k < v_k.$$

Ponadto możemy przyjąć (w razie potrzeby poszerzając przedziały), że każdy punkt nieciągłości funkcji  $f(x)$  leżący w  $(a, b)$  leży w  $(u_j, v_j)$  dla pewnej wartości  $j$ . Punkty  $a$  i  $b$  mogą być też punktami nieciągłości funkcji  $f(x)$ . Wtedy  $a$  leży w  $[a, v_1)$  oraz  $b$  leży w  $(u_k, b]$ .

Usuńmy przedziały  $(u_j, v_j)$  z  $[a, b]$ . Pozostały zbiór

$$K = [a, b] \setminus \bigcup_{j=1}^k (u_j, v_j)$$

składa się ze skończonej liczby domkniętych przedziałów. Funkcja  $f(x)$  jest jednostajnie ciągła na zbiorze  $K$ . Istnieje więc liczba  $\delta > 0$  taka, że jeśli  $s, t \in K$  oraz  $|s - t| < \delta$ , to  $|f(s) - f(t)| < \varepsilon$ .

Niech  $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  będzie podziałem przedziału  $[a, b]$  o własnościach:

- (a)  $\mathcal{P}$  zawiera wszystkie punktu  $u_j$  i  $v_j$ .
- (a)  $\mathcal{P}$  nie zawiera punktów z  $(u_j, v_j)$  dla żadnego  $j$ .
- (c) Jeśli  $x_{i-1}$  jest różny od  $u_j$  (czyli  $(x_{i-1}, x_i)$  nie jest postaci  $(u_j, v_j)$ ), to  $x_i - x_{i-1} < \delta$ .

To oznacza, że przedziały podziału  $\mathcal{P}$  złożone są z przedziałów  $[u_j, v_j]$  oraz z przedziałów pomiędzy nimi, o długości mniejszej niż  $\delta$ .

Zauważmy, że  $M_i - m_i \leq 2M$  dla każdego  $i = 1, 2, \dots, n$  oraz  $M_i - m_i \leq \varepsilon$  jeśli  $x_{i-1}$  jest różny od  $u_j$ . Niech  $A$  oznacza zbiór indeksów  $i$ , dla których  $x_{i-1}$  jest różny od  $u_j$ . Zbiór pozostałych indeksów oznaczymy symbolem  $B$ . Wtedy

$$\begin{aligned} U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) &= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta\alpha_i \\ &= \sum_{i \in A} (M_i - m_i) \Delta\alpha_i + \sum_{i \in B} (M_i - m_i) \Delta\alpha_i \leq \varepsilon \sum_{i \in A} \Delta\alpha_i + 2M \sum_{i \in B} \Delta\alpha_i \\ &\leq \varepsilon \sum_{i=1}^n \Delta\alpha_i + 2Mk \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon[\alpha(b) - \alpha(a) + 2M]. \end{aligned}$$

□

**Uwaga.** Założenia w twierdzeniu są istotne. Niech

$$f(x) = \alpha(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Rozważmy dowolny podział  $\mathcal{P}$  przedziału  $[0, 2]$ . Niech  $x_j$  będzie punktem podziału o najmniejszym wskaźniku takim, że  $x_j \geq 1$ . Wtedy  $x_{j-1} < 1$ . Funkcja  $f(x)$  jest stała na każdym przedziale  $[x_{i-1}, x_i]$  dla  $i \neq j$ . Zatem

$$U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta\alpha_i = (M_j - m_j) [\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})] = 1.$$

To oznacza, że  $f \notin \mathcal{R}(\alpha)$ , czyli  $\alpha \notin \mathcal{R}(f)$ .

Określmy funkcję

$$g(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Funkcja  $g(x)$  jest równa funkcji  $f(x)$  we wszystkich punktach  $x \neq 1$ . Mamy  $g \in \mathcal{R}(\alpha)$ . Rzeczywiście, niech  $\mathcal{P}$  będzie podziałem zawierającym punkt  $1 = x_j$ . Funkcja  $\alpha(x)$  jest stała na każdym przedziale  $[x_{i-1}, x_i]$  dla  $i \neq j$ . Tzn.  $\Delta\alpha_i = 0$  dla  $i \neq j$ . Jedynie na przedziale  $[x_{j-1}, x_j] = [x_{j-1}, 1]$  funkcja  $\alpha(x)$  nie jest stała. Ale  $M_j - m_j = 0$ , bo funkcja  $g(x)$  stała na przedziale  $[x_{j-1}, 1]$ . Zatem

$$U(\mathcal{P}, g, \alpha) - L(\mathcal{P}, g, \alpha) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta\alpha_i = 0.$$

Wszystkie twierdzenia dotyczące arytmetycznych własności całki Riemanna są prawdziwe również dla całki Riemanna-Stieltjesa, bez zmiany dowodów. Ponadto

$$\left| \int_a^b f(x) d\alpha(x) \right| \leq M[\alpha(b) - \alpha(a)], \quad \text{gdzie } M = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|. \quad (3.1)$$

Rzeczywiście

$$\begin{aligned} U(\mathcal{P}, f, \alpha) &= \sum_{i=1}^n M_i \Delta\alpha_i \leq M \sum_{i=1}^n \Delta\alpha_i = M[\alpha(b) - \alpha(a)], \\ L(\mathcal{P}, f, \alpha) &= \sum_{i=1}^n m_i \Delta\alpha_i \geq -M \sum_{i=1}^n \Delta\alpha_i = -M[\alpha(b) - \alpha(a)]. \end{aligned}$$

Ponadto jeśli  $f \in \mathcal{R}(\alpha_1) \cap \mathcal{R}(\alpha_2)$ , to  $f \in \mathcal{R}(\alpha_1 + \alpha_2)$  oraz

$$\int_a^b f(x) d(\alpha_1 + \alpha_2)(x) = \int_a^b f(x) d\alpha_1(x) + \int_a^b f(x) d\alpha_2(x). \quad (3.2)$$

Istotnie teza i wzór wynikają z równości

$$\begin{aligned} U(\mathcal{P}, f, \alpha_1 + \alpha_2) &= U(\mathcal{P}, f, \alpha_1) + U(\mathcal{P}, f, \alpha_2), \\ L(\mathcal{P}, f, \alpha_1 + \alpha_2) &= L(\mathcal{P}, f, \alpha_1) + L(\mathcal{P}, f, \alpha_2). \end{aligned}$$

Podobnie można uzasadnić, że jeśli  $f \in \mathcal{R}(\alpha)$  i  $t > 0$ , to  $f \in \mathcal{R}(t\alpha)$  oraz

$$\int_a^b f(x)d(t\alpha)(x) = t \int_a^b f(x)d\alpha(x).$$

**Twierdzenie 3.6.** *Jeśli  $a < c < b$  oraz funkcja  $f(x)$  jest ograniczona i ciągła w punkcie  $c$ , to dla*

$$\alpha_c(x) = \begin{cases} 0 & x \leq c, \\ 1 & x > c, \end{cases}$$

mamy

$$\int_a^b f(x)d\alpha_c(x) = f(c).$$

*Dowód.* Rozważmy podział

$$\mathcal{P}_n = \left\{ a, c, c + \frac{1}{n}, b \right\}.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} U(\mathcal{P}_n, f, \alpha_c) &= \sup_{c \leq x \leq c + \frac{1}{n}} f(x) \xrightarrow{n} f(c), \\ L(\mathcal{P}_n, f, \alpha_c) &= \inf_{c \leq x \leq c + \frac{1}{n}} f(x) \xrightarrow{n} f(c). \end{aligned}$$

□

**Twierdzenie 3.7.** *Niech  $d_n > 0$  i  $\sum_{n=1}^{\infty} d_n < \infty$ , oraz  $c_n$  będzie ciągiem różnych punktów przedziału  $(a, b)$ . Dla funkcji*

$$\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \alpha_{c_n}(x)$$

*i funkcji  $f(x)$  ciągłej na przedziale  $[a, b]$  mamy*

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n f(c_n).$$

*Dowód.* Szereg określający funkcję  $\alpha(x)$  jest zbieżny w każdym punkcie i  $\alpha(x)$  jest funkcją rosnącą. Ponadto  $\alpha(a) = 0$  i  $\alpha(b) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n$ . Dla ustalonej liczby  $\varepsilon > 0$  wybierzmy  $N$  tak duże, aby

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} d_n < \varepsilon.$$

Niech

$$\alpha_1(x) = \sum_{n=1}^N d_n \alpha_{c_n}(x), \quad \alpha_2(x) = \sum_{n=N+1}^{\infty} d_n \alpha_{c_n}(x).$$

Funkcje  $\alpha_1(x)$  i  $\alpha_2(x)$  są rosnące oraz  $\alpha(x) = \alpha_1(x) + \alpha_2(x)$ . Na podstawie Twierdzenia 3.6 i wzoru (3.2) otrzymujemy

$$\int_a^b f(x) d\alpha_1(x) = \sum_{n=1}^N d_n \int_a^b f(x) d\alpha_{c_n}(x) = \sum_{n=1}^N d_n f(c_n).$$

Ponieważ

$$\alpha_2(b) - \alpha_2(a) = \sum_{n=N+1}^{\infty} d_n < \varepsilon,$$

to

$$\left| \int_a^b f(x) d\alpha_2(x) \right| \leq M\varepsilon, \quad M = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|.$$

W rezultacie dostajemy

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) d\alpha(x) - \sum_{n=1}^N d_n f(c_n) \right| &= \left| \int_a^b f(x) d\alpha(x) - \int_a^b f(x) d\alpha_1(x) \right| \\ &= \left| \int_a^b f(x) d\alpha_2(x) \right| \leq M\varepsilon. \end{aligned}$$

Gdy  $N \rightarrow \infty$ , to

$$\left| \int_a^b f(x) d\alpha(x) - \sum_{n=1}^{\infty} d_n f(c_n) \right| \leq M\varepsilon.$$

□

**Uwaga.** Dla  $a = 0$ ,  $b = 1$  oraz  $d_n = 2^{-n}$  niech ciąg  $c_n$  składa się ze wszystkich liczb wymiernych z przedziału  $(0, 1)$ . Można pokazać, że  $\alpha(x)$  jest nieciągła w każdym punkcie wymiernym przedziału  $(0, 1)$ . **Zadanie** Udowodnić, że ograniczona funkcja  $f(x)$  na przedziale  $[0, 1]$  jest całkowalna względem funkcji  $\alpha(x)$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $f(x)$  jest ciągła w każdym punkcie wymiernym przedziału.

W pewnych przypadkach całkę Riemanna-Stieltjesa można zamienić na całkę Riemanna.

**Twierdzenie 3.8.** *Załóżmy, że funkcja  $\alpha(x)$  jest różniczkowalna w przedziale  $[a, b]$  oraz funkcja  $\alpha'(x)$  jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale  $[a, b]$ , (np.  $\alpha'(x)$  jest ciągła). Wtedy warunki  $f \in \mathcal{R}(\alpha)$  oraz  $f\alpha' \in \mathcal{R}$  są równoważne. Ponadto*

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\alpha'(x) dx.$$

*Dowód.* Z założenia dla liczby  $\varepsilon > 0$  istnieje podział  $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  przedziału  $[a, b]$  taki, że

$$U(\mathcal{P}, \alpha') - L(\mathcal{P}, \alpha') < \varepsilon. \quad (3.3)$$

Z twierdzenia Lagrange'a otrzymujemy

$$\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}) = \alpha'(t_i)\Delta x_i,$$

dla pewnych punktów  $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Dla dowolnego wyboru punktów  $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$  dostajemy

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |\alpha'(t_i) - \alpha'(s_i)| \Delta x_i &\leq \sum_{i=1}^n [M_i(\alpha') - m_i(\alpha')] \Delta x_i \\ &= U(\mathcal{P}, \alpha') - L(\mathcal{P}, \alpha') < \varepsilon. \end{aligned}$$

Oznaczmy  $M = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|$ . Wtedy

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n f(s_i) \Delta\alpha_i - \sum_{i=1}^n f(s_i) \alpha'(s_i) \Delta x_i \right| &= \left| \sum_{i=1}^n f(s_i) \alpha'(t_i) \Delta x_i - \sum_{i=1}^n f(s_i) \alpha'(s_i) \Delta x_i \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |f(s_i)| |\alpha'(t_i) - \alpha'(s_i)| \Delta x_i \leq M \sum_{i=1}^n |\alpha'(t_i) - \alpha'(s_i)| \Delta x_i \leq M\varepsilon. \end{aligned}$$



Zatem

$$\sum_{i=1}^n f(s_i) \Delta \alpha_i \leq \sum_{i=1}^n f(s_i) \alpha'(s_i) \Delta x_i + M\varepsilon \leq U(\mathcal{P}, f\alpha') + M\varepsilon.$$

Obliczamy kres górny lewej strony względem punktów  $s_i$  z  $[x_{i-1}, x_i]$  i otrzymujemy

$$U(\mathcal{P}, f, \alpha) \leq U(\mathcal{P}, f\alpha') + M\varepsilon.$$

Podobne rozumowanie daje nierówność

$$U(\mathcal{P}, f\alpha') \leq U(\mathcal{P}, f, \alpha) + M\varepsilon.$$

Dostajemy więc

$$|U(\mathcal{P}, f, \alpha) - U(\mathcal{P}, f\alpha')| \leq M\varepsilon. \quad (3.4)$$

Warunek (3.3) pozostaje spełniony, gdy podział  $\mathcal{P}$  zastąpimy rozdrobieniem, czyli podziałem  $\mathcal{P}' \supset \mathcal{P}$ . Zatem warunek (3.4) będzie spełniony dla  $\mathcal{P}' \supset \mathcal{P}$ . Zatem

$$\left| \int_a^{\bar{b}} f(x) d\alpha(x) - \int_a^{\bar{b}} f(x) \alpha'(x) dx \right| \leq M\varepsilon.$$

Ponieważ  $\varepsilon$  jest dowolną liczbą dodatnią, to

$$\int_a^{\bar{b}} f(x) d\alpha(x) = \int_a^{\bar{b}} f(x) \alpha'(x) dx.$$

Podobnie otrzymujemy

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \int_a^b f(x) \alpha'(x) dx.$$

□

**Przykład.** Rozważmy pręt o długości 1. Moment bezwładności pręta przy obrocie wokół osi prostopadłej do pręta, przechodzącej przez punkt początkowy pręta ( $x = 0$ ) wynosi

$$\int_0^1 x^2 dm(x),$$

gdzie  $m(x)$  oznacza masę fragmentu pręta odpowiadającego  $[0, x]$ , Jeśli  $m'(x) = \varrho(x)$ , to

$$\int_0^1 x^2 dm(x) = \int_0^1 x^2 \varrho(x) dx.$$

Jeśli całkowita masa pręta jest umieszczona punktach  $x_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , to

$$\int_0^1 x^2 dm(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 m_n,$$

gdzie  $m_n$  oznacza masę umieszczoną w punkcie  $x_n$ .

## 4 Funkcje wielu zmiennych

Będziemy rozważać funkcje określone na podzbiórze  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  o wartościach rzeczywistych. Większość teorii dotyczy  $n = 2$  lub  $n = 3$ . Punkty w  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^3$  lub  $\mathbb{R}^n$  będziemy oznaczać odpowiednio przez

$$(x, y), \quad (x, y, z), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

**Przykłady.**

$$f(x, y) = xy$$

$$f(x, y, z) = xyz$$

$$f(x, y, z) = \frac{c}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

pole prostokąta o bokach  $x, y > 0$ ,

objętość prostopadłościanu,

potencjał grawitacyjny,  $(x, y, z) \neq 0$ .W przestrzeni  $\mathbb{R}^n$  rozważamy metrykę

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2} = \|x - y\|, \quad \text{gdzie } \|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}.$$

**Twierdzenie 4.1.**  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .*Dowód.* Możemy założyć, że  $x, y \neq 0$ , tzn.  $\|x\|, \|y\| > 0$ . Mamy

$$\|x + y\|^2 = \sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2 + \sum_{k=1}^n y_k^2 + 2 \sum_{k=1}^n x_k y_k,$$

$$(\|x\| + \|y\|)^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \|y\| = \sum_{k=1}^n x_k^2 + \sum_{k=1}^n y_k^2 + 2\|x\| \|y\|.$$

Wystarczy udowodnić, że

$$\sum_{k=1}^n x_k y_k \leq \|x\| \|y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}. \quad (4.1)$$

Skorzystamy z nierówności <sup>5</sup>

$$2ab \leq \lambda a^2 + \frac{b^2}{\lambda} \quad \lambda > 0.$$

Wtedy

$$2 \sum_{k=1}^n x_k y_k \leq \lambda \sum_{k=1}^n x_k^2 + \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^n y_k^2 = \lambda \|x\|^2 + \frac{1}{\lambda} \|y\|^2.$$

Przyjmijmy  $\lambda = \frac{\|y\|}{\|x\|}$ . Wtedy prawa strona ostatniej nierówności będzie równa  $2\|x\| \|y\|$ . □


---

<sup>5</sup>Po przekształceniu  $\left(\sqrt{\lambda}a - \frac{b}{\sqrt{\lambda}}\right)^2 \geq 0$

**Uwaga.** Można sprawdzić, analizując dowód, kiedy w (4.1) otrzymujemy równość. Obie strony zerują się, gdy jeden z wektorów  $x$  lub  $y$  jest zerowy. Dla niezerowych wektorów dla pewnej dodatniej liczby  $\lambda$  mamy  $\sqrt{\lambda}x_i = \frac{y_i}{\sqrt{\lambda}}$ , tzn. wektory  $x$  i  $y$  są równoległe i mają ten sam zwrot.

**Wniosek 4.2** (Nierówność trójkąta).

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

*Dowód.*

$$d(x, z) = \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z).$$

□

**Uwaga.** Z wniosku wynika, że

$$|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y). \quad (4.2)$$

Rzeczywiście, mamy

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \quad d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z).$$

Zatem

$$d(x, z) - d(y, z) \leq d(x, y), \quad d(y, z) - d(x, z) \leq d(x, y).$$

Stąd otrzymujemy (4.2).

**Definicja 4.3.** Podzbiór  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  nazywamy otwartym, jeśli dla każdego punktu  $(x_0, y_0)$  w  $A$  można znaleźć liczbę  $\delta > 0$  taką, że jeśli  $d((x, y), (x_0, y_0)) < \delta$ , to  $(x, y)$  leży w  $A$ . Warunek  $d((x, y), (x_0, y_0)) < \delta$ , oznacza, że

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2.$$

Czyli koło otwarte o środku w  $(x_0, y_0)$  i promieniu  $\delta$  leży w  $A$ .

**Przykład.** Zbiory  $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ ,  $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 > 1\}$  są otwarte. Rzeczywiście, jeśli  $x_0^2 + y_0^2 < 1$ , to możemy przyjąć  $\delta = 1 - \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ . Dla  $x_0^2 + y_0^2 > 1$  przyjmujemy  $\delta = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} - 1$ .

## 4.1 Granica funkcji wielu zmiennych

Przypuśćmy, że funkcja  $f(x, y)$  jest określona w kole otwartym o środku w  $(x_0, y_0)$ , być może z wyłączeniem punktu  $(x_0, y_0)$ . Mówimy, że funkcja  $f(x, y)$  ma granicę  $L$  w punkcie  $(x_0, y_0)$  jeśli wartości  $f(x, y)$  leżą blisko wartości  $L$ , gdy punkt  $(x, y)$  leży blisko  $(x_0, y_0)$ , ale  $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ . Tzn.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \{ d((x, y), (x_0, y_0)) < \delta \implies |f(x, y) - L| < \varepsilon \}$$

Piszemy wtedy  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L$ .

**Przykłady.**

(a)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} x = x_0, \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} y = y_0$ .

(b)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ . Oznaczmy  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ . Wtedy  $f(x, 0) = 1$ , oraz  $f(0, y) = -1$ . Zatem granica nie istnieje.

(c) Niech  $g(x, y) = [f(x, y)]^2$ , dla  $f(x, y)$  z przykładu (b). Wtedy  $g(x, 0) = g(0, y) = 1$ , ale  $g(x, x) = 0$ . Stąd granica  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y)$  nie istnieje.

(d)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ . Mamy

$$|x^3 + y^3| \leq |x|x^2 + |y|y^2 \leq (|x| + |y|)(x^2 + y^2).$$

Zatem

$$\frac{|x^3 + y^3|}{x^2 + y^2} \leq |x| + |y| \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0.$$

Można też przeprowadzić rozumowanie z użyciem współrzędnych biegunowych. Dla  $x = r \cos \theta$  i  $y = r \sin \theta$  warunek  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  jest równoważny warunkowi  $r \rightarrow 0^+$ , bo  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Wtedy

$$\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = \frac{r^3(\cos^3 \theta + \sin^3 \theta)}{r^2} = r(\cos^3 \theta + \sin^3 \theta) \xrightarrow{r \rightarrow 0^+} 0,$$

bo  $|\cos^3 \theta + \sin^3 \theta| \leq 2$ .

**Zadanie.** Wskazać funkcję  $f(x, y)$  taką, że  $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(ta, tb) = 0$  dla dowolnego wektora  $(a, b) \neq (0, 0)$ , ale granica funkcji  $f(x, y)$  w punkcie  $(0, 0)$  nie istnieje.

**Uwaga.** Zapis stosowany w niektórych podręcznikach

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = L$$

jest mylący, bo sugeruje, że  $x \neq x_0$  i  $y \neq y_0$ . Przy obliczaniu granicy

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$$

wymagamy, aby  $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ .

Działania arytmetyczne na granicach są spełnione tak jak dla funkcji jednej zmiennej. Na przykład poniżej korzystamy ze wszystkich takich działań.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,3)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = \frac{(-1)^3 + 3^3}{(-1)^2 + 3^2} = 2,6.$$

Prawdziwe jest też twierdzenie o podstawianiu.

**Twierdzenie 4.4.** *Jeśli  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L$  oraz funkcja  $g(t)$  jest ciągła w punkcie  $L$ , to*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(f(x, y)) = g(L) = g\left(\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)\right).$$

**Przykład.**

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (e,1)} \log \frac{y}{x} \underset{t=\frac{y}{x}}{=} \lim_{t \rightarrow \frac{1}{e}} \log t = \log \frac{1}{e} = -1.$$

**Definicja 4.5.** *Mówimy, że funkcja  $f(x, y)$  jest ciągła w  $(x_0, y_0)$  jeśli jest określona w pewnym kole wokół  $(x_0, y_0)$  oraz  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$ .*

**Przykład.** Funkcja  $f(x, y) = \sin \frac{xy}{1 + x^2 + y^2}$  jest ciągła w każdym punkcie.

Dla zbioru  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  i punktu  $p$  zbioru  $A$  mogą zdarzyć się dwa przypadki.

- (1)  $p$  leży w  $A$  z pewnym kołem wokół siebie. Tzn.  $p$  należy do wnętrza zbioru  $A$ .
- (2) Każde koło o środku w  $p$  zawiera punkty ze zbioru  $A$  i spoza zbioru  $A$ . Tzn.  $p$  leży na brzegu zbioru  $A$ .

Wnętrze i brzeg zbioru  $A$  oznaczamy symbolami  $\text{int } A$  oraz  $\text{bd } A$ , odpowiednio.

**Przykład.**  $A = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$ . Wtedy  $\text{int } A = \{(x, y) : |x| + |y| < 1\}$  oraz  $\text{bd } A = \{(x, y) : |x| + |y| = 1\}$ .

Mówimy, że funkcja  $f(x, y)$  jest ciągła na zbiorze  $A$  jeśli  $f$  jest określona na  $A$ , ciągła w każdym punkcie wewnętrznym oraz dla punktów brzegowych  $(x_0, y_0)$  spełnia

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ (x,y) \in A}} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

**Przykład.**  $A = [0, 1] \times [0, 2]$  oraz

$$f(x, y) = \begin{cases} 4 - x - y & (x, y) \in A, \\ 0 & (x, y) \notin A. \end{cases}$$

Funkcja  $f$  jest ciągła na  $A$ , tzn. gdy rozważamy ją tylko na zbiorze  $A$ . Ale  $f$  nie jest ciągła na  $\mathbb{R}^2$ .

**Przykład.**  $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$  oraz

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 - x^2 - y^2 & (x, y) \in B, \\ 0 & (x, y) \notin B. \end{cases}$$

Funkcja  $f$  jest tym razem ciągła na  $\mathbb{R}^2$ . Można potraktować  $f$  jako złożenie  $g(h(x, y))$ , gdzie  $h(x, y) = 1 - x^2 - y^2$  oraz  $g(t) = \max(t, 0)$ . Obie funkcje są ciągłe. Z twierdzenia o podstawianiu wynika, że ich złożenie jest funkcją ciągłą.

**Zadanie.** Wskazać funkcję  $f(x, y)$  ciągłą w każdym punkcie  $(x, y) \neq (0, 0)$  taką, że  $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(ta, tb) = 0$  dla dowolnego wektora  $(a, b) \neq (0, 0)$ , ale granica funkcji  $f(x, y)$  w punkcie  $(0, 0)$  nie istnieje.

## 5 Pochodne cząstkowe

**Definicja 5.1.** Załóżmy, że funkcja  $f(x, y)$  jest określona w otoczeniu punktu  $(x_0, y_0)$ . Pochodną cząstkową względem  $x$  funkcji  $f$  w punkcie  $(x_0, y_0)$  określamy wzorem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Podobnie określamy pochodną cząstkową względem  $y$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Aby obliczyć  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$  i  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$  wystarczy znać wartości  $f(x, y)$  na fragmentach dwu prostych przechodzących przez punkt  $(x_0, y_0)$ .

**Uwaga.**

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \left. \frac{d}{dx} f(x, y_0) \right|_{x=x_0}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \left. \frac{d}{dy} f(x_0, y) \right|_{y=y_0}.$$

**Przykład.**  $f(x, y) = 24xy - 5x^2y$ . Chcemy obliczyć obie pochodne cząstkowe w punkcie  $(1, 2)$ . Możemy to zrobić na dwa sposoby.

- (a) Obliczamy  $\frac{\partial f}{\partial x}$  i  $\frac{\partial f}{\partial y}$  w dowolnym punkcie i po wykonaniu obliczeń podstawiamy  $(1, 2)$ . Mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 24y - 10xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 24x - 5x^2.$$

Zatem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 24 \cdot 2 - 10 \cdot 2 = 28, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 24 \cdot 1 - 5 \cdot 1^2 = 19.$$

- (b) Obliczamy  $f(x, 2)$  oraz  $f(1, y)$ .

$$f(x, 2) = 48x - 10x^2, \quad f(1, y) = 24y - 5y = 19y.$$

Dalej

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) &= \left. \frac{d}{dx} f(x, 2) \right|_{x=1} = \left. \frac{d}{dx} (48x - 10x^2) \right|_{x=1} = (48 - 20x) \Big|_{x=1} = 28, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) &= \left. \frac{d}{dy} f(1, y) \right|_{y=2} = \left. \frac{d}{dy} (19y) \right|_{y=2} = 19. \end{aligned}$$



**Przykład.**

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & x = y = 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

Dla  $(x, y) \neq (0, 0)$  obliczamy  $\frac{\partial f}{\partial x}$ .

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(3x^2y - y^3)(x^2 + y^2) - (x^3y - xy^3)2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}. \quad (5.2)$$

Ze wzoru  $f(y, x) = -f(x, y)$  otrzymujemy

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{xy^4 + 4x^3y^2 - x^5}{(x^2 + y^2)^2}. \quad (5.3)$$

Ponieważ wartość  $f(0, 0)$  jest określona osobno pochodne cząstkowe w punkcie  $(0, 0)$  musimy obliczyć inaczej. Mamy  $f(x, 0) = 0$  oraz  $f(0, y) = 0$ . Zatem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0. \quad (5.4)$$

**Twierdzenie 5.2.** *Załóżmy, że funkcja  $f(x, y)$  ma pochodną cząstkową względem  $x$  w prostokącie  $(a, b) \times (c, d)$ . Wtedy dla punktów  $(x_1, y)$  i  $(x_2, y)$  z tego prostokąta mamy*

$$f(x_2, y) - f(x_1, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(\zeta, y)(x_2 - x_1),$$

dla pewnej liczby  $\zeta$  leżącej pomiędzy  $x_1$  i  $x_2$ .

Podobnie jeśli funkcja  $f(x, y)$  ma pochodną cząstkową względem  $y$ , to

$$f(x, y_2) - f(x, y_1) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta)(y_2 - y_1),$$

dla pewnej liczby  $\eta$  leżącej pomiędzy  $y_1$  i  $y_2$ .

*Dowód.* Rozważamy funkcję jednej zmiennej  $x \mapsto f(x, y)$  na przedziale  $(a, b)$ . Z twierdzenia Lagrange'a otrzymujemy

$$f(x_2, y) - f(x_1, y) = \frac{d}{dx}f(x, y) \Big|_{x=\zeta} (x_2 - x_1) = \frac{\partial f}{\partial x}(\zeta, y)(x_2 - x_1).$$

□

## 5.1 Wyższe pochodne cząstkowe

Dla funkcji  $f(x, y)$  pochodne cząstkowe  $\frac{\partial f}{\partial x}$  i  $\frac{\partial f}{\partial y}$  są znowu funkcjami dwu zmiennych. Możemy więc obliczać pochodne cząstkowe tych funkcji. Następne pochodne cząstkowe oznaczamy symbolami

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

przy czym w pochodnych mieszanych wykonujemy różniczkowanie w kolejności od prawej do lewej strony

**Przykład.**  $f(x, y) = \sin(xy^2)$ .

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 \cos(xy^2), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy \cos(xy^2),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -y^4 \sin(xy^2), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2y \cos(xy^2) - 2xy^3 \sin(xy^2),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y \cos(xy^2) - 2xy^3 \sin(xy^2), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x \cos(xy^2) - 4x^2 y^2 \sin(xy^2).$$

Zauważmy, że pochodne mieszane są w tym przypadku równe.

**Przykład.** Rozważmy ponownie funkcję  $f(x, y)$  z (5.1). Obliczymy pochodne mieszane w  $(0, 0)$ . Ze wzorów (5.2), (5.3) i (5.4) mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = -y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = x.$$

Zatem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1.$$

**Uwaga.** Z przykładu wynika, że pochodne mieszane nie muszą być sobie równe. Niedługo udowodnimy, że jeśli pochodne te są ciągłe w danym punkcie, to są w tym punkcie równe sobie.

## 5.2 Reguła łańcucha

Dla funkcji jednej zmiennej jeśli  $y = g(u)$  oraz  $u = f(x)$ , to

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}.$$

Dla funkcji wielu zmiennych jest wiele możliwości złożenia funkcji.

- (a) Niech  $z = f(x, y)$  oraz  $x = g_1(t)$ ,  $y = g_2(t)$ . Otrzymujemy  $z = f(g_1(t), g_2(t))$ . Wtedy

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt},$$

gdzie  $\frac{\partial z}{\partial x}$  i  $\frac{\partial z}{\partial y}$  są obliczane w  $x$  i  $y$  a  $\frac{dx}{dt}$ ,  $\frac{dy}{dt}$  i  $\frac{dz}{dt}$  są obliczane w  $t$ .

Po wykonaniu obliczeń trzeba podstawić  $x = g_1(t)$  oraz  $y = g_2(t)$ , tzn. wynik ma być zapisany w języku zmiennej  $t$ .

- (b)  $z = f(x, y)$  oraz  $x = g_1(u, v)$ ,  $y = g_2(u, v)$ . Tzn.  $z = f(g_1(u, v), g_2(u, v))$ . Wtedy

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}. \end{aligned}$$

Pochodne  $\frac{\partial z}{\partial x}$  i  $\frac{\partial z}{\partial y}$  są obliczane w  $(x, y)$  a pozostałe w  $(u, v)$ . Wynik ma być zapisany w języku zmiennych  $u$  i  $v$ .

**Przykład.**  $z = (u^2 - v^2) \log(u^2 + v^2)$ . Przyjmijmy  $x = u^2 - v^2$ ,  $y = u^2 + v^2$ . Wtedy  $z = x \log y$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \log y \cdot 2u + \frac{x}{y} \cdot 2u = 2u \log(u^2 + v^2) + 2u \frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2}, \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \log y \cdot (-2v) + \frac{x}{y} \cdot 2v = -2v \log(u^2 + v^2) + 2v \frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2}. \end{aligned}$$

*Dowód reguły (b).* Zakładamy, że funkcje  $\frac{\partial f}{\partial x}$  oraz  $\frac{\partial f}{\partial y}$  są ciągłe. Mamy  $z(u, v) = f(g_1(u, v), g_2(u, v))$ . Przyjmujemy oznaczenia

$$\begin{aligned}x &= g_1(u, v) & y &= g_2(u, v), \\s &= g_1(u + h, v) - g_1(u, v), & t &= g_2(u + h, v) - g_2(u, v).\end{aligned}$$

Wielkości  $s$  i  $t$  zależą od  $h$ .

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u}(u, v) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g_1(u + h, v), g_2(u + h, v)) - f(g_1(u, v), g_2(u, v))}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + s, y + t) - f(x, y + t) + f(x, y + t) - f(x, y)}{h}\end{aligned}$$

Z Twierdzenia 5.2 mamy

$$\begin{aligned}f(x + s, y + t) - f(x, y + t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x + \theta_1 s, y + t) s, \\f(x, y + t) - f(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial y}(x, y + \theta_2 t) t,\end{aligned}$$

dla pewnych  $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$ . Gdy  $h \rightarrow 0$ , to  $s \rightarrow 0$  oraz  $t \rightarrow 0$ . Zatem

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x + \theta_1 s, y + t) &\xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y + \theta_2 t) &\xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y}.\end{aligned}$$

Dalej

$$\begin{aligned}\frac{s}{h} &= \frac{g_1(u + h, v) - g_1(u, v)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{\partial g_1}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial x}{\partial u}, \\ \frac{t}{h} &= \frac{g_2(u + h, v) - g_2(u, v)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{\partial g_2}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial y}{\partial u}.\end{aligned}$$

Reasumując, w granicy otrzymamy  $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$ . □

**Przykład.**  $w = \cos(xyz^2)$  oraz  $x = \sin t$ ,  $y = t^2$ ,  $z = e^t$ .

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} \\&= -\sin(xyz^2)yz^2 \cos t - \sin(xyz^2)xz^2 2t - -\sin(xyz^2)2xyz e^t \\&= -\sin(t^2 e^{2t} \sin t) [t^2 e^{2t} \cos t + 2t e^{2t} \sin t + 2t^2 e^{2t} \sin t].\end{aligned}$$

**Przykład.** Góra piasku w kształcie stożka rośnie w tempie 4 litry na sekundę, a promień podstawy  $r$  rośnie w tempie  $e^{-r}$  decymetrów na sekundę. W jakim tempie rośnie wysokość w momencie, gdy  $V = 60$  l oraz  $r = 6$  dcm ?

Mamy  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ . Zatem

$$h = \frac{3}{\pi} \frac{V}{r^2}.$$

Wielkości  $h$ ,  $V$  i  $r$  są funkcjami czasu  $t$ . Otrzymujemy

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial V} \frac{dV}{dt} + \frac{\partial h}{\partial r} \frac{dr}{dt} = \frac{3}{\pi} \frac{1}{r^2} \cdot 4 - \frac{3 \cdot 2V}{\pi r^3} \cdot e^{-r}.$$

Niech  $t_0$  oznacza moment czasu, gdy  $V = 60$  l oraz  $r = 6$  dcm. Wtedy

$$\left. \frac{dh}{dt} \right|_{t=t_0} = \frac{3}{\pi} \frac{1}{6^2} \cdot 4 - \frac{3 \cdot 2 \cdot 60}{\pi \cdot 6^3} \cdot e^{-6} \text{ (dcm/sek)}.$$

Ile wynosi  $r$  jeśli  $\frac{dr}{dt} = e^{-r}$  ?

### 5.3 Różniczkowalność funkcji wielu zmiennych

**Definicja 5.3.** Mówimy, że funkcja  $f(x, y)$  jest różniczkowalna w punkcie  $(x_0, y_0)$ , jeśli istnieją pochodne cząstkowe  $a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ ,  $b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$  oraz

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{|f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) - ah_1 - bh_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0.$$

**Uwagi.**

(a) Przyrost argumentu od  $(x_0, y_0)$  do  $(x_0 + h_1, y_0 + h_2)$  wynosi  $(h_1, h_2)$ . Wielkość  $\sqrt{h_1^2 + h_2^2}$  jest więc długością tego przyrostu.

(b) Dla funkcji jednej zmiennej różniczkowalność oznacza, że

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(x_0) =: a.$$

Tzn.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - ah|}{|h|} = 0.$$

**Twierdzenie 5.4.** Załóżmy, że dla funkcji  $f(x, y)$  pochodne cząstkowe  $\frac{\partial f}{\partial x}$  i  $\frac{\partial f}{\partial y}$  są ciągłe w punkcie  $(x_0, y_0)$ . Wtedy funkcja  $f(x, y)$  jest różniczkowalna w punkcie  $(x_0, y_0)$ .

*Dowód.*

$$\begin{aligned} & f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) - ah_1 - bh_2 \\ &= f(x_0 + h_1, y_0) - f(x_0, y_0) - ah_1 + f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0 + h_1, y_0) - bh_2 \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 h_1, y_0) h_1 - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h_1, y_0 + \theta_2 h_2) h_2 - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) h_2 \\ &= \underbrace{\left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 h_1, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right]}_A h_1 + \underbrace{\left[ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h_1, y_0 + \theta_2 h_2) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right]}_B h_2 \end{aligned}$$

Mamy

$$\begin{aligned} |Ah_1 + Bh_2| &\leq |A||h_1| + |B||h_2| \leq |A|\sqrt{h_1^2 + h_2^2} + |B|\sqrt{h_1^2 + h_2^2} \\ &= (|A| + |B|)\sqrt{h_1^2 + h_2^2}. \end{aligned}$$

Zatem

$$\frac{|f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) - ah_1 - bh_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \leq |A| + |B| \xrightarrow{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} 0.$$

□

**Przykład.**  $f(x, y) = \sin(xy)$ . Mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cos(xy), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x \cos(xy).$$

Pochodne cząstkowe są ciągłe. Zatem  $f(x, y)$  jest różniczkowalna w każdym punkcie. W punkcie  $(0, 0)$  pochodne cząstkowe zerują się. Różniczkowalność oznacza więc, że

$$\frac{|\sin(xy)|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0.$$

### 5.3.1 Interpretacja geometryczna różniczkowości

Wykres funkcji  $z = f(x, y)$  jest podzbiorem przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ . Rozważamy obraz prostej  $y = y_0$  przez funkcję  $f(x, y)$ , czyli krzywą  $(x, y_0) \mapsto f(x, y_0)$ . Ta krzywa znajduje się w płaszczyźnie pionowej  $y = y_0$ . Chcemy znaleźć styczną do tej krzywej. Gdyby funkcja  $f$  zależała tylko od zmiennej  $x$ , to styczna do krzywej miałaby równanie  $z - z_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ . Ale rozważamy  $(x, y_0) \mapsto f(x, y_0)$ . Zatem równanie stycznej ma postać

$$\begin{cases} z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) \\ y = y_0 \end{cases}$$

Przy oznaczeniu  $a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$  równanie stycznej, to

$$\begin{cases} z - z_0 = a(x - x_0) \\ y = y_0 \end{cases}$$

Podobnie, rozważamy obraz prostej  $x = x_0$  czyli funkcję  $(x_0, y) \mapsto f(x_0, y)$ . Równanie stycznej ma postać

$$\begin{cases} z - z_0 = b(y - y_0) \\ x = x_0 \end{cases}$$

gdzie  $b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ . Te dwie styczne rozpinają płaszczyznę o równaniu

$$z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0).$$

Niech  $(x, y, z)$  oznacza punkt na płaszczyźnie odpowiadający punktowi  $(x, y)$ , w zamyśle położonym blisko punktu  $(x_0, y_0)$ . Zatem

$$z = z_0 + a(x - x_0) + b(y - y_0) = f(x_0, y_0) + ah_1 + bh_2,$$

przy oznaczeniach  $h_1 = x - x_0$  i  $h_2 = y - y_0$ . Wtedy

$$|f(x, y) - z| = |f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) - ah_1 - bh_2|.$$

Reasumując, różniczkowość oznacza, że iloraz odległości punktu wykresu  $(x, y, f(x, y))$  i odpowiadającego punktu  $(x, y, z)$  na płaszczyźnie, przez odległość pomiędzy  $(x_0, y_0)$  i  $(x, y)$ , jest mały, gdy  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ . W takim

wypadku mówimy, że płaszczyzna  $z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0)$  jest styczna do wykresu w punkcie  $(x_0, y_0, z_0)$ , gdzie  $z_0 = f(x_0, y_0)$ .

Podobnie określamy różniczkowalność funkcji wielu zmiennych. Funkcja  $n$  zmiennych  $f(x_1, \dots, x_n)$  jest różniczkowalna w punkcie  $(x_1, \dots, x_n)$ , jeśli

$$\lim_{(h_1, \dots, h_n) \rightarrow 0} \frac{|f(x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n) - f(x_1, \dots, x_n) - a_1 h_1 - \dots - a_n h_n|}{\sqrt{h_1^2 + \dots + h_n^2}} = 0,$$

gdzie

$$a_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n), \dots, a_n = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n).$$

Wygodnie będzie zastosować zapis wektorowy

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}, \quad A = (a_1, \dots, a_n).$$

Wtedy

$$a_j = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + te_j) - f(x)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x),$$

gdzie  $e_j$  jest  $j$ -tym wektorem bazowym. Warunek różniczkowalności ma postać

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x + h) - f(x) - Ah|}{\|h\|} = 0, \quad \text{gdzie } \|h\| = \sqrt{h_1^2 + \dots + h_n^2}.$$

Rozważmy  $m$  funkcji  $f_1, \dots, f_m$ , każda zależna od  $n$  zmiennych  $x_1, \dots, x_n$ . Możemy utworzyć jedną funkcję  $f(x)$ , ale o wartościach wektorowych wzorem

$$\mathbb{R}^n \ni x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

Odwrotnie, każda funkcja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  składa się z rodziny  $m$  funkcji o wartościach rzeczywistych.

**Przykład.** Rozważmy odwzorowanie

$$\mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1 x_2 \\ x_1 \sin x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$



Wtedy  $f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ .

Mówimy, że funkcja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  jest różniczkowalna w punkcie  $x$ , jeśli każda z funkcji  $f_1, \dots, f_m$  jest różniczkowalna w  $x$ . Tzn. dla  $i = 1, 2, \dots, m$  mamy

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f_i(x+h) - f_i(x) - A_i h|}{\|h\|} = 0,$$

gdzie

$$A_i = (a_{i1}, \dots, a_{in}), \quad a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x).$$

Czy można to objąć jednym zapisem dla funkcji  $f(x)$  ?

**Definicja 5.5.** Mówimy, że funkcja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  jest różniczkowalna w punkcie  $x$ , jeśli

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - Ah\|}{\|h\|} = 0, \quad \text{gdzie } A = (a_{ij}).$$

Sprawdzimy, że faktycznie warunek w definicji oznacza, że każda z funkcji  $f_i$  jest różniczkowalna. Skorzystamy z nierówności

$$|c_i| \leq \left( \sum_{j=1}^m c_j^2 \right)^{1/2} \leq \sum_{j=1}^m |c_j|, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Otrzymujemy

$$|f_i(x+h) - f_i(x) - A_i h| \leq \|f(x+h) - f(x) - Ah\| \leq \sum_{j=1}^m |f_j(x+h) - f_j(x) - A_j h|.$$

Z pierwszej nierówności wynika, że jeśli  $f$  jest różniczkowalna w punkcie  $x$  według Definicji 5.5, to każda z funkcji  $f_i$  jest różniczkowalna w  $x$ . Z kolei z drugiej nierówności wynika, że jeśli każda z funkcji  $f_i$  jest różniczkowalna w  $x$ , to  $f$  jest różniczkowalna w punkcie  $x$  według Definicji 5.5.

Stosujemy oznaczenie  $A = Df(x)$ , tzn.  $Df(x)$  jest macierzą wymiaru  $m \times n$  złożoną z pochodnych cząstkowych. Numer wiersza odpowiada numerowi funkcji składowej, natomiast numer kolumny odpowiada numerowi zmiennej, względem której obliczana jest pochodna cząstkowa.

**Przykład.**

$$\mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Wtedy

$$Df(x) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ x_2 & x_1 \\ 2x_1 & 2x_2 \end{pmatrix}, \quad Df(1, 2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

**Lemat 5.6.** Załóżmy, że dla pewnej macierzy  $B$  wymiaru  $m \times n$  mamy

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - Bh\|}{\|h\|} = 0.$$

Wtedy  $B = Df(x)$ .

*Dowód.* Mamy

$$|f_i(x+h) - f_i(x) - B_i h| \leq \|f(x+h) - f(x) - Bh\|,$$

gdzie  $B_i$  oznacza  $i$ -ty wiersz macierzy  $B$ . Zatem

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f_i(x+h) - f_i(x) - B_i h|}{\|h\|} = 0.$$

Niech  $h = te_j$ . Wtedy

$$0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|f_i(x+te_j) - f_i(x) - tb_{ij}|}{|t|} = \lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{f_i(x+te_j) - f_i(x)}{t} - b_{ij} \right|.$$

Stąd otrzymujemy  $b_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ . □

**Lemat 5.7** (nierówność Schwarz'a).

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2).$$

Równość zachodzi tylko wtedy, gdy wektory  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  i  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  są równoległe.

*Dowód.*

$$\begin{aligned} & (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \\ &= \sum_{i \neq j} a_i^2 b_j^2 - 2 \sum_{i < j} a_i b_i a_j b_j = \sum_{i < j} (a_i^2 b_j^2 + a_j^2 b_i^2) - 2 \sum_{i < j} a_i b_i a_j b_j \\ &= \sum_{i < j} (a_i b_j - a_j b_i)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Przypuśćmy, że w nierówności Schwarz'a mamy równość oraz, że  $a_{i_0} \neq 0$ . Wtedy  $a_{i_0} b_j = a_j b_{i_0}$ , czyli wektor  $b$  jest wielokrotnością wektora  $a$  ze współczynnikiem  $b_{i_0}/a_{i_0}$ . □

**Lemat 5.8.** Dla macierzy  $A$  wymiaru  $m \times n$  oraz wektora  $h \in \mathbb{R}^n$  mamy

$$\|Ah\| \leq \|A\|_{HS} \|h\|, \quad \text{gdzie } \|A\|_{HS} = \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{1/2}.$$

Wielkość  $\|A\|_{HS}$  nazywamy normą Hilberta-Schmidta macierzy  $A$ .

*Dowód.* Oznaczmy

$$Ah = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Wtedy  $\|Ah\|^2 = \sum_{i=1}^m y_i^2$ . Ale  $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} h_j$ . Z nierówności Schwarz'a mamy

$$y_i^2 = \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} h_j \right)^2 \leq \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \sum_{j=1}^n h_j^2 = \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \|h\|^2,$$

czyli

$$\|Ah\|^2 = \sum_{i=1}^m y_i^2 \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \|h\|^2 = \|A\|_{HS}^2 \|h\|^2.$$

□

**Twierdzenie 5.9.** Jeśli funkcja  $f(x)$  jest różniczkowalna w punkcie  $a \in \mathbb{R}^n$ , to  $f(x)$  jest ciągła w  $a$ .

*Dowód.* Trzeba udowodnić, że  $\lim_{h \rightarrow 0} \|f(a+h) - f(a)\| = 0$ . Oznaczmy

$$u(h) = f(a+h) - f(a) - Ah, \quad \text{gdzie } A = Df(a).$$

Dla  $h \neq 0$  mamy

$$\begin{aligned} \|f(a+h) - f(a)\| &= \|u(h) + Ah\| \leq \|u(h)\| + \|Ah\| \\ &\leq \|u(h)\| + \|A\|_{HS} \|h\| = \left[ \frac{\|u(h)\|}{\|h\|} + \|A\|_{HS} \right] \|h\| \end{aligned}$$

Z różniczkowalności pierwszy składnik w nawiasie kwadratowym dąży do zera, gdy  $h \rightarrow 0$ . Zatem całe wyrażenie dąży do zera, gdy  $h \rightarrow 0$ . □

**Twierdzenie 5.10.** *Załóżmy, że funkcja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  jest różniczkowalna w punkcie  $a \in \mathbb{R}^n$  natomiast funkcja  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$  jest różniczkowalna w punkcie  $b = f(a)$ . Wtedy funkcja złożona  $g \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  jest różniczkowalna w punkcie  $a$  oraz*

$$D(g \circ f)(a) = Dg(b) Df(a).$$

**Uwagi.**

- (a) Macierze  $Dg(b)$  i  $Df(a)$  mają wymiary  $p \times m$  i  $m \times n$  odpowiednio. Po pomnożeniu otrzymamy macierz wymiaru  $p \times n$ .
- (b) Wzór na pochodną funkcji złożonej wielu zmiennych zgadza się ze wzorem dla jednej zmiennej:

$$(g \circ f)'(a) = g'(b) f'(a), \quad b = f(a).$$

- (c) Można nieformalnie wyjaśnić wzór w twierdzeniu. Oznaczmy  $A = Df(a)$ ,  $B = Dg(b)$ . Różniczkowalność oznacza, że

$$\begin{aligned} f(a+h) &\approx f(a) + Ah, & \text{gdy } h \rightarrow 0, \\ g(b+k) &\approx g(b) + Bk, & \text{gdy } k \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} g(f(a+h)) &\approx g(f(a) + Ah) = g(b + Ah) \\ &\approx g(b) + BAh = g(f(a)) + BAh, & \text{gdy } h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Stąd  $D(g \circ f)(a) = BA$ .

*Dowód.* Posłużymy się oznaczeniami z Uwagi (c). Trzeba udowodnić, że

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|g \circ f(a+h) - g \circ f(a) - BAh\|}{\|h\|} = 0.$$

Wtedy teza wynika z Lematu 5.6. Oznaczmy

$$u(h) = f(a+h) - f(a) - Ah, \quad v(k) = g(b+k) - g(b) - Bk.$$

Przyjmijmy  $k = f(a+h) - f(a) = u(h) + Ah$ . Wtedy

$$\begin{aligned} g \circ f(a+h) - g \circ f(a) - BAh &= g(f(a+h)) - g(f(a)) - BAh \\ &= g(b+k) - g(b) - BAh = v(k) + Bk - BAh \\ &= v(k) + B(k - Ah) = v(k) + Bu(h). \end{aligned}$$

Wprowadzamy oznaczenie

$$\varphi(k) = \begin{cases} \frac{\|v(k)\|}{\|k\|} & k \neq 0, \\ 0 & k = 0 \end{cases}.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} \frac{\|g \circ f(a+h) - g \circ f(a) - BAh\|}{\|h\|} &\leq \frac{\|v(k)\|}{\|h\|} + \frac{\|Bu(h)\|}{\|h\|} \leq \varphi(k) \frac{\|k\|}{\|h\|} + \|B\|_{HS} \frac{\|u(h)\|}{\|h\|} \end{aligned}$$

Z różniczkowalności funkcji  $f$  drugi składnik dąży do zera, gdy  $h \rightarrow 0$ . Ponadto, gdy  $h \rightarrow 0$ , to również  $k \rightarrow 0$ . Zatem  $\varphi(k) \rightarrow 0$ . Dalej

$$\frac{\|k\|}{\|h\|} \leq \frac{\|u(h)\|}{\|h\|} + \frac{\|Ah\|}{\|h\|} \leq \frac{\|u(h)\|}{\|h\|} + \|A\|_{HS} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \|A\|_{HS}.$$

□

**Przykład.**

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (x^2 + 1, y^2), & a &= (2, 1), \\ g(u, v) &= (u + v, u, v^2), & b &= f(2, 1) = (5, 1). \end{aligned}$$

Mamy

$$Df(x, y) = \begin{bmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{bmatrix}, \quad Dg(u, v) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2v \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$Df(2, 1) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad Dg(5, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Otrzymujemy

$$D(g \circ f)(2, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

**Twierdzenie 5.11.** *Jeśli funkcja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ma ciągłe pochodne cząstkowe w punkcie  $a \in \mathbb{R}^n$ , to  $f$  jest różniczkowalna w  $a$ .*

*Dowód.* Dla  $h \in \mathbb{R}^n$  określamy ciąg wektorów  $v_i$  wzorami  $v_0 = a$ ,  $v_1 = v_0 + h_1 e_1$ ,  $v_2 = v_1 + h_2 e_2$ ,  $\dots$ ,  $v_n = v_{n-1} + h_n e_n = a + h$ . Wtedy punkty  $v_j$  i  $v_{j-1}$  różnią się tylko na  $j$ -tej współrzędnej o  $h_j$ . Zatem

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= f(v_n) - f(v_0) = \sum_{j=1}^n [f(v_j) - f(v_{j-1})] \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(w_j) h_j, \end{aligned}$$

gdzie punkt  $w_j$  leży na odcinku pomiędzy  $v_{j-1}$  i  $v_j$ . Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left| f(a+h) - f(a) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) h_j \right| &= \left| \sum_{j=1}^n \left[ \frac{\partial f}{\partial x_j}(w_j) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \right] h_j \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(w_j) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \right| |h_j| \leq \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(w_j) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \right| \|h\|. \end{aligned}$$

Zatem

$$\frac{\left| f(a+h) - f(a) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) h_j \right|}{\|h\|} \leq \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(w_j) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \right|.$$

Gdy  $h \rightarrow 0$ , to  $v_j \rightarrow a$  dla  $j = 1, 2, \dots, n$ . Wtedy  $w_j \rightarrow a$ . Reasumując, prawa strona ostatniego wzoru dąży do zera.  $\square$

**Uwaga.** Z twierdzenia wynika, że jeśli pochodne cząstkowe funkcji  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  są ciągłe w punkcie  $a$ , to  $f$  jest różniczkowalna w  $a$ .

**Twierdzenie 5.12** (reguła łańcucha). *Załóżmy, że funkcje  $f_1, f_2, \dots, f_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mają ciągłe pochodne cząstkowe w punkcie  $a$ . Załóżmy też, że funkcja  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  ma ciągłe pochodne cząstkowe w punkcie  $b = (f_1(a), f_2(a), \dots, f_m(a))$ . Przyjmijmy, że  $f_j(x) = f_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$  oraz  $g(y) = g(y_1, y_2, \dots, y_m)$ . Wtedy funkcja złożona  $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  określona wzorem*

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$$

jest różniczkowalna w punkcie  $a$  oraz

$$\frac{\partial G}{\partial x_i}(a) = \frac{\partial g}{\partial y_1}(b) \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a) + \frac{\partial g}{\partial y_2}(b) \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(a) + \dots + \frac{\partial g}{\partial y_m}(b) \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(a).$$

*Dowód.* Tworzymy funkcję  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  wzorem

$$F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}.$$

Wtedy  $G(x) = g(F(x))$ . Zatem funkcja  $G$  jest różniczkowalna w punkcie  $a$  oraz  $DG(a) = Dg(b) DF(a)$ . Ale

$$DG(a) = \left( \frac{\partial G}{\partial x_1}(a), \frac{\partial G}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial G}{\partial x_n}(a) \right)$$

$$Dg(b) = \left( \frac{\partial g}{\partial y_1}(b), \frac{\partial g}{\partial y_2}(b), \dots, \frac{\partial g}{\partial y_m}(b) \right)$$

$$DF(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix}.$$

Aby obliczyć  $\frac{\partial G}{\partial x_i}(a)$  mnożymy skalarnie wiersz  $Dg(b)$  przez  $i$ -tą kolumnę macierzy  $DF(a)$ .  $\square$

**Twierdzenie 5.13.** *Jeśli dla funkcji  $n$  zmiennych  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  i ustalonych  $i \neq j$  pochodne cząstkowe  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$  oraz  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$  są ciągłe w punkcie  $a$ , to*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

*Dowód.* Ustalmy  $i < j$ . Przy obliczaniu  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$  i  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$  w punkcie  $a$  używamy funkcji

$$g(x, y) = f(a_1, \dots, \underset{x}{\cancel{a_i}}, \dots, \underset{y}{\cancel{a_j}}, \dots, a_n).$$

Wystarczy zatem rozważyć przypadek funkcji  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  zakładając, że pochodne mieszane  $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}$  i  $\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}$  są ciągłe w punkcie  $(c, d)$ . Dla przyrostu  $h = (h_1, h_2)$  rozważmy wyrażenie

$$I = g(c + h_1, d + h_2) - g(c, d + h_2) - g(c + h_1, d) + g(c, d).$$

Oznaczmy  $\varphi(y) = g(c + h_1, y) - g(c, y)$ . Wtedy

$$\begin{aligned} I &= \varphi(d + h_2) - \varphi(d) = \varphi'(d + \theta_1 h_2) h_2 \\ &= \left[ \frac{\partial g}{\partial y}(c + h_1, d + \theta_1 h_2) - \frac{\partial g}{\partial y}(c, d + \theta_1 h_2) \right] h_2 = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(c + \theta_2 h_1, d + \theta_1 h_2) h_1 h_2. \end{aligned}$$

Zamieniając rolami  $x$  i  $y$  otrzymamy

$$I = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(c + \theta'_2 h_1, d + \theta'_1 h_2) h_1 h_2.$$

Przyjmijmy, że  $h_1, h_2 > 0$ . Wtedy

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(c + \theta_2 h_1, d + \theta_1 h_2) = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(c + \theta'_2 h_1, d + \theta'_1 h_2).$$

Przechodzimy do granicy, gdy  $h_1, h_2 \rightarrow 0$  i otrzymujemy

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(c, d) = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(c, d).$$

Zauważmy, że

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(a_i, a_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a), \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(a_i, a_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

□

**Uwaga.** Z poprzednich twierdzeń otrzymujemy hierarchię własności funkcji: ciągłe pochodne cząstkowe dają różniczkowalność, z której wynika istnienie pochodnych cząstkowych.



## 5.4 Geometria odwzorowań z $\mathbb{R}^n$ w $\mathbb{R}^m$

Rozważmy odwzorowanie  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Takie odwzorowanie nazywamy krzywą

$$c(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ c_3(t) \end{pmatrix}.$$

Wektorem siecznym odpowiadającym dwu momentom czasu  $t$  i  $t + h$  jest

$$\frac{c(t+h) - c(t)}{h}.$$

Wektor styczny do krzywej w punkcie  $c(t)$  otrzymujemy przez przejście graniczne

$$c'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c(t+h) - c(t)}{h}.$$

Mamy  $c'(t) = Dc(t)$ .

**Przykład.** Znaleźć wektor styczny do krzywej

$$c(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ t \end{pmatrix}$$

odpowiadający momentowi  $t = \pi$ . Chodzi więc o wektor styczny w punkcie

$$c(\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \pi \end{pmatrix}$$

$$c'(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c'(\pi) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Niech  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Wtedy  $\sigma(t) = f(c(t))$  jest nową krzywą. Różniczkując otrzymamy

$$\sigma'(t) = Df(c(t)) c'(t).$$

Funkcja  $f$  przekształca  $c(t)$  na  $\sigma(t)$ . Odwzorowanie  $Df(c(t))$  przekształca wektor styczny  $c'(t)$  na wektor styczny  $\sigma'(t)$ . Podobna interpretacja dotyczy krzywych  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  i funkcji  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

## 5.5 Gradient i poziomice funkcji

Pochodne cząstkowe w jednym punkcie nie dają pełnej informacji o zachowaniu się funkcji.

**Definicja 5.14.** Załóżmy, że funkcja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  jest różniczkowalna w punkcie  $a \in \mathbb{R}^n$ . Gradientem nazywamy wektor

$$\nabla f(a) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right).$$

Tzn.  $\nabla f(a) = Df(a)$ .

Ustalmy punkt  $x$  i wektor  $v \in \mathbb{R}^n$ . Chcemy zbadać tempo zmiany wartości funkcji  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  w punkcie  $x$  wzdłuż prostej  $x + tv$ , gdzie  $t \in \mathbb{R}$ . W tym celu obliczamy  $\left. \frac{d}{dt} f(x + tv) \right|_{t=0}$ . Z definicji mamy

$$\left. \frac{d}{dt} f(x + tv) \right|_{t=0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + hv) - f(x)}{h}.$$

To wyrażenie nazywamy pochodną kierunkową w punkcie  $x$  w kierunku  $v$ . Dla  $v = e_j$  otrzymamy w wyniku  $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ . Tzn. pochodne cząstkowe są również pochodnymi kierunkowymi w kierunkach równoległych do poszczególnych osi współrzędnych. Ze wzoru na pochodną funkcji złożonej otrzymujemy

$$\frac{d}{dt} f(x + tv) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x + tv) v_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x + tv) v_n,$$

zatem

$$\left. \frac{d}{dt} f(x + tv) \right|_{t=0} = \nabla f(x) \circ v. \quad (5.5)$$

**Przykład.**  $f(x, y, z) = e^{xy} \sin z$ . Chcemy obliczyć pochodną kierunkową w punkcie  $(0, 1, \frac{\pi}{2})$  w kierunku wektora  $(2, 1, 1)$ . Mamy

$$\nabla f(x, y, z) = (ye^{xy} \sin z, xe^{xy} \sin z, e^{xy} \cos z), \quad \nabla f(0, 1, \frac{\pi}{2}) = (1, 0, 0).$$

Zatem

$$\nabla f(0, 1, \frac{\pi}{2}) \circ (2, 1, 1) = 2.$$

Przy porównywaniu pochodnych kierunkowych w różnych kierunkach wybiera się wektory  $v$  o długości 1. Liczbę  $\nabla f(x) \circ v$  można interpretować jako tempo zmiany wartości funkcji  $f$  w kierunku  $v$ , gdy prędkość zmiany argumentu wynosi 1.

**Twierdzenie 5.15.** *Załóżmy, że  $\nabla f(x) \neq 0$ . Wtedy wektor  $\nabla f(x)$  wskazuje kierunek najszybszego wzrostu wartości funkcji  $f$ , startując z punktu  $x$ . Z kolei wektor  $-\nabla f(x)$  wskazuje kierunek najszybszego spadku wartości funkcji.*

*Dowód.* Niech  $v$  będzie dowolnym wektorem o długości 1. Tempo zmiany wartości funkcji w kierunku  $v$  wynosi

$$\nabla f(x) \circ v \leq \|\nabla f(x)\| \|v\| = \|\nabla f(x)\|.$$

Równość zachodzi tylko wtedy, gdy wektory  $v$  i  $\nabla f(x)$  mają ten sam kierunek i zwrot, tzn.  $v = \frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$ .  $\square$

**Przykład.** W którym kierunku od punktu  $(0, 1)$  funkcja  $f(x, y) = x^2 - y^2$  rośnie najszybciej? Mamy  $\nabla f(x, y) = (2x, -2y)$ . Zatem  $\nabla f(0, 1) = (0, -2)$ . Funkcja rośnie najszybciej w kierunku  $(0, -1)$ .

**Definicja 5.16.** *Poziomicą funkcji  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  nazywamy zbiór postaci  $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = c\}$  dla ustalonej wartości  $c$ .*

**Przykład.**  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ . Poziomica  $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  jest sferą. Mamy  $\nabla f(x, y, z) = 2(x, y, z)$ . Zatem gradient jest prostopadły do sfery.

Wartość funkcji, gdy argument porusza się po poziomici nie zmienia się. Wydaje się, że gradient powinien być zawsze prostopadły do poziomici.

**Twierdzenie 5.17.** *Załóżmy, że funkcja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  jest różniczkowalna w punkcie  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Wtedy gradient  $\nabla f(x_0)$  jest prostopadły do poziomici  $S = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = f(x_0)\}$  w następującym sensie: dla dowolnej krzywej  $c(t)$  leżącej na poziomici  $S$ , spełniającej  $c(0) = x_0$  i  $c'(0) = v$ , mamy  $\nabla f(x_0) \perp v$ .*

*Dowód.* Funkcja  $f(c(t))$  jest stała. Zatem

$$0 = \frac{d}{dt} f(c(t)) = Df(c(t)) c'(t) = \nabla f(c(t)) \circ c'(t).$$

Dla  $t = 0$  otrzymujemy  $\nabla f(x_0) \circ v = 0$ .  $\square$

**Definicja 5.18.** *Niech  $S = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = c\}$ . Przestrzenią styczną do poziomici  $S$  w punkcie  $x_0$  nazywamy hiperprzestrzeń określona przez*

$$\nabla f(x_0) \circ (x - x_0) = 0, \quad \text{o ile } \nabla f(x_0) \neq 0.$$

**Przykład.** Znaleźć równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni  $3xy + z^2 = 4$  w punkcie  $(1, 1, 1)$ . Chodzi o poziomice funkcji  $f(x, y, z) = 3xy + z^2$ . Obliczamy

$$\nabla f(x, y, z) = (3y, 3x, 2z), \quad \nabla f(1, 1, 1) = (3, 3, 2).$$

Równanie ma postać  $3(x - 1) + 3(y - 1) + 2(z - 1) = 0$ , po uproszczeniu  $3x + 3y + 2z = 8$ .

**Uwaga.** Określenie płaszczyzny stycznej do poziomicy zgadza się z określeniem płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji  $z = f(x, y)$ . Rzeczywiście, niech  $z_0 = f(x_0, y_0)$ . Rozważamy funkcję  $F(x, y, z) = f(x, y) - z$ . Wykres funkcji  $f$  można utożsamić z poziomica funkcji  $F$  przy  $c = 0$ . Mamy

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) = \left( \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}_a, \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}_b, -1 \right).$$

Równanie ma postać  $a(x - x_0) + b(y - y_0) - (z - z_0) = 0$ , czyli  $z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0)$ .

**Definicja 5.19.** Zbiór  $D \subset \mathbb{R}^n$  nazywamy ograniczonym, jeśli

$$D \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq K\}$$

dla pewnej stałej liczby  $K$ .

**Uwagi.**

- (a) Dla  $n = 3$  warunek w definicji oznacza, że zbiór  $D$  jest zawarty w kuli ośrodku w  $(0, 0, 0)$  i promieniu  $K$ .
- (b) Jeśli  $\|x\| \leq K$ , to  $|x_i| \leq K$  dla  $i = 1, 2, \dots, n$ . Zatem współrzędne punktów ze zbioru ograniczonego  $D$  są wspólnie ograniczone. Odwrotnie, jeśli współrzędne punktów z  $D$  są wspólnie ograniczone, tzn.  $|x_i| \leq K$  dla  $i = 1, 2, \dots, n$  i  $x \in D$ , to

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \leq \sqrt{nK^2} = K\sqrt{n}.$$

**Definicja 5.20.** Mówimy, że zbiór  $D \subset \mathbb{R}^d$  jest domknięty, jeśli dla dowolnego ciągu  $x^{(n)} \in D$  z warunku  $\|x^{(n)} - x\| \xrightarrow{n} 0$  wynika  $x \in D$ .

**Przykład.** Dla funkcji ciągłej  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  zbiór  $\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \leq c\}$  jest domknięty. Rzeczywiście, niech  $f(x^{(n)}) \leq c$  oraz  $\|x^{(n)} - x\| \xrightarrow{n} 0$ . Wtedy z ciągłości mamy  $f(x) = \lim_n f(x^{(n)})$ . Zatem  $f(x) \leq c$ . Również zbiór postaci  $\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) = c\}$  jest domknięty bo

$$\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) = c\} = \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \leq c\} \cap \{x \in \mathbb{R}^d : -f(x) \leq -c\}.$$

Zbiory

$$B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}, \quad S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

są domknięte.

**Definicja 5.21.** Zbiór  $D \subset \mathbb{R}^d$  nazywamy *zwartym*, jeśli  $D$  jest domknięty i ograniczony.

**Twierdzenie 5.22.** Funkcja ciągła określona na zbiorze zwartym jest ograniczona i osiąga swoje kresy dolny i górny.

**Lemat 5.23.** Niech  $D$  będzie zwartym podzbiorem w  $\mathbb{R}^d$ . Każdy ciąg  $x^{(n)}$  punktów z  $D$  zawiera podciąg zbieżny do punktu ze zbioru  $D$ .

*Dowód.* Wiemy, że ciągi współrzędnych  $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_d^{(n)}$  są ograniczone. Z twierdzenia Bolzano-Weierstrassa istnieje ciąg wskaźników  $n_k$  taki, że ciągi  $x_1^{(n_k)}, x_2^{(n_k)}, \dots, x_d^{(n_k)}$  są zbieżne. Oznaczmy  $\lim_k x_i^{(n_k)} = x_i$ . Wtedy dla  $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$  mamy  $\|x^{(n_k)} - x\| \xrightarrow{k} 0$ . Z domkniętości zbioru  $D$  mamy  $x \in D$ .  $\square$

*Dowód twierdzenia.* Załóżmy nie wprost, że istnieje ciąg  $x^{(n)} \in D$  taki, że  $|f(x^{(n)})| > n$ . Z ciągu  $x^{(n)}$  wybieramy podciąg  $x^{(n_k)}$  zbieżny np. do  $x$ . Z ciągłości mamy  $f(x^{(n_k)}) \xrightarrow{k} f(x)$ . Ale  $|f(x^{(n_k)})| > n_k \xrightarrow{k} \infty$ . Dowód drugiej części tezy można przeprowadzić tak samo jak dowód Twierdzenia 3.18 z części I.  $\square$

Dla funkcji  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  odwzorowanie  $x \mapsto \nabla f(x)$  nazywamy gradientowym polem wektorowym. Dla  $n = 3$  wykres pola leży w  $\mathbb{R}^6$ .

**Przykład.** W początku układu  $\mathbb{R}^3$  umieszczamy dużą masę  $M$ . Na masę  $m$  umieszczoną w punkcie  $(x, y, z)$  działa siła przyciągania

$$F(x, y, z) = -\frac{GMm}{r^2} \vec{n}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \vec{n} = \frac{(x, y, z)}{r}.$$

Określamy funkcję

$$V(x, y, z) = \frac{GMm}{r}.$$

Funkcję  $V(x, y, z)$  nazywamy potencjałem grawitacyjnym. Mamy  $\nabla V = F$ . Rzeczywiście

$$\nabla \left( \frac{1}{r} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right), \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{r} \right), \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right) \right)$$

oraz

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = -\frac{1}{2} \frac{2x}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} = -\frac{x}{r^3}.$$

Zatem

$$\nabla \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^3}(x, y, z) = -\frac{1}{r^2} \vec{n}.$$

## 5.6 Ekstrema funkcji wielu zmiennych

**Definicja 5.24.** Załóżmy, że funkcja ciągła  $f$  o wartościach rzeczywistych jest określona na podzbiórze  $\mathbb{R}^n$ . Mówimy, że punkt  $x_0$  jest lokalnym minimum funkcji  $f$ , jeśli dla pewnej liczby  $\delta > 0$  mamy  $f(x) \geq f(x_0)$  dla  $\|x - x_0\| < \delta$ .

**Przykłady.**

- (a)  $f(x, y) = x^2 + y^2$ . W punkcie  $(0, 0)$  występuje minimum.
- (b)  $g(x, y) = x^2 - y^2$ . W punkcie  $(0, 0)$  nie ma lokalnego minimum ani maksimum.

**Twierdzenie 5.25.** Załóżmy, że  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  jest różniczkowalna i posiada lokalne ekstremum w punkcie  $x_0$ . Wtedy  $\nabla f(x_0) = 0$ .

*Dowód.* Ustalmy wektor  $v \in \mathbb{R}^n$ . Rozważamy funkcję  $g(t) = f(x_0 + tv)$ . Jeśli  $x_0$  jest lokalnym minimum funkcji  $f(x)$ , to funkcja  $g(t)$  posiada lokalne minimum w punkcie  $t = 0$ . Zatem  $g'(0) = 0$ . Ale

$$0 = g'(0) = \left. \frac{d}{dt} f(x_0 + tv) \right|_{t=0} = \nabla f(x_0) \circ v.$$

Ponieważ  $v$  jest dowolnym wektorem, to  $\nabla f(x_0) = 0$ .<sup>6</sup> □

<sup>6</sup>Jeśli  $a \circ v = 0$  dla  $v \in \mathbb{R}^n$ , to  $a = 0$ . Rzeczywiście  $\|a\|^2 = a \circ a = 0$ .

**Definicja 5.26.** Punkty  $x_0$ , dla których  $\nabla f(x_0) = 0$  nazywamy stacjonarnymi.

**Definicja 5.27.** Mówimy, że funkcja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  jest klasy  $C^2$  jeśli jest dwukrotnie różniczkowalna i wszystkie pochodne cząstkowe drugiego rzędu są ciągłe. Dla funkcji klasy  $C^2$  macierz

$$Hf(x) = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)_{i,j=1}^n$$

nazywamy hessianem. Hessjan jest macierzą symetryczną, bo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x).$$

**Definicja 5.28.** Macierz kwadratowa  $A$  wymiaru  $n \times n$  jest dodatnio określona, jeśli  $Av \circ v > 0$  dla  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $v \neq 0$ .

**Uwaga.**

$$Av \circ v = \sum_{i=1}^n (Av)_i v_i = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j \right) v_i = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_i v_j.$$

**Lemat 5.29.** Dla macierzy dodatnio określonej  $A$  istnieje liczba  $\delta > 0$  taka, że jeśli  $|b_{ij} - a_{ij}| < \delta$ , to macierz  $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$  też jest dodatnio określona.

*Dowód.* Wystarczy sprawdzić, że  $Bv \circ v > 0$  dla  $\|v\| = 1$ . Rzeczywiście, każdy wektor  $w \neq 0$  można zapisać jako  $w = \lambda v$ , gdzie  $\|v\| = 1$ , oraz  $\lambda = \|w\|$ . Wtedy  $Bw \circ w = \lambda^2 Bv \circ v$ . Zbiór  $S = \{v \in \mathbb{R}^n : v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2 = 1\}$  jest zwarty. Funkcja

$$S \ni v \mapsto Av \circ v = \sum_{i,j}^n a_{ij} v_i v_j$$

jest ciągła. Ta funkcja osiąga minimum w pewnym punkcie  $v_0$  na zbiorze  $S$ . Tzn.

$$Av \circ v \geq Av_0 \circ v_0 =: m > 0, \quad \text{dla } v \in S.$$

Załóżmy, że  $|b_{ij} - a_{ij}| < \delta$ . Wtedy dla  $\|v\| = 1$  mamy

$$\begin{aligned} Bv \circ v &= Av \circ v + (B - A)v \circ v \geq m + \sum_{i,j=1}^n (b_{ij} - a_{ij})v_i v_j \\ &\geq m - \sum_{i,j=1}^n |b_{ij} - a_{ij}| |v_i| |v_j| \geq m - \delta \sum_{i,j=1}^n |v_i| |v_j| \\ &= m - \delta \left( \sum_{i=1}^n |v_i| \right)^2 \geq m - n^2 \delta. \end{aligned}$$

Przyjmijmy  $\delta = \frac{m}{2n^2}$ . Wtedy  $Bv \circ v > 0$ . □

**Twierdzenie 5.30.** *Załóżmy, że funkcja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  jest klasy  $C^2$  oraz  $\nabla f(x_0) = 0$  dla pewnego punktu  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ .*

- (i) *Jeśli macierz  $Hf(x_0)$  jest dodatnio określona, to w punkcie  $x_0$  funkcja  $f(x)$  posiada lokalne minimum.*
- (ii) *Jeśli macierz  $-Hf(x_0)$  jest dodatnio określona, to w punkcie  $x_0$  funkcja  $f(x)$  posiada lokalne maksimum.*
- (iii) *Jeśli macierz  $Hf(x_0)$  posiada wartości własne różnych znaków, to w punkcie  $x_0$  nie ma lokalnego ekstremum.*

*Dowód.* (i) Zastosujemy oznaczenie  $x := x_0$ . Ustalmy wektor  $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$  i rozważmy funkcję jednej zmiennej  $g(t) = f(x + tv)$ . Z reguły łańcucha mamy

$$g'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + tv)v_i = \nabla f(x + tv) \circ v.$$

Zatem  $g'(0) = \nabla f(x) \circ v = 0$ . Obliczamy  $g''(t)$ .

$$\begin{aligned} g''(t) &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + tv)v_i \right) = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + tv) \right) v_i \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x + tv)v_j v_i = Hf(x + tv)v \circ v. \end{aligned}$$

Zatem  $g''(0) = Hf(x)v \circ v > 0$ . To oznacza, że funkcja  $g(t)$  posiada ściśle lokalne minimum w punkcie  $t = 0$ . Ze wzoru MacLaurina dla  $n = 2$  otrzymujemy

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \frac{1}{2}g''(\theta t)t^2$$



dla pewnej wartości  $0 < \theta < 1$ . Dla  $t = 1$  otrzymujemy

$$f(x + v) = f(x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \tilde{h}_{ij} v_i v_j,$$

gdzie

$$\tilde{h}_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x + \theta v).$$

Jeśli wektor  $v$  ma odpowiednio małą normę, to liczby  $\tilde{h}_{ij}$  leżą blisko liczb  $h_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$ , z założenia o ciągłości drugich pochodnych cząstkowych.

Wtedy z lematu macierz  $\tilde{H} = (\tilde{h}_{ij})_{i,j=1}^n$  jest dodatnio określona, jeśli tylko norma  $\|v\|$  jest odpowiednio mała, np.  $\|v\| < \eta$  dla pewnej liczby  $\eta > 0$ . Wtedy

$$f(x + v) = f(x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \tilde{h}_{ij} v_i v_j > f(x)$$

dla  $0 < \|v\| < \eta$ .

Założmy, że macierz  $Hf(x)$  ma wartości własne  $\lambda_1 > 0$  i  $\lambda_2 < 0$ . Niech  $v_1$  i  $v_2$  oznaczają odpowiadające jednostkowe wektory własne. Rozważmy funkcje

$$g_1(t) = f(x + tv_1), \quad g_2(t) = f(x + tv_2).$$

Wtedy pochodne tych funkcji w  $t = 0$  zerują się. Ponadto

$$g_1''(0) = Hf(x)v_1 \circ v_1 = \lambda_1 v_1 \circ v_1 = \lambda_1 > 0,$$

$$g_2''(0) = Hf(x)v_2 \circ v_2 = \lambda_2 v_2 \circ v_2 = \lambda_2 < 0.$$

Zatem  $g_1$  posiada ściśle lokalne minimum w punkcie 0, natomiast  $g_2$  posiada ściśle lokalne maksimum w tym punkcie. To oznacza, że na prostej  $t \mapsto x + tv_1$  funkcja  $f$  posiada minimum w punkcie  $x$  natomiast na prostej  $t \mapsto x + tv_2$  ma w punkcie  $x$  lokalne maksimum.  $\square$

**Uwaga.** Wektory  $v_1$  i  $v_2$  z ostatniej części dowodu są do siebie prostopadłe.

**Zadanie.** Znaleźć funkcję  $f(x, y)$  taką, że funkcja  $t \mapsto f(tu, tv)$  przyjmuje minimum dla  $t = 0$  dla dowolnego wektora  $(u, v) \neq 0$ , ale  $f(x, y)$  nie posiada minimum w punkcie  $(0, 0)$ .

## 5.7 Ekstrema warunkowe-metoda mnożników Lagrange'a

Często chcemy znaleźć maksimum i minimum funkcji wielu zmiennych, ale przy pewnych ograniczeniach.

**Przykład.** Firma sprzedaje produkty  $A$  i  $B$ . Zysk ze sprzedaży wynosi  $f(x, y)$ , gdzie  $x$  i  $y$  oznaczają ilości sprzedanych produktów  $A$  i  $B$ , odpowiednio. Ze względu na ograniczone zasoby finansowe musi być spełniony warunek  $g(x, y) = c$ .

**Twierdzenie 5.31** (Lagrange). *Załóżmy, że funkcje  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  i  $g : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  są klasy  $C^1$ . Niech  $S = \{x \in U : g(x) = c\}$ . Jeśli funkcja  $f|_S$  przyjmuje minimum lub maksimum w punkcie  $x_0$  oraz  $\nabla g(x_0) \neq 0$ , to  $\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$  dla pewnej stałej  $\lambda$ . Tzn. gradienty  $\nabla f(x_0)$  i  $\nabla g(x_0)$  są równoległe.*

*Dowód nieściśły.* Wiemy, że przestrzeń styczna do poziomuicy  $S$  w punkcie  $x_0$  składa się z wektorów prostopadłych do  $\nabla g(x_0)$ . Niech  $\sigma(t) : (-1, 1) \rightarrow S$  będzie krzywą klasy  $C^1$  przechodzącą przez  $x_0$  w chwili  $t = 0$ , tzn.  $\sigma(0) = x_0$ . Wtedy funkcja złożona  $f(\sigma(t))$  przyjmuje ekstremum w chwili  $t = 0$ . Zatem

$$0 = \left. \frac{d}{dt} f(\sigma(t)) \right|_{t=0} = Df(\sigma(t))\sigma'(t) \Big|_{t=0} = Df(x_0)\sigma'(0) = \nabla f(x_0) \circ \sigma'(0).$$

$\sigma'(0)$  jest wektorem stycznym do  $S$  w punkcie  $x_0$ . Tzn. gradient  $\nabla f(x_0)$  jest prostopadły do każdego wektora stycznego do  $S$  w punkcie  $x_0$ . Np. jeśli  $v$  jest takim wektorem stycznym, to istnieje krzywa  $\sigma : (-1, 1) \rightarrow S$  taka, że  $\sigma(0) = x_0$  i  $\sigma'(0) = v$ . Zatem  $\nabla f(x_0)$  jest prostopadły do przestrzeni stycznej do  $S$  w punkcie  $x_0$ . Ale  $\nabla g(x_0)$  jest też prostopadły do tej przestrzeni stycznej. To oznacza, że  $\nabla f(x_0)$  i  $\nabla g(x_0)$  są równoległe.  $\square$

**Uwaga.** Nieściśłość polega na tym, że dla wektora  $v$  z przestrzeni stycznej do  $S$  w  $x_0$  trzeba znaleźć krzywą  $\sigma(t)$  taką, że  $\sigma(t) \in S$  oraz  $\sigma(0) = x_0$ ,  $\sigma'(0) = v$ . Taką krzywą można łatwo znaleźć, gdy poziomica  $S$  jest wykresem funkcji  $n - 1$  zmiennych.

**Przykład.** Załóżmy, że  $S = \{(x, y, z) : g(x, y, z) = 0\}$ . Przypuśćmy, że  $g(x, y, z) = h(x, y) - z$ . Wtedy  $S$  jest wykresem funkcji  $z = h(x, y)$ . Niech  $(x_0, y_0, z_0)$  będzie punktem z  $S$ , tzn.  $z_0 = h(x_0, y_0)$ . Rozważmy krzywą

$$\sigma(t) = (x_0 + at, y_0 + bt, h(x_0 + at, y_0 + bt)).$$

Wtedy

$$\sigma'(0) = (a, b, c), \quad \text{gdzie } c = \nabla h(x_0, y_0) \circ (a, b),$$

jest wektorem stycznym do  $S$  w punkcie  $(x_0, y_0, z_0)$ . Przestrzeń złożona z takich wektorów ma wymiar 2. Ale przestrzeń styczna do  $S$  w punkcie  $(x_0, y_0, z_0)$  ma również wymiar 2. Zatem przestrzenie te są równe.

### 5.7.1 Stosowanie metody Lagrange'a

Trzeba znaleźć punkt  $x \in U$  i stałą  $\lambda$  takie, że

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ g(x_1, x_2, \dots, x_n) &= c \end{aligned}$$

Mamy układ  $n + 1$  równań z  $n + 1$  zmiennymi  $x_1, x_2, \dots, x_n$  i  $\lambda$ .

#### Przykłady.

- (a) Niech  $S$  będzie prostą przechodzącą przez  $(-1, 0)$  o nachyleniu  $45^\circ$ . Chcemy znaleźć minimum funkcji  $f(x, y) = x^2 + y^2$  na  $S$ . Prosta ma równanie  $y = x + 1$ . Możemy rozwiązać zadanie na dwa sposoby.
- (i) Podstawiamy  $y = x + 1$  do funkcji  $f(x, y)$  i obliczamy minimum funkcji kwadratowej.
  - (ii) Stosujemy metodę Lagrange'a. Prosta  $S$  jest poziomą funkcji  $g(x, y) = x - y + 1 = 0$ . Mamy  $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$  oraz  $\nabla g(x, y) = (1, -1)$ . Gradienty są równoległe tylko wtedy, gdy  $y = -x$ . W połączeniu z równaniem  $y = x + 1$  otrzymamy  $x = -\frac{1}{2}$ ,  $y = \frac{1}{2}$ .
- (b)  $f(x, y) = x^2 - y^2$ ,  $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ .
- (i) Podstawiamy  $y^2 = 1 - x^2$ . Wtedy  $f(x, y) = 2x^2 - 1$ . Obliczamy ekstrema na przedziale  $[-1, 1]$ .
  - (ii) Parametryzujemy okrąg  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$  i obliczamy ekstrema funkcji  $\cos 2t$ .

(iii)  $\nabla f(x, y) = (2x, -2y)$  oraz  $\nabla g(x, y) = (2x, 2y)$ . Wektory są równoległe, gdy  $x = 0$  lub  $y = 0$ . Otrzymujemy cztery rozwiązania  $(\pm 1, 0)$  i  $(0, \pm 1)$ . Mamy  $f(\pm 1, 0) = 1$  oraz  $f(0, \pm 1) = -1$ .

(c)  $f(x, y, z) = x + z$ ,  $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ . Mamy

$$\nabla f(x, y, z) = (1, 0, 1), \quad \nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, 2z).$$

Wektory te są równoległe, gdy  $y = 0$  oraz  $z = x$ . Zatem  $2x^2 = 1$ . Otrzymujemy dwa rozwiązania  $\pm \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  oraz

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}, \quad f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2}.$$

(d) Rozważmy macierz symetryczną  $A$  wymiaru  $n \times n$ . Określamy

$$f(x) = (Ax, x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Chcemy znaleźć ekstrema funkcji  $f(x)$  na

$$S = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : g(x) := x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1\}.$$

Określmy

$$F(x, y) = (Ax, y) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i y_j.$$

Wtedy  $f(x) = F(x, x)$ . Obliczamy pomocniczo pochodne cząstkowe funkcji  $F$ .

$$\frac{\partial F}{\partial x_k}(x, y) = \sum_{j=1}^n a_{kj}y_j, \quad \frac{\partial F}{\partial y_k}(x, y) = \sum_{i=1}^n a_{ik}x_i.$$

Mamy zatem

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) &= \frac{\partial F}{\partial x_k}(x, x) + \frac{\partial F}{\partial y_k}(x, x) = \sum_{j=1}^n a_{kj}x_j + \sum_{i=1}^n a_{ik}x_i \\ &= \sum_{j=1}^n a_{kj}x_j + \sum_{i=1}^n a_{ki}x_i = 2 \sum_{j=1}^n a_{kj}x_j. \end{aligned}$$

Dalej

$$\frac{\partial g}{\partial x_k}(x) = 2x_k.$$

Otrzymujemy więc układ równań

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j &= \lambda x_1, \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j &= \lambda x_2, \\ &\vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j &= \lambda x_n. \end{aligned}$$

To oznacza, że  $Ax = \lambda x$ . Czyli  $x$  jest wektorem własnym o długości 1. Uporządkujmy wartości własne macierzy  $A$  według wielkości:  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ . Niech  $v_1, v_2, \dots, v_n$  oznaczają odpowiadające wektory własne o długości 1. Wtedy

$$f(v_k) = (Av_k, v_k) = \lambda_k(v_k, v_k) = \lambda_k.$$

Reasumując

$$\min_{\|x\|=1} (Ax, x) = \lambda_1, \quad \max_{\|x\|=1} (Ax, x) = \lambda_n.$$

### 5.7.2 Procedura znajdowania wartości największej i najmniejszej funkcji na zbiorze zwartym

1. Znaleźć punkty krytyczne funkcji wewnątrz zbioru, tzn. punkty stacjonarne oraz punkty, w których nie można obliczyć pochodnych cząstkowych.
2. Znaleźć punkty krytyczne funkcji obciętej do brzegu zbioru, np. metodą mnożników Lagrange'a.
3. Obliczyć wartości funkcji w znalezionych punktach.
4. Wybrać wartość największą i najmniejszą.

### 5.7.3 Metoda mnożników Lagrange'a przy kilku warunkach

Załóżmy, że powierzchnia  $S \subset \mathbb{R}^n$  jest określona przez  $k$  warunków

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= c_1, \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= c_2, \\ &\vdots \\ g_k(x_1, x_2, \dots, x_n) &= c_k. \end{aligned}$$

**Twierdzenie 5.32.** *Jeśli funkcja  $f|_S$  posiada ekstremum w punkcie  $x_0 \in S$ , to*

$$\nabla f(x_0) = \lambda_1 \nabla g_1(x_0) + \lambda_2 \nabla g_2(x_0) + \dots + \lambda_k \nabla g_k(x_0)$$

dla pewnych stałych  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ .

**Uwaga.** Aby znaleźć punkt  $x_0$  trzeba rozwiązać  $n + k$  równań przy  $n + k$  niewiadomych.

**Przykład.** Znaleźć ekstrema funkcji  $f(x, y, z) = y + z$  przy warunkach  $x^2 + z^2 = 1$  i  $y^2 + z^2 = 4$ . Możemy przyjąć  $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2$  oraz  $g_2(x, y, z) = y^2 + z^2$ . Rozwiązujemy równanie  $\nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2$ . Otrzymujemy 3 równania

$$\begin{aligned} 0 &= 2\lambda_1 x, \\ 1 &= 2\lambda_2 y, \\ 1 &= 2\lambda_1 z + 2\lambda_2 z. \end{aligned}$$

Rozpatrzmy dwa przypadki.

(a)  $x = 0$ . Wtedy  $z = \pm 1$  oraz  $y = \pm\sqrt{3}$ .

(b)  $\lambda_1 = 0$ . Wtedy  $y = z$ , zatem  $z^2 = 2$ . Otrzymujemy sprzeczność z warunkiem  $x^2 + z^2 = 1$ .

Wartość największa jest osiągnięta w punkcie  $(0, \sqrt{3}, 1)$  a wartość najmniejsza w  $(0, -\sqrt{3}, -1)$ .

*Nieściśły dowód twierdzenia.* Niech  $\sigma(t)$  będzie krzywą klasy  $C^1$  leżącą w powierzchni  $S$  taką, że  $\sigma(0) = x_0$ . Mamy

$$g_j(\sigma(t)) = c_j, \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots, k.$$

Zatem

$$0 = \frac{d}{dt}g_j(\sigma(t)) = \nabla g_j(\sigma(t)) \circ \sigma'(t).$$

Dla  $t = 0$  otrzymujemy

$$\nabla g_j(x_0) \circ \sigma'(0) = 0, \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots, k.$$

To oznacza, że wektor  $\sigma'(0)$  jest prostopadły do wektorów

$$\nabla g_1(x_0), \nabla g_2(x_0), \dots, \nabla g_k(x_0).$$

Wektor  $\sigma'(0)$  jest styczny do powierzchni  $S$  w punkcie  $x_0$ . Wymiar przestrzeni liniowej  $V_1$  rozpiętej przez wszystkie wektory styczne  $\sigma'(0)$  wynosi  $n - k$ . Z kolei wymiar przestrzeni  $V_2$  rozpiętej przez wektory  $\nabla g_1(x_0), \nabla g_2(x_0), \dots, \nabla g_k(x_0)$  wynosi  $k$ , o ile gradienty są liniowo niezależne. Ale  $V_1$  i  $V_2$  są do siebie prostopadłe, zatem  $V_1^\perp = V_2$ . Rozważmy funkcję  $t \mapsto f(\sigma(t))$ . Funkcja ta osiąga ekstremum dla  $t = 0$ . Czyli

$$0 = \left. \frac{d}{dt}f(\sigma(t)) \right|_{t=0} = \nabla f(x_0) \circ \sigma'(0),$$

dla dowolnej wyżej opisanej krzywej  $\sigma$ . Zatem  $\nabla f(x_0) \in V_1^\perp = V_2$ . □

## 5.8 Twierdzenie o funkcji uwikłanej

Z teorii funkcji jednej zmiennej  $y = f(x)$  wiemy, że jeśli  $f$  jest klasy  $C^1$  oraz  $f'(x_0) \neq 0$ , to równanie  $f(x) = y$  dla  $y$  w pobliżu  $y_0 = f(x_0)$  ma jednoznaczne rozwiązanie  $x = f^{-1}(y)$  leżące w pobliżu  $x_0$ . Rzeczywiście, rozważmy przypadek  $f'(x_0) > 0$ . Zatem  $f'(x) > 0$  dla  $x$  w pewnym przedziale wokół  $x_0$ , np. w  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ . Wtedy  $f(x)$  jest ściśle rosnąca w  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ . Zatem posiada funkcję odwrotną  $x = g(y)$ . Proces odwracania jest ważny również dla funkcji wielu zmiennych.

**Przykład.** Współrzędne biegunowe na płaszczyźnie punktu  $(x, y)$  wyrażają się wzorami  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ . Dla  $x, y > 0$  mamy

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctg \frac{y}{x}.$$

Rozważmy równanie  $F(x, y, z) = 0$ . Przypuśćmy, że  $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ . Interesuje nas obliczenie zmiennej  $z$  z równania w pobliżu  $(x_0, y_0, z_0)$ . Tzn. chcemy, aby dla  $(x, y)$  blisko  $(x_0, y_0)$  znaleźć  $z$  blisko  $z_0$  tak, aby  $F(x, y, z) = 0$ . Np. niech  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$  oraz  $F(0, 0, 1) = 0$ . Wtedy

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

jest rozwiązaniem równania. Podobnie dla  $F(0, 0, -1)$  rozwiązaniem jest

$$z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Z kolei dla  $F(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$  mamy dwa rozwiązania

$$z = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

lub brak rozwiązań, jeśli  $x^2 + y^2 > 1$ .

**Twierdzenie 5.33.** *Załóżmy, że funkcja  $F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  jest klasy  $C^1$ . Będziemy stosować oznaczenie  $(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$ . Załóżmy, że*

$$F(x_0, z_0) = 0, \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, z_0) \neq 0.$$

*Wtedy równanie  $F(x, z) = 0$  ma jednoznaczne rozwiązanie w pobliżu  $(x_0, z_0)$ . Tzn. istnieje kula otwarta  $U \subset \mathbb{R}^n$  o środku w  $x_0$  oraz przedział otwarty  $V$  wokół  $z_0$  takie, że dla dowolnego wyboru  $x \in U$  istnieje jedyne rozwiązanie  $z \in V$  takie, że  $F(x, z) = 0$ . Ponadto funkcja  $z = g(x)$  jest klasy  $C^1$  na  $U$ .*

**Przykład.** Dla funkcji  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$  mamy

$$\frac{\partial F}{\partial z}(0, 0, \pm 1) = \pm 2, \quad \frac{\partial F}{\partial z}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = 0.$$

**Uwaga.** Przyjmijmy, że funkcja  $F(x_1, x_2, \dots, x_n, z)$  jest liniowa. Możemy obliczyć zmienną  $z$  z równania  $F(x, z) = 0$ , o ile współczynnik przy zmiennej  $z$  jest niezerowy. Tzn.  $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ .

Twierdzenie nabiera istotnego znaczenia, gdy nie jesteśmy w stanie obliczyć  $z = g(x)$  jawnym wzorem. Okazuje się jednak, że wiele informacji o



funkcji  $g$  można uzyskać mimo braku jawnego wzoru. Wiemy, że  $z_0 = g(x_0)$  oraz  $F(x, g(x)) = 0$  dla  $x \in U$ . Zatem

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_i} F(x, g(x)) = \frac{\partial F}{\partial x_i}(x, g(x)) + \frac{\partial F}{\partial z}(x, g(x)) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x).$$

Otrzymujemy

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x, g(x))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, g(x))}.$$

Z założenia  $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, z_0) \neq 0$ , zatem  $\frac{\partial F}{\partial z}(x, g(x)) \neq 0$ , dla  $x$  w pobliżu  $x_0$ , bo funkcje  $F$  i  $g$  są klasy  $C^1$ . Podstawiamy  $x = x_0$ , aby otrzymać

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_0, z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, z_0)}. \quad (5.6)$$

### Przykłady.

- (a) Rozważamy równanie  $F(x, y, z) = xy + z + 3xz^5 = 4$  i rozwiązanie  $(1, 0, 1)$ . Wtedy

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial z}(1, 0, 1) &= 1 + 15xz^4 \Big|_{(1,0,1)} = 16, \\ \frac{\partial F}{\partial x}(1, 0, 1) &= y + 3z^5 \Big|_{(1,0,1)} = 3, \\ \frac{\partial F}{\partial y}(1, 0, 1) &= x \Big|_{(1,0,1)} = 1. \end{aligned}$$

Na podstawie wzoru (5.6) otrzymujemy

$$\frac{\partial g}{\partial x}(1, 0) = -\frac{3}{16}, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(1, 0) = -\frac{1}{16}.$$

- (b) Niech  $F(x, y, z) := x^3 + 3y^2 + 8xz^2 - 3yz^3 = 1$ . W pobliżu jakich punktów powierzchnia zadana równaniem może być przedstawiona jako wykres funkcji  $z = g(x, y)$ ? Obliczamy

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 16xz - 9yz^2 \neq 0.$$

Zatem muszą być spełnione warunki  $z \neq 0$  oraz  $16x - 9yz \neq 0$ .

Jeśli chcemy obliczyć  $x = h(y, z)$ , to

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + 8z^2 \neq 0.$$

Wystarczy zatem, aby  $x \neq 0$  lub  $z \neq 0$ .

**Wniosek 5.34.** *Jeśli funkcja  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  spełnia  $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$  oraz  $\nabla f(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq 0$ , to z równania*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

*można obliczyć jedną zmienną względem pozostałych w pobliżu  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ .*

*Dowód.* Oznaczmy  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ . Z założenia  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \neq 0$  dla pewnej wartości  $i$ . Przez zmianę numeracji możemy przyjąć, że  $\frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \neq 0$ . Funkcja  $f$  zależy od  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  oraz od  $z = x_n$ . Z poprzedniego twierdzenia z równania

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, z) = 0$$

można obliczyć  $z$  w zależności od  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ . □

*Dowód twierdzenia.* Z założenia mamy  $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, z_0) \neq 0$ . Rozważymy przypadek  $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, z_0) > 0$ . Z ciągłości pochodnych cząstkowych można znaleźć liczby dodatnie  $a$  i  $b$  takie, że jeśli  $\|x - x_0\| \leq a$  oraz  $|z - z_0| \leq a$ , to  $\frac{\partial F}{\partial z}(x, z) > b$ . Zbiór określony warunkami  $\|x - x_0\| \leq a$ ,  $|z - z_0| \leq a$  jest domknięty i ograniczony, zatem z ciągłości pochodnych cząstkowych mamy

$$\left| \frac{\partial F}{\partial x_i}(x, z) \right| \leq M, \quad \left| \frac{\partial F}{\partial z}(x, z) \right| \leq M \quad \text{dla } \|x - x_0\| \leq a, \quad |z - z_0| \leq a.$$

**Lemat 5.35.** *Dla funkcji  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  klasy  $C^1$  mamy*

$$f(x) - f(x_0) = \nabla f(x_0 + \theta(x - x_0)) \circ (x - x_0)$$

*dla pewnej liczby  $\theta$ ,  $0 < \theta < 1$ .*

*Dowód lematu.* Określamy funkcję  $g(t) = f(x_0 + t(x - x_0))$  przy ustalonych punktach  $x$  i  $x_0$ . Wtedy z twierdzenia Lagrange'a otrzymujemy

$$f(x) - f(x_0) = g(1) - g(0) = g'(\theta) = \nabla f(x_0 + \theta(x - x_0)) \circ (x - x_0).$$

□

Z lematu mamy

$$\begin{aligned} F(x, z) &= F(x, z) - F(x_0, z_0) \\ &= \nabla F(x_0 + \theta(x - x_0), z_0 + \theta(z - z_0)) \circ (x - x_0, z - z_0) \end{aligned}$$

Oznaczmy

$$x_\theta = x_0 + \theta(x - x_0), \quad z_\theta = z_0 + \theta(z - z_0), \quad \nabla_x F = \left( \frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right).$$

Wtedy

$$F(x, z) = \nabla_x F(x_\theta, z_\theta) \circ (x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(x_\theta, z_\theta)(z - z_0). \quad (5.7)$$

Dla  $\|x - x_0\| \leq a$ ,  $|z - z_0| \leq a$  mamy  $\|x_\theta - x_0\| \leq a$  oraz  $|z_\theta - z_0| \leq a$ . Stąd otrzymujemy

$$\|\nabla_x F(x_\theta, z_\theta)\| \leq M\sqrt{n}.$$

Zatem

$$|\nabla_x F(x_\theta, z_\theta) \circ (x - x_0)| \leq M\sqrt{n}\|x - x_0\|. \quad (5.8)$$

Rozważamy tylko  $z = z_0 \pm a$ . Wtedy

$$\left| \frac{\partial F}{\partial z}(x_\theta, z_\theta)(z - z_0) \right| = \left| \frac{\partial F}{\partial z}(x_\theta, z_\theta)(\pm a) \right| > ab.$$

Z (5.7) otrzymujemy

$$\left| F(x, z) - \frac{\partial F}{\partial z}(x_\theta, z_\theta)(z - z_0) \right| = |\nabla_x F(x_\theta, z_\theta) \circ (x - x_0)| \leq M\sqrt{n}\|x - x_0\|.$$

Wybermy liczbę  $0 < \delta \leq a$  taką, że  $M\sqrt{n}\delta < ab$ . Niech  $\|x - x_0\| < \delta$ . Wtedy

$$\left| F(x, z_0 \pm a) - \frac{\partial F}{\partial z}(x_\theta, z_\theta)(\pm a) \right| < M\sqrt{n}\delta < ab < \left| \frac{\partial F}{\partial z}(x_\theta, z_\theta)(\pm a) \right|.$$

**Lemat 5.36.** *Jeśli  $|u - v| < |v|$ , to liczby  $u$  i  $v$  mają ten sam znak.*

Z lematu wynika, że  $F(x, z_0 + a) > 0$  oraz  $F(x, z_0 - a) < 0$ . Z własności Darboux mamy  $F(x, z) = 0$  dla pewnej liczby  $z$  z przedziału  $(z_0 - a, z_0 + a)$ . Takie rozwiązanie jest jedyne w tym przedziale, bo funkcja

$$(z_0 - a, z_0 + a) \ni z \mapsto F(x, z)$$

jest ściśle rosnąca, co wynika z dodatniości pochodnej cząstkowej względem  $z$ . Reasumując pokazaliśmy, że dla  $\|x - x_0\| < \delta$  istnieje jedyne rozwiązanie  $z$  w przedziale  $(z_0 - a, z_0 + a)$  spełniające  $F(x, z) = 0$ . W ten sposób otrzymujemy funkcję  $z = g(x)$ . Sprawdźmy, że  $g$  jest funkcją ciągłą. Załóżmy nie wprost, że  $x_m \rightarrow x$ , ale  $g(x_m) \not\rightarrow g(x)$ . Ciąg  $g(x_m)$  jest ograniczony. Istnieje zatem podciąg  $g(x_{m_k})$  zbieżny do liczby  $\tilde{z} \neq g(x)$  z przedziału  $[z_0 - a, z_0 + a]$ . Mamy

$$0 = F(x_{m_k}, g(x_{m_k})) \xrightarrow[k]{} F(x, \tilde{z}).$$

Stąd  $F(x, \tilde{z}) = 0$ . Ale  $\tilde{z} \neq z_0 \pm a$ , bo  $F(x, z_0 \pm a) \neq 0$ . Czyli  $\tilde{z}$  leży w przedziale  $(z_0 - a, z_0 + a)$ . Ale  $F(x, g(x)) = 0$ , więc otrzymujemy sprzeczność z jednoznacznością rozwiązania.

Zbadamy różniczkowalność funkcji  $g(x)$ . Przyjmujemy  $x = x_0 + he_i$ . Wtedy

$$\nabla_x F(x_\theta, z_\theta) \circ (x - x_0) = \frac{\partial F}{\partial x_i}(x_\theta, z_\theta)h.$$

We wzorze (5.7) podstawiamy  $z = g(x)$ . Lewa strona wzoru zeruje się. Otrzymujemy więc

$$\frac{g(x_0 + he_i) - g(x_0)}{h} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_\theta, z_\theta)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_\theta, z_\theta)}.$$

Mamy

$$\begin{aligned} x_\theta &= x_0 + \theta(x - x_0) = x_0 + \theta he_i \xrightarrow{h \rightarrow 0} x_0, \\ z_\theta &= z_0 + \theta(z - z_0) = g(x_0) + \theta[g(x_0 + he_i) - g(x_0)] \xrightarrow{h \rightarrow 0} g(x_0) = z_0, \end{aligned}$$

bo  $g$  jest ciągła. Zatem

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_0, z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, z_0)}.$$

Ten sam dowód daje

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = - \left. \frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x, z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, z)} \right|_{z=g(x)}.$$

Widzimy, że pochodne cząstkowe funkcji  $g$  są ciągłe, zatem  $g$  jest funkcją różniczkowalną.  $\square$

**Uwaga.** Jeśli wiemy, że funkcja  $z = g(x)$  jest różniczkowalna, to jej pochodne cząstkowe można obliczyć stosując różniczkowanie niejawne. Mamy  $F(x, g(x)) \equiv 0$ . Różniczkujemy względem  $x_i$  aby otrzymać

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x, g(x)) + \frac{\partial F}{\partial z}(x, g(x)) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = 0.$$

Chcemy obliczyć wielkości  $z_1, z_2, \dots, z_m$  z równań

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n; z_1, z_2, \dots, z_m) &= 0, \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n; z_1, z_2, \dots, z_m) &= 0, \\ &\vdots \\ F_m(x_1, x_2, \dots, x_n; z_1, z_2, \dots, z_m) &= 0, \end{aligned} \tag{5.9}$$

i otrzymać rozwiązanie w postaci

$$\begin{aligned} z_1 &= g_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ z_2 &= g_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ z_m &= g_m(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \tag{5.10}$$

Będziemy stosować zapis

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad z = (z_1, z_2, \dots, z_m).$$

Założmy, że  $(x_0, z_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  jest rozwiązaniem układu. Rozważamy wyznacznik

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z_1}(x_0; z_0) & \frac{\partial F_1}{\partial z_2}(x_0; z_0) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial z_m}(x_0; z_0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial z_1}(x_0; z_0) & \frac{\partial F_2}{\partial z_2}(x_0; z_0) & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial z_m}(x_0; z_0) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial z_1}(x_0; z_0) & \frac{\partial F_m}{\partial z_2}(x_0; z_0) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial z_m}(x_0; z_0) \end{vmatrix}$$

**Twierdzenie 5.37** (o funkcji uwikłanej). *Załóżmy, że funkcje  $F_1, F_2, \dots, F_m$  są klasy  $C^1$ . Niech punkt  $(x_0; z_0)$  będzie rozwiązaniem układu równań (5.9) oraz  $\Delta \neq 0$ . Wtedy istnieją liczby  $\delta > 0$  i  $a > 0$  takie, że dla  $\|x - x_0\| < \delta$  istnieje jedyny  $z$  spełniający  $\|z - z_0\| < a$  taki, że  $(x, z)$  jest rozwiązaniem układu równań (5.9). Ponadto funkcje  $z$  (5.10) są klasy  $C^1$ .*

**Przykład.** Czy w pobliżu  $(x, y; u, v) = (1, 1; 1, 1)$  można obliczyć  $u$  i  $v$  z równań

$$\begin{aligned}xu + yuv^2 &= 2, \\xu^3 + y^2v^4 &= 2\end{aligned}$$

jako funkcje zmiennych  $x$  i  $y$ ? Przyjmujemy

$$\begin{aligned}F_1(x, y; u, v) &= xu + yuv^2 - 2, \\F_2(x, y; u, v) &= xu^3 + y^2v^4 - 2.\end{aligned}$$

Mamy

$$\Delta = \begin{vmatrix} x + yv^2 & 2yuv \\ 3xu^2 & 4y^2v^3 \end{vmatrix}_{x=1, y=1, u=1, v=1} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Chcemy obliczyć  $\frac{\partial u}{\partial x}(1, 1)$  i  $\frac{\partial v}{\partial x}(1, 1)$ . Stosujemy różniczkowanie niejawne. Otrzymujemy

$$\begin{aligned}u + x \frac{\partial u}{\partial x} + yv^2 \frac{\partial u}{\partial x} + 2yuv \frac{\partial v}{\partial x} &= 0, \\u^3 + 3xu^2 \frac{\partial u}{\partial x} + 4y^2v^3 \frac{\partial v}{\partial x} &= 0.\end{aligned}$$

Podstawiamy  $x = 1, y = 1, v = 1, u = 1$ . Po uproszczeniu otrzymujemy

$$\begin{aligned}2 \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial v}{\partial x} &= -1, \\3 \frac{\partial u}{\partial x} + 4 \frac{\partial v}{\partial x} &= -1.\end{aligned}$$

Zatem

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1, 1) = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = -1, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(1, 1) = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{1}{2}.$$

*Dowód.* Przyjmijmy oznaczenia  $a = x_0$  i  $b = z_0$ . Wyznacznik  $\Delta$  w punkcie  $(a, b)$  nie znika, zatem jedna z liczb  $\frac{\partial F_j}{\partial z_m}(a; b)$  w ostatniej kolumnie jest niezerowa. Możemy przyjąć, że  $\frac{\partial F_m}{\partial z_m}(a; b) \neq 0$ , ewentualnie zmieniając numerację równań. Na podstawie Twierdzenia 5.33 możemy z równania

$$F_m(x_1, x_2, \dots, x_n; z_1, z_2, \dots, z_m) = 0$$

obliczyć

$$z_m = g(x_1, x_2, \dots, x_n; z_1, z_2, \dots, z_{m-1}) = g(x, \tilde{z}).$$

Ponadto  $g(a, \tilde{b}) = b_m$ . Po podstawieniu  $z_m = g(x, \tilde{z})$  ostatnie równanie staje się tożsamością

$$F_m(x; \tilde{z}, g(x, \tilde{z})) \equiv 0. \quad (5.11)$$

Podstawiamy obliczoną wartość  $z_m$  do pierwszych  $m - 1$  równań. Otrzymamy układ

$$\begin{aligned} H_1(x, \tilde{z}) &:= F_1(x; \tilde{z}, g(x, \tilde{z})) = 0, \\ H_2(x, \tilde{z}) &:= F_2(x; \tilde{z}, g(x, \tilde{z})) = 0, \\ &\vdots \\ H_{m-1}(x, \tilde{z}) &:= F_{m-1}(x; \tilde{z}, g(x, \tilde{z})) = 0. \end{aligned}$$

Chcemy obliczyć  $z_1, z_2, \dots, z_{m-1}$  z nowego układu równań. Mamy rozwiązanie  $x = a, \tilde{z} = \tilde{b}$ , bo wtedy  $g(a; \tilde{b}) = b_m$ . Sprawdzamy, czy założenia twierdzenia o funkcji uwikłanej są spełnione dla nowego układu. Obliczamy

$$\frac{\partial H_i}{\partial z_j} = \frac{\partial F_i}{\partial z_j} + \frac{\partial F_i}{\partial z_m} \frac{\partial g}{\partial z_j}, \quad j = 1, 2, \dots, m - 1. \quad (5.12)$$

Różniczkujemy tożsamość (5.11) względem  $z_j$ , aby otrzymać

$$\frac{\partial F_m}{\partial z_j} + \frac{\partial F_m}{\partial z_m} \frac{\partial g}{\partial z_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m - 1. \quad (5.13)$$

Rozważamy wyznacznik

$$\Delta(x; \tilde{z}) := \det \left( \frac{\partial F_i}{\partial z_j}(x; \tilde{z}, g(x, \tilde{z})) \right)_{i,j=1,2,\dots,m}.$$

Wiemy, że dla  $x = a$ ,  $\tilde{z} = \tilde{b}$  mamy  $g(a, \tilde{b}) = b_m$ . Zatem

$$\Delta(a; \tilde{b}) \neq 0.$$

W wyznaczniku  $\Delta(x; \tilde{z})$  mnożymy ostatnią kolumnę przez liczbę  $\frac{\partial g}{\partial z_j}(x; \tilde{z})$  i dodajemy do  $j$ -tej kolumny, dla wszystkich  $j = 1, 2, \dots, m-1$ . Otrzymamy

$$\Delta(x, \tilde{z}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z_1} + \frac{\partial F_1}{\partial z_m} \frac{\partial g}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial z_{m-1}} + \frac{\partial F_1}{\partial z_m} \frac{\partial g}{\partial z_{m-1}} & \frac{\partial F_1}{\partial z_m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_{m-1}}{\partial z_1} + \frac{\partial F_{m-1}}{\partial z_m} \frac{\partial g}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial z_{m-1}} + \frac{\partial F_{m-1}}{\partial z_m} \frac{\partial g}{\partial z_{m-1}} & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial z_m} \\ \frac{\partial F_m}{\partial z_1} + \frac{\partial F_m}{\partial z_m} \frac{\partial g}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial z_{m-1}} + \frac{\partial F_m}{\partial z_m} \frac{\partial g}{\partial z_{m-1}} & \frac{\partial F_m}{\partial z_m} \end{vmatrix}$$

Z (5.13) ostatni wiersz zeruje się poza ostatnim elementem. Z (5.12) otrzymujemy więc

$$\Delta(x, \tilde{z}) = \frac{\partial F_m}{\partial z_m} \begin{vmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial z_1}(x; \tilde{z}) & \cdots & \frac{\partial H_1}{\partial z_{m-1}}(x; \tilde{z}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial H_{m-1}}{\partial z_1}(x; \tilde{z}) & \cdots & \frac{\partial H_{m-1}}{\partial z_{m-1}}(x; \tilde{z}) \end{vmatrix},$$

gdzie  $\frac{\partial F_m}{\partial z_m}$  jest obliczone w  $(x; \tilde{z}, g(x, \tilde{z}))$ . Ponieważ  $\Delta(a, \tilde{b}) \neq 0$ , to wyznacznik nowego układu dla  $x = a$ ,  $\tilde{z} = \tilde{b}$  jest różny od zera.

Możemy zatem kontynuować obliczając kolejne zmienne

$$\begin{aligned} z_m &= g_1(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_{m-1}), \\ z_{m-1} &= g_2(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_{m-2}), \\ &\vdots \\ z_2 &= g_{m-1}(x_1, \dots, x_n; z_1), \\ z_1 &= g_m(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Wykonujemy podstawienie wstecz, aby ostatecznie obliczyć zmienne  $z_1, z_2, \dots, z_m$  za pomocą  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .  $\square$

Szczególnym przypadkiem twierdzenia o funkcji uwikłanej jest twierdze-



nie o funkcji odwrotnej. Chcemy z układu równań

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= y_1, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= y_2, \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= y_n, \end{aligned} \tag{5.14}$$

obliczyć  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , jako funkcje od  $y_1, y_2, \dots, y_n$ . Załóżmy, że  $x = a$  i  $y = b$  jest rozwiązaniem układu. Rozważamy

$$\begin{aligned} F_1(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n) &= f_1(x_1, \dots, x_n) - y_1 = 0, \\ F_2(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n) &= f_2(x_1, \dots, x_n) - y_2 = 0, \\ &\vdots \\ F_n(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n) &= f_n(x_1, \dots, x_n) - y_n = 0. \end{aligned}$$

Z twierdzenia o funkcji uwikłanej badamy wyznacznik

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}_{\substack{x=a \\ y=b}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}_{x=a}$$

Wyznacznik

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

nazywamy jacobianem odwzorowań  $f_1, f_2, \dots, f_n$ .

**Twierdzenie 5.38** (o funkcji odwrotnej). *Niech  $U \subset \mathbb{R}^n$  będzie otwartym podzbiorem przestrzeni  $\mathbb{R}^n$ . Rozważamy funkcje  $f_1, f_2, \dots, f_n$  klasy  $C^1$  na  $U$ . Załóżmy, że układ równań (5.14) ma rozwiązanie  $x = a, y = b$  dla  $a \in U$ . Jeśli*

$$\Delta = \det \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right) \neq 0,$$

*to układ ma jednoznaczne rozwiązanie dla  $y$  w pobliżu  $b$  i  $x$  w pobliżu  $a$ . Tzn. istnieje liczba  $\delta > 0$  taka, że dla  $\|y - b\| < \delta$  istnieje jedyny punkt  $x \in U$  taki,*

że  $\|x - a\| < \delta$  oraz  $x$  i  $y$  są rozwiązaniem układu (5.14). Ponadto funkcje

$$\begin{aligned}x_1 &= g_1(y_1, y_2, \dots, y_n), \\x_2 &= g_2(y_1, y_2, \dots, y_n), \\&\vdots \\x_n &= g_n(y_1, y_2, \dots, y_n)\end{aligned}$$

są klasy  $C^1$ .

**Przykład.** Rozważmy układ równań

$$\begin{aligned}\frac{x^4 + y^4}{x} &= u, \\ \sin x + \cos y &= v.\end{aligned}$$

W pobliżu jakich punktów możemy obliczyć  $x$  i  $y$  względem  $u$  i  $v$ ? Obliczamy jacobian

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3x^2 - \frac{y^4}{x^2} & \frac{4y^3}{x} \\ \cos x & -\sin y \end{vmatrix}$$

Powinien być spełniony warunek  $\Delta \neq 0$ . Wyznacznik jest niezerowy dla  $x = \frac{\pi}{2}$  i  $y = \frac{\pi}{2}$ . Zatem można rozwiązać układ w pobliżu  $u = \frac{\pi^3}{4}$  i  $v = 1$ . Rozwiązania będą leżały w pobliżu  $x = \frac{\pi}{2}$ ,  $y = \frac{\pi}{2}$ .

Twierdzenie o funkcji odwrotnej można sformułować w postaci zbliżonej w zapisie do twierdzenia dla jednej zmiennej. Dla funkcji  $f_1, f_2, \dots, f_n : U \rightarrow \mathbb{R}$  tworzymy funkcję  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  wzorem

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Wtedy układ równań w twierdzenia o funkcji odwrotnej ma postać  $f(x) = y$ , gdzie

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Zauważmy, że  $\Delta = \det(Df(a)) \neq 0$ . Załóżmy, że  $f(a) = b$  dla  $a \in U$ . Wtedy dla  $y$  w pobliżu  $b$  istnieje jedyne rozwiązanie  $x$  w pobliżu  $a$ . Ponadto  $x = g(y)$ , gdzie  $g$  jest klasy  $C^1$ . Tzn.  $g$  jest funkcją odwrotną do funkcji  $f$ . Obliczmy  $Dg(y)$ . Mamy

$$g(f(x)) = x.$$

Różniczkujemy obie strony. Wtedy

$$Dg(f(x)) Df(x) = I,$$

czyli

$$Dg(y) = (Df(x))^{-1}, \quad y = f(x).$$

Dla funkcji jednej zmiennej wzory mają postać  $y = f(x)$ ,  $x = g(y)$  oraz

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

**Przykład.** W pobliżu jakich punktów funkcja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$f(x, y) = (x - y, x^5 + y^5)$$

jest odwracalna ?

$$\det Df(x, y) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5x^4 & 5y^4 \end{vmatrix} = 5(x^4 + y^4).$$

Funkcja jest odwracalna poza punktem  $(0, 0)$ .

## 5.9 Różniczka

Rozważmy funkcję różniczkowalną  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Wtedy

$$f(x) \approx f(a) + \nabla f(a) \circ (x - a),$$

gdy  $x, a \in \mathbb{R}^n$  są blisko siebie. Istotnie wiemy, że

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x) - f(a) - \nabla f(a) \circ (x - a)|}{\|x - a\|} = 0.$$

Wyrażenie  $\nabla f(a) \circ (x - a)$  nazywamy różniczką odpowiadającą przyrostowi  $x - a$ . Podobnie dla  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  możemy zapisać  $f(x) \approx f(a) + Df(a)(x - a)$ . Oznaczmy  $Df(a) = A$ . Dla  $x$  blisko  $a$  mamy  $y = f(x) \approx f(a) + A(x - a)$ . Załóżmy, że  $y = f(a) + A(x - a)$ . Wtedy  $x = a + A^{-1}(y - b)$ . W rzeczywistości mamy  $x \approx a + A^{-1}(y - b)$ .

## 6 Całki podwójne

Niech  $R$  będzie prostokątem  $[a, b] \times [c, d]$ . Rozważamy nieujemną funkcję  $f(x, y)$  określoną na  $R$ . Wykres ma postać powierzchni leżącej nad  $R$ . Powierzchnia  $z = f(x, y)$  oraz cztery pionowe płaszczyzny  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $y = c$  i  $y = d$  ograniczają obszar trójwymiarowy  $B$ . Chcemy obliczyć objętość tego obszaru. Założmy, że całka podwójna została określona tak, aby

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy = \text{vol}(B).$$

### Przykłady.

- (a)  $f(x, y) = k$ ,  $k \geq 0$ . Obszar jest prostopadłością o wysokości  $k$ .

$$\int_a^b \int_c^d k dx dy = k(b-a)(d-c).$$

- (b)  $f(x, y) = 1 - x$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ . Obszar jest połową sześcianu o boku 1.

$$\int_0^1 \int_0^1 (1-x) dx dy = \frac{1}{2}.$$

### 6.1 Zasada Cavalieriego

Przy bardziej złożonych funkcjach  $f(x, y)$  możemy zastosować zasadę Cavalieriego. Założmy, że bryła ma własność, że pola przekroju płaszczyznami równoległymi do ustalonej płaszczyzny, w odległości  $x$  od tej płaszczyzny, wynoszą  $A(x)$ . Bryła mieści się pomiędzy płaszczyznami  $x = a$  i  $x = b$ . Wtedy

$$V = \int_a^b A(x) dx.$$

Rozważmy nieujemną funkcję  $f(x, y)$  na  $[a, b] \times [c, d]$ . Pole przekroju płaszczyzną pionową  $x = x_0$  wynosi

$$A(x_0) = \int_c^d f(x_0, y) dy.$$

Zatem objętość bryły wynosi

$$V = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

Można też zastosować cięcia płaszczyznami równoległymi do płaszczyzny pionowej  $y = 0$ . Wtedy

$$V = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

**Przykład.**  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ .

$$V = \int_{-1}^1 \left( \int_0^1 (x^2 + y^2) dy \right) dx = \int_{-1}^1 \left( x^2 + \frac{1}{3} \right) dx = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

## 6.2 Ścisłe określenie całki podwójnej Riemanna

Podziałem prostokąta  $R = [a, b] \times [c, d]$  nazywamy parę  $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ , gdzie  $\mathcal{P}_1$  jest podziałem przedziału  $[a, b]$ , a  $\mathcal{P}_2$  podziałem przedziału  $[c, d]$ :

$$\mathcal{P}_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}, \quad \mathcal{P}_2 = \{y_0, y_1, \dots, y_m\}.$$

Podprzedziałem nazywamy każdy z prostokątów

$$S_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j].$$

Rozważamy funkcję  $f(x, y)$  określoną na  $R$ . Dla podprzedziału  $S$  niech

$$m_S(f) = \inf_{(x,y) \in S} f(x, y), \quad M_S(f) = \sup_{(x,y) \in S} f(x, y).$$

Symbolem  $\Delta S$  oznaczamy pole powierzchni prostokąta  $S$ . Sumy dolne i górne są zdefiniowane wzorami

$$L(\mathcal{P}, f) = \sum_{S \in \mathcal{P}} m_S(f) \Delta S, \quad U(\mathcal{P}, f) = \sum_{S \in \mathcal{P}} M_S(f) \Delta S.$$

**Uwaga.** Jeśli  $f(x, y) \geq 0$ , to objętość obszaru pod wykresem mieści pomiędzy liczbami  $L(\mathcal{P}, f)$  i  $U(\mathcal{P}, f)$ .

Podział  $\mathcal{P}' = (\mathcal{P}'_1, \mathcal{P}'_2)$  nazywamy rozdrobnieniem podziału  $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ , jeśli  $\mathcal{P}'_1$  jest rozdrobnieniem  $\mathcal{P}_1$ , a  $\mathcal{P}'_2$  rozdrobnieniem  $\mathcal{P}_2$ .

**Lemat 6.1.** *Jeśli  $\mathcal{P}'$  jest rozdrobnieniem  $\mathcal{P}$ , to*

$$L(\mathcal{P}, f) \leq L(\mathcal{P}', f), \quad U(\mathcal{P}, f) \geq U(\mathcal{P}', f).$$

Określamy całki dolną i górną wzorami

$$\iint_{\overline{R}} f(x, y) dx dy = \sup_{\mathcal{P}} L(\mathcal{P}, f), \quad \overline{\iint}_R f(x, y) dx dy = \inf_{\mathcal{P}} U(\mathcal{P}, f).$$

Mówimy, że funkcja  $f(x, y)$  jest całkowna jeśli

$$\iint_{\overline{R}} f(x, y) dx dy = \overline{\iint}_R f(x, y) dx dy.$$

**Twierdzenie 6.2.** *Funkcja ograniczona  $f(x, y)$  na prostokącie  $R$  jest całkowna wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej liczby  $\varepsilon > 0$  można znaleźć podział  $\mathcal{P}$  spełniający*

$$U(\mathcal{P}, f) - L(\mathcal{P}, f) < \varepsilon.$$

**Uwaga.** Dowód jest bardzo podobny do przypadku jednej zmiennej. Implikacja  $\Leftarrow$  jest użyteczna.

**Lemat 6.3.** *Każda funkcja ciągła  $f(x)$ , o wartościach liczbowych, określona na zwartym podzbiore  $R \subset \mathbb{R}^2$  jest jednostajnie ciągła, tzn. gdy dwa argumenty funkcji są położone blisko siebie, to również wartości funkcji leżą blisko siebie. Czyli*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in R \|x - y\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

*Dowód nie wprost.* Załóżmy, że istnieje (złośliwa) liczba  $\varepsilon > 0$  taka, że dla  $\delta_n = \frac{1}{n}$  istnieją punkty  $x_n$  i  $y_n$  w  $R$  spełniające

$$\|x_n - y_n\| < \frac{1}{n}, \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Z ciągu  $x_n$  można wybrać zbieżny podciąg  $x_{n_k}$ . Niech  $x_{n_k} \xrightarrow[k]{} x_0$ . Wtedy

$$\|y_{n_k} - x_0\| \leq \|y_{n_k} - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - x_0\| \leq \frac{1}{n_k} + \|x_{n_k} - x_0\| \xrightarrow[k]{} 0.$$

Czyli  $y_{n_k} \xrightarrow[k]{} x_0$ . Zatem  $f(x_{n_k}) \xrightarrow[k]{} f(x_0)$  oraz  $f(y_{n_k}) \xrightarrow[k]{} f(x_0)$ . Otrzymujemy sprzeczność, bo  $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon$ .  $\square$

**Twierdzenie 6.4.** *Funkcja ciągła jest całkowalna na prostokącie.*

*Dowód.* Z jednostajnej ciągłości, jeśli podział  $\mathcal{P}$  jest wystarczająco drobny, to  $U(\mathcal{P}, f) - L(\mathcal{P}, f) < \varepsilon$ .  $\square$

**Twierdzenie 6.5.** *Rozważmy dwie funkcje  $f$  i  $g$ , całkowalne na prostokącie  $R$ . Wtedy*

$$(i) \iint_R (f + g) dx dy = \iint_R f dx dy + \iint_R g dx dy.$$

$$(ii) \iint_R cf dx dy = c \iint_R f dx dy.$$

(iii) *Jeśli  $f(x, y) \leq g(x, y)$  na  $R$ , to*

$$\iint_R f dx dy \leq \iint_R g dx dy.$$

(iv) *Jeśli  $R_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , są prostokątami o bokach równoległych do osi takimi, że  $f$  jest całkowalna na każdym z nich oraz  $R = R_1 \cup \dots \cup R_n$ , to  $f$  jest całkowalna na  $R$  oraz*

$$\iint_R f dx dy = \sum_{i=1}^n \iint_{R_i} f dx dy,$$

*przy założeniu, że wnętrza prostokątów  $R_i$  są rozłączne pomiędzy sobą.*

**Uwaga.** Prostokąty  $R_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , nie muszą tworzyć podziału prostokąta  $R$ . Ale można rozdrobnić każdy z prostokątów  $R_i$ , aby uzyskać podział prostokąta  $R$ .

**Twierdzenie 6.6** (Fubini). *Załóżmy, że funkcja  $f(x, y)$  jest ciągła na prostokącie  $[a, b] \times [c, d]$ . Wtedy*

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

*Dowód.* Rozważamy podziały  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  i  $c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d$ .

$$\begin{aligned} \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left( \sum_{j=1}^m \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x, y) dy \right) dx \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} \underbrace{\left( \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x, y) dy \right)}_{F_j(x)} dx = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} F_j(x) dx. \end{aligned}$$

$F_j(x)$  jest funkcją ciągłą na  $[x_{i-1}, x_i]$ , co wynika z lematu poniżej.

**Lemat 6.7.** *Dla funkcji  $f(x, y)$  ciągłej na  $[a, b] \times [c, d]$  funkcja  $F(x) = \int_c^d f(x, y) dy$  jest ciągła na  $[a, b]$ .*

*Dowód lematu.*

$$|F(x_1) - F(x_2)| = \left| \int_c^d f(x_1, y) dy - \int_c^d f(x_2, y) dy \right| \leq \int_c^d |f(x_1, y) - f(x_2, y)| dy.$$

Z jednostajnej ciągłości dla  $\varepsilon > 0$  można znaleźć liczbę  $\delta > 0$  taką, że

$$\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\| < \delta \Rightarrow |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \frac{\varepsilon}{d - c}.$$

Wtedy dla  $|x_1 - x_2| < \delta$  mamy  $|f(x_1, y) - f(x_2, y)| < \frac{\varepsilon}{d - c}$ . Ostatecznie

$$|F(x_1) - F(x_2)| \leq \frac{\varepsilon}{d - c}(d - c) = \varepsilon.$$

□

Z twierdzenia o wartości średniej istnieją punkty  $\xi_{ij}$ , dla których

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} F_j(x) dx = F_j(\xi_{ij}) \Delta x_i, \quad x_{i-1} \leq \xi_{ij} \leq x_i.$$

Dalej

$$F_j(\xi_{ij}) = \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_{ij}, y) dy = f(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \Delta y_j, \quad y_{j-1} \leq \eta_{ij} \leq y_j,$$



dla pewnych punktów  $\eta_{ij}$ . Zatem

$$\int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \underbrace{\Delta x_i \Delta y_j}_{\Delta S_{ij}},$$

gdzie  $S_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ . Punkt  $(\xi_{ij}, \eta_{ij})$  leży w  $S_{ij}$ , stąd

$$L(\mathcal{P}, f) \leq \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx \leq U(\mathcal{P}, f),$$

gdzie  $\mathcal{P}$  jest podziałem wyznaczonym przez prostokąty  $S_{ij}$ . Ale

$$L(\mathcal{P}, f) \leq \iint_R f(x, y) dx dy \leq U(\mathcal{P}, f).$$

Funkcja  $F$  jest całkowna, więc można wybrać podział  $\mathcal{P}$  taki, że  $U(\mathcal{P}, f) - L(\mathcal{P}, f) < \varepsilon$ . Wtedy

$$\left| \iint_R f(x, y) dx dy - \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx \right| < \varepsilon.$$

□

Niekiedy będziemy musieli obliczać całki z funkcji nieciągłych, np. przy wyznaczaniu objętości brył, których podstawa nie jest prostokątem.

**Przykład.** Niech  $f(x, y)$  będzie nieujemną funkcją ciągłą określoną w kole  $x^2 + y^2 \leq 1$ . Chcemy obliczyć objętość obszaru pod wykresem. Wkładamy koło w kwadrat  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  i określamy funkcję

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0 & x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

Wtedy  $V = \iint_{[-1,1] \times [-1,1]} \tilde{f}(x, y) dx dy$ .

Ogólnie, jeśli chcemy obliczyć całkę  $\iint_C f(x, y) dx dy$ , gdzie  $C \subset \mathbb{R}^2$ , to wkładamy  $C$  w prostokąt o bokach równoległych do osi i obliczamy

$$\iint_R f(x, y) \mathbb{1}_C(x, y) dx dy.$$

Pojawia się problem całkowalności funkcji  $f(x, y)\mathbb{I}_C(x, y)$ . Jeśli  $\mathbb{I}_C(x, y)$  jest całkowalna a  $f(x, y)$  jest ciągła, to iloczyn jest funkcją całkowalną, bo iloczyn funkcji całkowalnych jest całkowalny.

**Przykład.**  $C = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1.\}$ . Funkcja  $\mathbb{I}_C(x, y)$  jest nieciągła w punktach okręgu  $x^2 + y^2 = 1$ . Ogólnie funkcja  $\mathbb{I}_C(x, y)$  jest nieciągła na brzegu zbioru  $C$  oznaczanym symbolem  $\partial C$ .

**Definicja 6.8.** Mówimy, że zbiór  $A \subset \mathbb{R}^2$  ma miarę zero, jeśli dla dowolnej liczby  $\varepsilon > 0$  istnieją prostokąty  $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$  takie, że

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \Delta R_n < \varepsilon.$$

**Przykłady.**

- (a) Punkt ma miarę zero. Skończony zbiór punktów ma miarę zero.
- (b) Przeliczalny zbiór punktów ma miarę zero. W szczególności zbiór punktów w kwadracie  $[0, 1]^2$  o obu współrzędnych wymiernych ma miarę zero.
- (c) Poziomy odcinek ma miarę zero. Również ukośny odcinek ma miarę zero.
- (d) Zbiór punktów kwadratu  $[0, 1]^2$  o obu współrzędnych niewymiernych nie ma miary zero.

**Twierdzenie 6.9.** Ograniczona funkcja na prostokącie jest całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór jej punktów nieciągłości ma miarę zero.

**Twierdzenie 6.10.** Niech  $f$  będzie funkcją całkowalną na prostokącie  $R = [a, b] \times [c, d]$ . Dla  $a \leq x \leq b$  niech

$$\int_{\frac{c}{e}}^d f(x, y) dy = \mathcal{L}(x) \leq \mathcal{U}(x) = \int_c^d f(x, y) dy.$$

Wtedy funkcje  $\mathcal{L}(x)$  i  $\mathcal{U}(x)$  są całkowalne na  $[a, b]$  oraz

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \mathcal{L}(x) dx = \int_a^b \mathcal{U}(x) dx.$$

**Uwagi.**

1. Jeśli funkcja  $y \mapsto f(x, y)$  jest całkowna na  $[c, d]$  dla  $a \leq x \leq b$ , to

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

2. Zamieniając rolami  $x$  i  $y$  i przyjmując, że funkcja  $x \mapsto f(x, y)$  jest całkowna na  $[a, b]$  dla  $c \leq y \leq d$ , otrzymamy

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

*Dowód.* Niech  $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$  będzie podziałem prostokąta  $R$ . Rozważmy jeden prostokąt podziału  $S = S_1 \times S_2$ . Mamy

$$m_S(f) = m_{S_1 \times S_2}(f) \leq m_{S_2}(f(x, \cdot)), \quad \text{dla } x \in S_1.$$

Zatem

$$\begin{aligned} \sum_{S_2 \in \mathcal{P}_2} m_{S_1 \times S_2}(f) \Delta S_2 &\leq \sum_{S_2 \in \mathcal{P}_2} m_{S_2}(f(x, \cdot)) \Delta S_2 \\ &= L(\mathcal{P}_2, f(x, \cdot)) \leq \int_c^d f(x, y) dy = \mathcal{L}(x), \quad \text{dla } x \in S_1. \end{aligned}$$

Po wzięciu kresu dolnego względem  $x \in S_1$  otrzymujemy

$$\sum_{S_2 \in \mathcal{P}_2} m_{S_1 \times S_2}(f) \Delta S_2 \leq m_{S_1}(\mathcal{L}).$$

Zatem

$$L(\mathcal{P}, f) = \sum_{S_1 \in \mathcal{P}_1} \sum_{S_2 \in \mathcal{P}_2} m_{S_1 \times S_2}(f) \Delta S_1 \Delta S_2 \leq \sum_{S_1 \in \mathcal{P}_1} m_{S_1}(\mathcal{L}) \Delta S_1 = L(\mathcal{P}_1, \mathcal{L}).$$

Podobnie pokazujemy, że  $U(\mathcal{P}, f) \geq U(\mathcal{P}_1, \mathcal{U})$ . Reasumując otrzymujemy

$$L(\mathcal{P}, f) \leq L(\mathcal{P}_1, \mathcal{L}) \leq U(\mathcal{P}_1, \mathcal{L}) \leq U(\mathcal{P}_1, \mathcal{U}) \leq U(\mathcal{P}, f).$$

Z założenia  $f(x, y)$  jest całkowna. Stąd wynika, że  $\mathcal{L}(x)$  jest całkowna na  $[a, b]$ . Ponadto

$$L(\mathcal{P}, f) \leq \iint_R f(x, y) dx dy \leq U(\mathcal{P}, f),$$

$$L(\mathcal{P}, f) \leq \int_a^b \mathcal{L}(x) dx \leq U(\mathcal{P}, f).$$

Zatem  $\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \mathcal{L}(x) dx$ . □

**Przykład.**  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Znaleźć objętość obszaru pod wykresem funkcji  $f(x, y) = 2x + y + 5$  na  $D$ . Obliczamy

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_{[-1,1]^2} (2x + y + 5) \mathbb{I}_D(x, y) dx dy \\ &= \int_{-1}^1 \left( \int_{-1}^1 (2x + y + 5) \mathbb{I}_D(x, y) dy \right) dx = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (2x + y + 5) dy dx \\ &= 2 \int_{-1}^1 (2x + 5) \sqrt{1-x^2} dx = 10 \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = 5\pi. \end{aligned}$$

**Twierdzenie 6.11.** *Niech  $y = f(x)$  będzie funkcją ciągłą na  $[a, b]$ . Wtedy wykres funkcji  $f$  ma miarę zero.*

*Dowód.* Ustalmy  $\varepsilon > 0$ . Można znaleźć liczbę naturalną  $N$  taką, że

$$|x - x'| < \frac{b-a}{N} \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{8(b-a)}.$$

Dzielimy przedział  $[a, b]$  na  $N$  równych części punktami  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ . Określmy  $x_{-1} = a - \frac{b-a}{N}$ ,  $x_{N+1} = b + \frac{b-a}{N}$ . Każdy z punktów  $x$  przedziału  $[a, b]$  leży w jednym z przedziałów  $(x_{i-1}, x_{i+1})$  dla  $i = 1, 2, \dots, N$ . Jeśli  $x \in (x_{i-1}, x_{i+1})$ , to  $|f(x) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{8(b-a)}$ . To oznacza, że

$$f(x) \in \left( f(x_i) - \frac{\varepsilon}{8(b-a)}, f(x_i) + \frac{\varepsilon}{8(b-a)} \right).$$

Zatem wykres jest zawarty w zbiorze

$$\bigcup_{i=1}^N (x_{i-1}, x_{i+1}) \times \left( f(x_i) - \frac{\varepsilon}{8(b-a)}, f(x_i) + \frac{\varepsilon}{8(b-a)} \right).$$

Suma pól składników tego zbioru wynosi

$$\frac{2(b-a)}{N} \cdot \frac{\varepsilon}{4(b-a)} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

□

### 6.2.1 Obliczanie pól

Dla ograniczonego podzbioru  $D \subset \mathbb{R}^2$  takiego, że  $\partial D$  ma miarę zero określamy

$$A(D) = \iint_D dx dy = \iint_R \mathbb{1}_D(x, y) dx dy,$$

gdzie  $R$  jest prostokątem zawierającym  $D$ . Niech  $\mathcal{P}$  będzie podziałem prostokąta  $R$ . Wtedy

$$L(\mathcal{P}, \mathbb{1}_D) = \sum_S m_S(\mathbb{1}_D) \Delta S, \quad U(\mathcal{P}, \mathbb{1}_D) = \sum_S M_S(\mathbb{1}_D) \Delta S.$$

Wielkość  $L(\mathcal{P}, \mathbb{1}_D)$  jest sumą pól prostokątów podziału całkowicie zawartych w  $D$ , natomiast  $U(\mathcal{P}, \mathbb{1}_D)$  jest sumą pól prostokątów podziału mających część wspólną z  $D$ . Polem wewnętrznym nazywamy kres górny liczb  $L(\mathcal{P}, \mathbb{1}_D)$  a polem zewnętrznym kres dolny liczb  $U(\mathcal{P}, \mathbb{1}_D)$ . Mówimy, że obszar  $D$  ma pole, jeśli pole wewnętrzne jest równe polu zewnętrznemu. Obszar  $D$  ma pole wtedy i tylko wtedy, gdy  $\partial D$  ma miarę zero. Mówimy wtedy, że obszar jest mierzalny w sensie Jordana.

**Twierdzenie 6.12.** *Jeśli  $f(x, y)$  jest funkcją ciągłą w prostokącie  $R$  i  $D \subset R$  jest mierzalny w sensie Jordana, to całka*

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

*jest dobrze określona.*

*Dowód.*

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_R f(x, y) \mathbb{1}_D(x, y) dx dy.$$

Funkcja  $f(x, y) \mathbb{1}_D(x, y)$  jest nieciągła tylko w punktach  $\partial D$ . □

**Twierdzenie 6.13.** *Niech  $D_1$  i  $D_2$  będą ograniczonymi rozłącznymi podzbiórmi  $\mathbb{R}^2$  mierzalnymi w sensie Jordana. Dla funkcji  $f(x, y)$  ciągłej na  $D_1 \cup D_2$  mamy*

$$\iint_{D_1 \cup D_2} f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy.$$

*Dowód.* Wkładamy  $D_1$  i  $D_2$  w prostokąt  $R$ . Wtedy

$$\begin{aligned} \iint_{D_1 \cup D_2} f dx dy &= \iint_R f \mathbb{1}_{D_1 \cup D_2} dx dy = \iint_R f [\mathbb{1}_{D_1} + \mathbb{1}_{D_2}] dx dy \\ &= \iint_R f \mathbb{1}_{D_1} dx dy + \iint_R f \mathbb{1}_{D_2} dx dy = \iint_{D_1} f dx dy + \iint_{D_2} f dx dy. \end{aligned}$$

□

**Przykład.** Dwa boki równoległoboku  $D$  znajdują się na poziomach  $y = c$  i  $y = d$ . Dolny bok mieści się pomiędzy  $x = a$  i  $x = b$  a górny pomiędzy  $a'$  i  $b'$  oraz  $a' > a$ . Wkładamy  $D$  w prostokąt  $R = [a, b'] \times [c, d]$ . Wtedy

$$A(D) = \iint_R \mathbb{1}_D(x, y) dx dy = \int_c^d \left( \int_a^{b'} \mathbb{1}_D(x, y) dx \right) dy.$$

Przy ustalonej wartości  $y$  funkcja  $\mathbb{1}_D(x, y)$  jest równa 1 na przedziale długości  $b - a$ . Zatem

$$A(D) = \int_c^d (b - a) dy = (b - a)(d - c).$$

### 6.2.2 Zmiana kolejności całkowania

Rozważmy całkę iterowaną

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-y^2} dy dx &= \iint_D \sqrt{a^2-y^2} dx dy \\ &= \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} \sqrt{a^2-y^2} dx dy = \int_0^a (a^2-y^2) dy = a^3 - \frac{a^3}{3} = \frac{2}{3}a^3. \end{aligned}$$

Przy zmienionej kolejności całkowania obliczenia okazały się łatwiejsze. Podobnie

$$\begin{aligned} \int_1^2 \int_0^{\log x} (x-1)\sqrt{1+2e^y} dy dx &= \int_0^{\log 2} \int_{e^y}^2 (x-1)\sqrt{1+2e^y} dx dy \\ &= \int_0^{\log 2} \sqrt{1+2e^y} (2-e^y) \frac{1}{2} (1+e^y-1) dy. \end{aligned}$$

W ostatniej całce wykonujemy podstawienie  $u = 1 + 2e^y$ . Wtedy

$$e^y = \frac{u-1}{2} \quad du = 2e^y dy.$$

Otrzymujemy

$$\int_3^5 \sqrt{u} \left(2 - \frac{u-1}{2}\right) \frac{1}{4} du.$$

**Definicja 6.14.** Obszar  $D \subset \mathbb{R}^2$  nazywamy łukowo spójnym, jeśli dla dowolnych dwóch punktów  $(x_1, y_1)$  i  $(x_2, y_2)$  w  $D$  można znaleźć funkcję ciągłą  $\varphi: [0, 1] \rightarrow D$  taką, że  $\varphi(0) = (x_1, y_1)$  oraz  $\varphi(1) = (x_2, y_2)$ .

**Twierdzenie 6.15** (o wartości średniej). Niech  $f(x, y)$  będzie funkcją ciągłą na zwartym obszarze  $D \subset \mathbb{R}^2$  mierzalnym w sensie Jordana i łukowo spójnym. Wtedy

$$\iint_D f(x, y) dx dy = f(x_0, y_0)A(D)$$

dla pewnego punktu  $(x_0, y_0)$  w  $D$ .

*Dowód.* Mamy

$$m = \min_{(x,y) \in D} f(x, y) = f(x_1, y_1), \quad M = \max_{(x,y) \in D} f(x, y) = f(x_2, y_2)$$

dla pewnych punktów  $(x_1, y_1)$  i  $(x_2, y_2)$  w  $D$ . Dalej

$$m A(D) \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq M A(D).$$

Jeśli  $A(D) = 0$ , to teza jest spełniona. Niech  $A(D) > 0$ . Wtedy

$$f(x_1, y_1) = m \leq \underbrace{\frac{1}{A(D)} \iint_D f(x, y) dx dy}_\alpha \leq M = f(x_2, y_2).$$

Niech  $\varphi$  będzie funkcją ciągłą taką, że  $\varphi : [0, 1] \rightarrow D$  oraz  $\varphi(0) = (x_1, y_1)$ ,  $\varphi(1) = (x_2, y_2)$ . Rozważmy funkcję  $g(t) = f(\varphi(t))$ . Wtedy  $g$  jest funkcją ciągłą oraz  $g(0) = f(x_1, y_1)$  i  $g(1) = f(x_2, y_2)$ . Ponadto  $g(0) \leq \alpha \leq g(1)$ . Z własności Darboux mamy  $g(t_0) = \alpha$  dla pewnej wartości  $0 \leq t_0 \leq 1$ . Tzn.  $f(\varphi(t_0)) = \alpha$  oraz  $\varphi(t_0) = (x_0, y_0)$ .  $\square$

### 6.2.3 Geometria odwzorowań z $\mathbb{R}^2$ w $\mathbb{R}^2$

#### Przykłady.

- (a) Niech  $D = [0, 1] \times [0, 2\pi)$ . Określamy

$$T(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

$T$  odwzorowuje prostokąt  $D$  w koło jednostkowe.

- (b)  $T(x, y) = \left( \frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2} \right)$ ,  $D = [-1, 1] \times [-1, 1]$ .  $T$  jest odwzorowaniem liniowym. Aby wyznaczyć obraz  $T(D)$  wystarczy więc znaleźć obraz wierzchołków obszaru  $D$ . Można też wskazać warunki jakie muszą spełniać punkty z  $T(D)$ . Niech  $u = \frac{x+y}{2}$  i  $v = \frac{x-y}{2}$ . Wtedy  $x = u+v$  i  $y = u-v$ . Zatem punkt  $(u, v)$  spełnia  $|u+v| \leq 1$  i  $|u-v| \leq 1$ . To oznacza, że  $|u| + |v| \leq 1$ .



### 6.3 Twierdzenie o zamianie zmiennych

Dane są dwa zbiory  $D$  i  $D^*$  w  $\mathbb{R}^2$  i odwzorowanie  $T : D^* \rightarrow D$  klasy  $C^1$ , różnowartościowe oraz  $T(D^*) = D$ . Zakładamy, że  $D$  i  $D^*$  są mierzalne w sensie Jordana. Chcemy wyrazić wielkość  $\iint_D f(x, y) dx dy$  jako całkę po zbiorze  $D^*$  z funkcji złożonej  $f \circ T$ .

**Uwaga.** Dla funkcji jednej zmiennej mamy

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u) du, \quad [a, b] \xrightarrow{\varphi} [\varphi(a), \varphi(b)].$$

Zacniemy od przypadku  $f \equiv 1$ . Tzn. chcemy obliczyć  $\iint_D dx dy = A(D)$  za pomocą całki po obszarze  $D^*$  z funkcji 1 ewentualnie domnożonej przez jakąś funkcję zależną od  $T$ .

Wiemy, że jeśli  $T$  jest odwzorowaniem różniczkowalnym w  $(u_0, v_0)$ , to dla odwzorowania liniowego  $DT(u_0, v_0)$  zadanego macierzą

$$DT(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix}$$

mamy

$$T(u, v) \approx T(u_0, v_0) + DT(u_0, v_0) \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} =: \tilde{T}(u, v),$$

gdzie  $\Delta u = u - u_0$  oraz  $\Delta v = v - v_0$ . Jeśli  $S$  jest małym prostokątem, o bokach równoległych do osi, wewnątrz  $D^*$ , którego dolnym lewym wierzchołkiem jest punkt  $(u_0, v_0)$ , to obraz  $T(S)$  jest w przybliżeniu równoległobokiem oraz

$$A(T(S)) \approx A(\tilde{T}(S)) = |\det(DT(u_0, v_0))| A(S).$$

Przypuśćmy, że obszar  $D^*$  został włożony w prostokąt  $R$ , który następnie podzieliliśmy na małe prostokąty  $S_k$ . Rozważamy tylko prostokąty  $S_k$  całkowicie zawarte w  $D^*$ . Niech  $(u_k, v_k)$  oznacza lewy dolny wierzchołek prostokąta  $S_k$ . Wtedy

$$\iint_D dx dy = A(D) = A(T(D^*)) \approx \sum_k |\det(DT(u_k, v_k))| A(S_k).$$

W granicy, gdy średnica podziału dąży do zera, otrzymamy

$$\iint_D dx dy = \iint_{D^*} |\det DT(u, v)| du dv.$$

Jakobianem odwzorowania  $T$  nazywamy wyznacznik

$$J_T(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Oznaczmy  $(x_k, y_k) = T(u_k, v_k)$ . Mamy

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &\approx \sum_k f(x_k, y_k) A(T(S_k)) \\ &\approx \sum_k f(x_k, y_k) |J_T(u_k, v_k)| A(S_k) \approx \iint_{D^*} f(T(u, v)) |J_T(u, v)| du dv. \end{aligned}$$

Ostatecznie otrzymujemy wzór

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(T(u, v)) |J_T(u, v)| du dv. \quad (6.1)$$

**Przykład.** Rozważmy całkę  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ . Mamy

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx &= 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \\ &= 2 \left[ \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \int_0^R e^{-x^2} dx \right) \left( \int_0^R e^{-y^2} dy \right) \right]^{1/2} = 2 \left[ \lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{[0, R]^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \right]^{1/2} \end{aligned}$$

Niech  $D_R$  oznacza część koła o środku w początku układu i promieniu  $R$  leżącą w pierwszej ćwiartce. Wtedy

$$\iint_{D_R} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq \iint_{[0, R]^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq \iint_{D_{R\sqrt{2}}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

Użyjemy współrzędnych biegunowych

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq R.$$

Mamy

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r.$$

Prostokąt  $[\delta, R] \times [0, \frac{\pi}{2}]$  jest przekształcony na ćwiartkę pierścienia

$$D_{\delta,R} = \{(x, y) : x, y \geq 0, \delta^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} \iint_{D_R} e^{-(x^2+y^2)} dx dy &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \iint_{D_{\delta,R}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{\delta}^R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} r d\varphi dr = \frac{\pi}{2} \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{\delta}^R e^{-r^2} r dr = \frac{\pi}{2} \int_0^R e^{-r^2} r dr \\ &= \frac{\pi}{2} \left( -\frac{1}{2} e^{-r^2} \Big|_0^R \right) = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-R^2}) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

W świetle poprzednich obliczeń otrzymujemy

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

**Uwaga.** Współrzędne biegunowe są użyteczne, gdy funkcja podcałkowa zawiera  $x^2 + y^2$  a obszar całkowania jest kołem lub fragmentem koła. Rozważmy całkę  $\iint_D \log(x^2 + y^2) dx dy$ , gdzie  $D$  jest wycinkiem koła opisanym przez warunki  $a \leq r \leq b$  i  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ . Po zamianie zmiennych otrzymujemy

$$\int_a^b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(r^2) r dr = \frac{\pi}{2} \int_a^b \log(r^2) r dr.$$

Niekiedy warto użyć współrzędnych biegunowych mimo, że obszar nie jest "wygodny". Rozważmy całkę

$$\iint_{[0,1]^2} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy.$$

Ze względu na symetrię mamy

$$\iint_{[0,1]^2} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = 2 \iint_{\substack{[0,1]^2 \\ y \leq x}} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy.$$

Mamy  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$  oraz  $0 \leq r \cos \varphi \leq 1$ . Tzn.  $0 \leq r \leq \frac{1}{\cos \varphi}$ . Otrzymujemy więc

$$\iint_{[0,1]^2} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{1}{\cos \varphi}} r^2 dr d\varphi = \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{\cos^3 \varphi} = \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos \varphi}{(1 - \sin^2 \varphi)^2} d\varphi.$$

W ostatniej całce po podstawieniu  $u = \cos \varphi$  otrzymamy całkę z funkcji wymiernej.

## 7 Całki potrójne i wielokrotne

Przedziałem  $R \subset \mathbb{R}^N$  nazywamy iloczyn kartezjański

$$R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_N, b_N].$$

Objętością przedziału jest wielkość

$$\Delta R = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_N - a_N).$$

Podział  $\mathcal{P}$  przedziału  $R$  oznacza rodzinę podziałów  $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_N)$ , gdzie  $\mathcal{P}_i$  jest podziałem przedziału  $[a_i, b_i]$  na  $k_i$  części. W ten sposób otrzymujemy podział  $R$  na  $k_1 k_2 \dots k_N$  części (podprzedziałów). Dla podprzedziału  $S$  określimy

$$m_S(f) = \inf_{x \in S} f(x), \quad M_S(f) = \sup_{x \in S} f(x),$$

gdzie  $f(x)$  jest funkcją ograniczoną na przedziale  $R$ . Sumy dolne, górne, całkę dolną i górną oraz całkę określamy tymi samymi wzorami co dla funkcji jednej i dwu zmiennych. Można podobnie udowodnić, że funkcje ciągłe są całkowlane.

**Definicja 7.1.** Mówimy, że zbiór  $A \subset \mathbb{R}^N$  jest miary zero, jeśli istnieje ciąg przedziałów  $S_n$  taki, że

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \quad \sum_{n=1}^{\infty} \Delta S_n < \varepsilon,$$

dla dowolnie wcześniej ustalonej liczby dodatniej  $\varepsilon$ .

**Twierdzenie 7.2.** Ograniczona funkcja  $f$  określona na przedziale  $R \subset \mathbb{R}^N$  jest całkowna wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór jej punktów nieciągłości ma miarę zero.

**Twierdzenie 7.3** (Fubini). Niech  $A \subset \mathbb{R}^N$  i  $B \subset \mathbb{R}^M$  będą przedziałami. Załóżmy, że funkcja  $f$  określona na  $A \times B \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ <sup>(7)</sup> jest całkowna. Dla  $x \in A$  niech

$$\mathcal{L}(x) = \int_B f(x, y) dy, \quad \mathcal{U}(x) = \int_B \bar{f}(x, y) dy.$$

Wtedy funkcje  $\mathcal{L}(x)$  i  $\mathcal{U}(x)$  są całkowne na  $A$  oraz

$$\begin{aligned} \int_{A \times B} f(x, y) dx dy &= \int_A \mathcal{L}(x) dx = \int_A \mathcal{U}(x) dx \\ &= \int_A \left( \int_B f(x, y) dy \right) dx = \int_A \left( \int_B \bar{f}(x, y) dy \right) dx. \end{aligned}$$

Jeśli funkcja  $f(x, y)$  jest ciągła, to można pominąć znaki całki dolnej i górnej.

**Przykład.** Rozważmy funkcję trzech zmiennych  $f(x, y, z)$  ciągłą na  $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ . Określmy  $A = [a_1, b_1] \times [a_3, b_3]$  i  $B = [a_2, b_2]$ . Wtedy

$$\begin{aligned} \iiint_R f(x, y, z) dx dy dz &= \iint_A \left( \int_{a_2}^{b_2} f(x, y, z) dy \right) dx dz \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{a_3}^{b_3} \left( \int_{a_2}^{b_2} f(x, y, z) dy \right) dz \right) dx. \end{aligned}$$

<sup>7</sup>Punkty z  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$  będziemy oznaczać przez  $(x, y)$

Mogliśmy zamienić całkę podwójną po  $A$  na całkę iterowaną bo całkowana funkcja zależy w sposób ciągły od  $x$  i  $z$ . Przy funkcji trzech zmiennych mamy sześć możliwości zamiany na całkę iterowaną.

**Uwaga.** Inny zapis całki iterowanej to:

$$\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_3}^{b_3} \int_{a_2}^{b_2} f(x, y, z) dy dz dx = \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_3}^{b_3} dz \int_{a_2}^{b_2} f(x, y, z) dy.$$

**Twierdzenie 7.4.** Dla funkcji ciągłej  $\varphi$  określonej na przedziale  $R \subset \mathbb{R}^{N-1}$  wykres funkcji  $\varphi$ , czyli zbiór  $D = \{(x, \varphi(x)) : x \in R\}$  jest miary zero w  $\mathbb{R}^N$ .

**Przykład.** Przesunięta podprzestrzeń  $(N - 1)$ -wymiarowa w  $\mathbb{R}^N$  ma miarę zero. Podprzestrzeń zadana jest wzorem

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_Nx_N = b.$$

Mamy  $a_k \neq 0$  dla pewnego  $k$ . Wtedy

$$x_k = \frac{b}{a_k} - \frac{1}{a_k}(a_1x_1 + \dots + \cancel{a_kx_k} + \dots + a_Nx_N)$$

opisuje wykres funkcji ciągłej na  $\mathbb{R}^{N-1}$ . Jeśli  $D \subset \mathbb{R}^N$  nie jest przedziałem, to określamy

$$\int_D f(x) dx = \int_R f(x) \mathbb{1}_D(x) dx$$

dla przedziału  $R$  zawierającego  $D$ . Załóżmy, że  $f(x)$  jest funkcją ciągłą. Wtedy funkcja  $f(x)\mathbb{1}_D(x)$  może być nieciągła tylko w punktach brzegu  $\partial D$ . Jeśli  $\partial D$  ma miarę zero, to  $f(x)\mathbb{1}_D(x)$  jest całkowalna, np. gdy zbiór  $\partial D$  jest sumą kilku wykresów funkcji ciągłych  $N - 1$  zmiennych.

**Przykład.**  $W$  jest obszarem w  $\mathbb{R}^3$  określonym przez warunki  $x, y \geq 0$  oraz  $x^2 + y^2 \leq z \leq 2$ . Chcemy obliczyć  $\iiint_W x dx dy dz$ . Niech  $D$  będzie obszarem

w płaszczyźnie  $(x, y)$  określonym przez  $x, y \geq 0$  i  $x^2 + y^2 \leq 2$ . Wtedy

$$\begin{aligned} \iiint_W x \, dx \, dy \, dz &= \iint_D dx \, dy \int_{x^2+y^2}^2 x \, dz = \iint_D x(2 - x^2 - y^2) \, dx \, dy \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} x(2 - x^2 - y^2) \, dy = \int_0^{\sqrt{2}} \left[ x(2 - x^2)^{3/2} - \frac{1}{3}x(2 - x^2)^{3/2} \right] dx \\ &= \frac{2}{3} \int_0^{\sqrt{2}} x(2 - x^2)^{3/2} \, dx = -\frac{2}{15}(2 - x^2)^{5/2} \Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{8}{15}\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Ścisłe uzasadnienie przejść do całek iterowanych jest następujące. Mamy

$$W \subset [0, \sqrt{2}] \times [0, \sqrt{2}] \times [0, 2] =: R.$$

$$\begin{aligned} \iiint_W x \, dx \, dy \, dz &= \iiint_R x \mathbb{I}_W(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iint_{[0, \sqrt{2}]^2} dx \, dy \int_0^2 x \mathbb{I}_W(x, y, z) \, dz \\ &= \iint_{[0, \sqrt{2}]^2} dx \, dy \int_{x^2+y^2}^2 x \mathbb{I}_D(x, y) \, dz = \iint_{[0, \sqrt{2}]^2} x(2 - x^2 - y^2) \mathbb{I}_D(x, y) \, dx \, dy \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} x(2 - x^2 - y^2) \, dy. \end{aligned}$$

**Twierdzenie 7.5** (o zamianie zmiennych). *Niech  $D$  i  $D^*$  będą obszarami w  $\mathbb{R}^n$ . Załóżmy, że  $T$  jest odwzorowaniem różnowartościowym klasy  $C^1$  takim, że  $T(D^*) = D$ . Wtedy dla funkcji  $f(x)$  ciągłej (lub całkowalnej) określonej na  $D$  mamy*

$$\int_D f(x) \, dx = \int_{D^*} f(T(u)) |J_T(u)| \, du,$$

gdzie  $J_T(u)$  jest jacobianem odwzorowania  $T$  w punkcie  $u$ .

**Uwaga.** Dla  $u'$  blisko  $u$  mamy

$$T(u') \approx T(u) + DT(u)(u' - u),$$

czyli odwzorowanie  $T$  zachowuje się w przybliżeniu jak złożenie dwu przesunięć i przekształcenia liniowego o macierzy  $DT(u)$ . Przy takim przekształceniu objętość obrazu małego przedziału  $S$  obliczamy wzorem

$$\Delta T(S) \approx \Delta S |J_T(u)|, \quad \text{gdzie } u \in S.$$

### Przykłady.

- (a)  $\iiint_D e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dx, dy dz$ , gdzie  $D$  jest fragmentem kuli jednostkowej leżącym w pierwszym oktancie. Zastosujemy współrzędne sferyczne

$$\begin{aligned} x &= r \sin \varphi \cos \psi, \\ y &= r \sin \varphi \sin \psi, \\ z &= r \cos \varphi, \end{aligned} \tag{7.1}$$

gdzie  $0 \leq \varphi, \psi \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $0 \leq r \leq 1$ . Przyporządkowanie  $(r, \varphi, \psi) \mapsto (x, y, z)$  określone wzorami wyżej nie jest różnowartościowe na  $D^* = [0, 1] \times [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ , ale staje się takie, gdy  $r > 0$ . Określamy  $T(r, \varphi, \psi) = (x, y, z)$  wg wzorów (7.1). Mamy

$$|J_T(r, \varphi, \psi)| = r^2 \sin \varphi.$$

Dalej

$$\begin{aligned} \iiint_D e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dx dy dz &= \iiint_{D^*} e^{r^3} r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\psi \\ &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 e^{r^3} \sin \varphi d\varphi d\psi dr = \frac{\pi}{2} \int_0^1 r^2 e^{r^3} dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi = \frac{\pi}{6} e^{r^3} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6} (e-1). \end{aligned}$$

- (b) Obliczymy objętość kuli  $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$ . Mamy

$$V = \iiint_V dx dy dz.$$

Przechodzimy do współrzędnych sferycznych.

$$V = \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^R r^2 \sin \varphi dr = 2\pi \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi = \frac{4}{3} \pi R^3.$$



Obliczenia nie są do końca ścisłe, bo współrzędne nie są jednoznaczne na pełnej kuli. Można je uściślić następująco. Rozważamy podzbiór kuli  $D_\varepsilon$ , dla  $\varepsilon > 0$ , określony warunkami

$$\varepsilon \leq r \leq R, \quad \varepsilon \leq \varphi \leq \pi - \varepsilon, \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi - \varepsilon.$$

Wtedy

$$V = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} V_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} d\varphi \int_0^{2\pi-\varepsilon} d\psi \int_\varepsilon^R r^2 \sin \varphi dr.$$

Współrzędne cylindryczne określone są przez

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, \\ y &= r \sin \varphi, \\ z &= z, \end{aligned}$$

co oznacza, że w płaszczyźnie  $(x, y)$  przechodzimy do współrzędnych biegunowych. Wtedy

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, z)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

**Przykład.**  $I = \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^a z \sqrt{x^2 + y^2} dz$ . Obszar całkowania względem

$x$  i  $y$  jest opisany warunkami  $0 \leq x \leq 2$ ,  $0 \leq y \leq \sqrt{2x-x^2}$ . Po przekształceniu otrzymujemy  $x^2 + y^2 \leq 2x$ ,  $y \geq 0$ . Rozpoznajemy górne półkole o promieniu 1 i środku w punkcie  $(1, 0)$ . Po przejściu do współrzędnych biegunowych otrzymujemy warunki  $r \leq 2 \cos \varphi$  oraz  $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ . Zatem

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} dr \int_0^a z r^2 dz = \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \Big|_0^{2 \cos \varphi} d\varphi = \frac{4a^2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi d\varphi \\ &= \frac{4a^2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \varphi) \cos \varphi d\varphi = \frac{4a^2}{3} \left( \sin \varphi - \frac{1}{3} \sin^3 \varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8a^2}{9}. \end{aligned}$$

Górne półkole sugeruje, że podstawienie

$$x = 1 + r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad \text{dla } 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi,$$

mogłoby być przydatne. Jednak po takim podstawieniu otrzymujemy "nieprzyjazną" całkę

$$I = \int_0^\pi d\varphi \int_0^1 dr \int_0^a zr\sqrt{r^2 + 2r \cos \varphi + 1} dz = \frac{a^2}{2} \int_0^\pi d\varphi \int_0^1 r\sqrt{r^2 + 2r \cos \varphi + 1} dr.$$

### 7.0.1 Środek masy

W punktach  $P_1, P_2, \dots, P_n$  umieszczamy masy  $m_1, m_2, \dots, m_n$ . Środek masy  $P$  układu spełnia

$$\vec{OP} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{OP}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

Niech  $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ ,  $m = \sum_i m_i$  oraz  $P = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ . Wtedy

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i y_i, \quad \bar{z} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i z_i.$$

Jeśli masa jest rozłożona w sposób ciągły w obszarze  $D$  z gęstością masy  $\varrho(x, y, z)$  w punkcie  $(x, y, z)$ , to środek masy wyraża się wzorem

$$\bar{x} = \frac{\iiint_D x \varrho(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_D \varrho(x, y, z) dx dy dz}.$$

Podobnie wzory mamy dla współrzędnych  $\bar{y}$  i  $\bar{z}$ .

**Przykład.** Znaleźć środek masy górnej półkuli o promieniu 1, czyli obszaru  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0$ . Przyjmujemy stałą gęstość masy  $\varrho \equiv 1$ . Ze względu na symetrię obszaru środek masy ma współrzędne  $(0, 0, \bar{z})$ . Obliczamy

$$\bar{z} = \frac{3}{2\pi} \iiint_D z dx dy dz = \frac{3}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^1 r \cos \varphi r^2 \sin \varphi dr = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

### 7.0.2 Moment bezwładności

Rozważamy ciało  $D$  o gęstości masy  $\rho(x, y, z)$  w punkcie  $(x, y, z)$ . Moment bezwładności względem osi  $x$  wyraża się wzorem

$$I_x = \iiint_D (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

Podobnie określa się momenty  $I_y$  oraz  $I_z$ .

**Przykład.** Obliczyć moment bezwładności względem osi  $z$  obszaru pomiędzy paraboloidą  $z = x^2 + y^2$ , cylindrem  $x^2 + y^2 = a^2$  oraz płaszczyzną  $z = 0$ , przyjmując  $\rho \equiv 1$ . Obszar opisany jest warunkami

$$0 \leq z \leq x^2 + y^2 \leq a^2.$$

Użyjemy współrzędnych cylindrycznych. Wtedy

$$\begin{aligned} I_z &= \iiint_D (x^2 + y^2) dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a^2} dz \int_{\sqrt{z}}^a r^2 \cdot r dr \\ &= 2\pi \int_0^{a^2} \frac{1}{4} (a^4 - z^2) dz = \frac{\pi}{2} \left( a^6 - \frac{1}{3} a^6 \right) = \frac{\pi}{3} a^6. \end{aligned}$$

### 7.0.3 Potencjał grawitacyjny

W punkcie  $(x, y, z)$  umieszczamy masę  $M$ . Siła oddziaływania na masę  $m$  umieszczoną w punkcie  $(x_1, y_1, z_1)$  jest gradientem potencjału

$$V(x_1, y_1, z_1) = \frac{GmM}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}}.$$

Zakładamy, że masa jest rozmieszczona w obszarze  $D$  z gęstością  $\rho(x, y, z)$ . Wtedy potencjał wyraża się wzorem

$$V(x_1, y_1, z_1) = \iiint_D \frac{Gm\rho(x, y, z)}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}} dx dy dz.$$

Siła oddziaływania na masę  $m$  umieszczoną w punkcie  $(x_1, y_1, z_1)$  jest równa  $\nabla V(x_1, y_1, z_1)$ .

**Przykład.** Załóżmy, że  $D$  jest obszarem zawartym pomiędzy sferami

$$x^2 + y^2 + z^2 = r_1^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 = r_2^2,$$

gdzie  $r_1 < r_2$ . Przyjmujemy  $\varrho \equiv 1$  oraz  $m = 1$ . Obliczymy wartość potencjału w punktach przestrzeni poza  $D$ . Ze względu na niezmienniczość na obroty względem początku układu wystarczy obliczyć  $V(0, 0, R)$ . W obliczeniach użyjemy współrzędnych sferycznych.

$$\begin{aligned} \frac{1}{G}V(0, 0, R) &= \iiint_D \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - R)^2}} \\ &= \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2\pi} d\psi \int_{r_1}^{r_2} \frac{r^2 \sin \varphi}{\sqrt{r^2 - 2rR \cos \varphi + R^2}} dr = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} dr \int_0^\pi \frac{r^2 \sin \varphi}{\sqrt{r^2 - 2rR \cos \varphi + R^2}} d\varphi \end{aligned}$$

W wewnętrznej całce stosujemy podstawienie

$$u = r^2 - 2rR \cos \varphi + R^2, \quad du = 2rR \sin \varphi d\varphi.$$

$$\frac{1}{G}V(0, 0, R) = \frac{\pi}{R} \int_{r_1}^{r_2} r dr \int_{(r-R)^2}^{(r+R)^2} \frac{du}{\sqrt{u}} du = \frac{2\pi}{R} \int_{r_1}^{r_2} r[r + R - |r - R|] dr.$$

Założmy, że  $R < r_1$ . Wtedy

$$\frac{1}{G}V(0, 0, R) = \frac{2\pi}{R} \int_{r_1}^{r_2} 2Rr dr = 2\pi(r_2^2 - r_1^2).$$

Z kolei dla  $R > r_2$  mamy

$$\frac{1}{G}V(0, 0, R) = \frac{2\pi}{R} \int_{r_1}^{r_2} 2r^2 dr = \frac{4\pi}{3R}(r_2^3 - r_1^3).$$

Reasumując, wewnątrz obszaru potencjał jest stały (niezależny od  $R$ ) zatem nie ma siły grawitacji. Z kolei na zewnątrz potencjał jest odwrotnie proporcjonalny do odległości punktu od początku układu. Zatem siła grawitacji jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu tej odległości.

## 8 Całki krzywoliniowe i powierzchniowe

### 8.1 Całka krzywoliniowa nieorientowana

Rozważamy funkcję  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . Chcemy obliczyć całkę z funkcji  $f(x, y, z)$  wzdłuż krzywej  $\sigma : [a, b] \xrightarrow{1-1} \mathbb{R}^3$ ,  $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ . Można myśleć, że obraz krzywej opisuje przewód, a wielkość  $f(x, y, z)$  reprezentuje gęstość masy przewodu w punkcie  $(x, y, z)$ . Chcemy, aby całka dała w wyniku całkowitą masę przewodu. Określamy całkę wzorem

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} f(x, y, z) ds &:= \int_a^b f(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| dt \\ &= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt. \end{aligned}$$

Jeśli  $\sigma(t)$  jest kawałkami klasy  $C^1$  lub  $f(\sigma(t))$  jest kawałkami ciągła, to rozbijamy przedział czasu na skończoną liczbę przedziałów, na których można zastosować powyższy wzór.

**Przykład.** Rozważmy spiralę  $\sigma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Niech  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ . Mamy  $\sigma'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$ . Wtedy  $\|\sigma'(t)\| = \sqrt{2}$ . Zatem

$$\int_{\sigma} (x^2 + y^2 + z^2) ds = \int_0^{2\pi} (1 + t^2) \sqrt{2} dt = \sqrt{2} \left( 2\pi + \frac{8}{3} \pi^3 \right).$$

#### 8.1.1 Interpretacja całki

Podzielimy przedział czasu  $[a, b]$  punktami  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ . W ten sposób krzywa zostanie podzielona na  $n$  fragmentów. Przyjmujemy, że gęstość masy na danym fragmencie jest stała i wynosi  $f(\sigma(s_i))$ , gdzie  $t_{i-1} \leq s_i \leq t_i$ . Zakładamy, że długość fragmentu wynosi  $\|\sigma(t_i) - \sigma(t_{i-1})\|$ . Masa fragmentu wynosi w przybliżeniu

$$m_i \approx f(\sigma(s_i)) \|\sigma(t_i) - \sigma(t_{i-1})\|.$$

Dalej z twierdzenia Lagrange'a mamy

$$\begin{aligned}x(t_i) - x(t_{i-1}) &= x'(\alpha_i)\Delta t_i \approx x'(s_i)\Delta t_i, \\y(t_i) - y(t_{i-1}) &= y'(\beta_i)\Delta t_i \approx y'(s_i)\Delta t_i, \\z(t_i) - z(t_{i-1}) &= z'(\gamma_i)\Delta t_i \approx z'(s_i)\Delta t_i,\end{aligned}$$

gdzie  $t_{i-1} \leq \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \leq t_i$ . Całkowita masa krzywej wynosi w przybliżeniu

$$\sum_{i=1}^n f(\sigma(s_i))\sqrt{x'(s_i)^2 + y'(s_i)^2 + z'(s_i)^2} \Delta t_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(\sigma(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt.$$

Sprawdźmy jeszcze, że różnica pomiędzy sumami

$$\sum_{i=1}^n f(\sigma(s_i))\sqrt{x'(\alpha_i)^2 + y'(\beta_i)^2 + z'(\gamma_i)^2} \Delta t_i$$

i sumą określoną wyżej dąży do zera, gdy  $n \rightarrow \infty$ . Skorzystamy z nierówności trójkąta

$$\left| \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} - \sqrt{a_0^2 + b_0^2 + c_0^2} \right| \leq \sqrt{(a_1 - a_0)^2 + (b_1 - b_0)^2 + (c_1 - c_0)^2}.$$

Różnica między sumami co do wartości bezwzględnej nie przekracza

$$\begin{aligned}& \sum_{i=1}^n |f(\sigma(s_i))| \left| \sqrt{x'(\alpha_i)^2 + y'(\beta_i)^2 + z'(\gamma_i)^2} - \sqrt{x'(s_i)^2 + y'(s_i)^2 + z'(s_i)^2} \right| \Delta t_i \\& \leq \sum_{i=1}^n |f(\sigma(s_i))| \sqrt{[x'(\alpha_i) - x'(s_i)]^2 + [y'(\beta_i) - y'(s_i)]^2 + [z'(\gamma_i) - z'(s_i)]^2} \Delta t_i.\end{aligned}$$

Funkcja  $f$  jest ograniczona na krzywej, np.  $|f(\sigma(t))| \leq M$ . Funkcje  $x'(t)$ ,  $y'(t)$  i  $z'(t)$  są jednostajnie ciągłe. Możemy założyć, że przedział  $[a, b]$  dzielimy na  $n$  równych części tak, aby oscylacja każdej z funkcji  $x'$ ,  $y'$  i  $z'$  była mniejsza niż  $\varepsilon > 0$  na każdym podprzedziale podziału. Wtedy ostatnie wyrażenie jest mniejsze niż

$$\sum_{i=1}^n M\sqrt{\varepsilon^2 + \varepsilon^2 + \varepsilon^2} \Delta t_i = M(b-a)\sqrt{3}\varepsilon.$$

Jeśli rozważamy funkcję  $f(x, y)$  dwu zmiennych i krzywą  $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , to  $\sigma(t) = (x(t), y(t))$  oraz

$$\int_{\sigma} f(x, y) ds = \int_a^b f(\sigma(t))\|\sigma'(t)\| dt = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

Jeśli  $f(x, y) \geq 0$ , to całkę można interpretować jako pole powierzchni płotu, którego podstawą jest krzywa  $\sigma$  a wysokość w punkcie  $(x, y)$  wynosi  $f(x, y)$ .

**Przykład.** Ciocia Tomka Sawyera kazała wybialkować płot z obu stron. Za każdy metr kwadratowy Tomek otrzymuje 2\$. Płot opisany jest przez

$$\sigma(t) = (30 \cos^3 t, 30 \sin^3 t), \quad 0 \leq t \leq \pi, \quad f(x, y) = 1 + \frac{y}{3}.$$

Mamy

$$\sigma'(t) = 30(-3 \cos^2 t \sin t, 3 \sin^2 t \cos t), \quad \|\sigma'(t)\| = 90 \sin t |\cos t|.$$

Powierzchnia płotu wynosi

$$\begin{aligned} 90 \int_0^\pi (1 + 10 \sin^3 t) \sin t |\cos t| dt &= 180 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 10 \sin^3 t) \sin t \cos t dt \\ &= 180 \left[ \frac{1}{2} \sin^2 t + 2 \sin^5 t \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 180 \cdot \frac{5}{2} = 450. \end{aligned}$$

Zarobek Tomka wyniesie zatem  $450 \cdot 2 \cdot 2 = 1800$  \$.

## 8.2 Całka krzywoliniowa zorientowana

Niech  $F(x, y, z)$  będzie polem sił w  $\mathbb{R}^3$  (np. sił grawitacyjnych lub elektrycznych). Tzn.  $F = (F_1, F_2, F_3)$ . Załóżmy, że obiekt porusza się pod działaniem pola sił  $F$  wzdłuż krzywej  $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Przyjmijmy, że  $\sigma$  jest linią prostą i obiekt został przesunięty o wektor  $d$ . Załóżmy też, że pole sił jest stałe, tzn.  $F(x, y, z)$  nie zależy od  $(x, y, z)$ . Wykonana praca wynosi wtedy  $\|F_d\| \|d\|$ , gdzie  $F_d$  oznacza składową siły  $F$  równoległą do przesunięcia  $d$ . Niech  $\alpha$  oznacza kąt pomiędzy  $F$  i  $d$ . Wtedy praca wynosi

$$\|F_d\| \|d\| = \|F\| \|d\| \cos \alpha = F \circ d.$$

Ogólnie, gdy  $\sigma$  nie jest linią prostą oraz  $F(x, y, z)$  nie jest stałym polem sił, to dzielimy przedział  $[a, b]$  na  $n$  równych części. Przyjmujemy, że fragment od  $\sigma(t_{i-1})$  do  $\sigma(t_i)$  jest odcinkiem i, że siła  $F$  jest stała na tym odcinku i wynosi  $F(\sigma(s_i))$ , gdzie  $t_{i-1} \leq s_i \leq t_i$ . Wykonana praca wynosi wtedy

$$W \approx \sum_{i=1}^n F(\sigma(s_i)) \circ [\sigma(t_i) - \sigma(t_{i-1})].$$

Dalej

$$\begin{aligned}\sigma(t_i) - \sigma(t_{i-1}) &= (x(t_i) - x(t_{i-1}), y(t_i) - y(t_{i-1}), z(t_i) - z(t_{i-1})) \\ &= (x'(\alpha_i), y'(\beta_i), z'(\gamma_i)) \Delta t_i \approx (x'(s_i), y'(s_i), z'(s_i)) \Delta t_i = \sigma'(s_i) \Delta t_i,\end{aligned}$$

gdzie  $t_{i-1} \leq \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \leq t_i$ . Zatem

$$W \approx \sum_{i=1}^n F(\sigma(s_i)) \circ \sigma'(s_i) \Delta t_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b F(\sigma(t)) \circ \sigma'(t) dt.$$

Przyjmujemy więc

$$W = \int_a^b F(\sigma(t)) \circ \sigma'(t) dt.$$

Tę wielkość nazywamy całką krzywoliniową zorientowaną. Stosuje się też inne oznaczenie na tę całkę

$$W = \int_{\sigma} F \circ ds.$$

**Uwaga.** Praca jest równa całce z iloczynu skalarnego siły i wektora stycznego do krzywej, czyli wektora prędkości. Załóżmy, że  $\sigma'(t) \neq 0$  dla  $a \leq t \leq b$ . Wtedy

$$T(t) = \frac{\sigma'(t)}{\|\sigma'(t)\|}$$

jest jednostkowym wektorem stycznym. Zatem

$$\begin{aligned}\int_{\sigma} F \circ ds &= \int_a^b F(\sigma(t)) \circ \sigma'(t) dt \\ &= \int_a^b F(\sigma(t)) \circ T(t) \|\sigma'(t)\| dt = \int_{\sigma} (F \circ T) ds.\end{aligned}\quad (8.1)$$

Całka zorientowana jest zatem równa całce niezorientowanej z iloczynu skalarnego siły  $F$  z jednostkowym wektorem stycznym do  $\sigma$ .

**Przykład.**  $\sigma(t) = (\sin t, \cos t, t)$   $0 \leq t \leq \pi$ , oraz  $F(x, y, z) = (x, y, z)$ . Wtedy  $\sigma'(t) = (\cos t, -\sin t, 1)$  oraz

$$\int_{\sigma} F \circ ds = \int_0^{\pi} (\sin t, \cos t, t) \circ (\cos t, -\sin t, 1) dt = \int_0^{\pi} t dt = \frac{\pi^2}{2}.$$



Używamy też innych oznaczeń na całkę zorientowaną. Jeśli  $F = (F_1, F_2, F_3)$  oraz  $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , to

$$\begin{aligned} & \int_a^b F(\sigma(t)) \circ \sigma'(t) dt \\ &= \int_a^b [F_1(x(t), y(t), z(t)) x'(t) + F_2(x(t), y(t), z(t)) y'(t) + F_3(x(t), y(t), z(t)) z'(t)] dt \\ &= \int_{\sigma} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz. \end{aligned}$$

W niektórych przypadkach całkę zorientowaną można obliczyć bez odwoływania się do definicji. Dotyczy to tzw. pól gradientowych.

**Twierdzenie 8.1.** *Jeśli  $F(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$  dla funkcji  $f(x, y, z)$  klasy  $C^1$ , to*

$$\int_{\sigma} F \circ ds = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a)),$$

gdzie  $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

*Dowód.*

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} F \circ ds &= \int_a^b F(\sigma(t)) \circ \sigma'(t) dt = \int_a^b \nabla f(\sigma(t)) \circ \sigma'(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} f(\sigma(t)) dt = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a)). \end{aligned}$$

□

**Przykład.**  $\int_{\sigma} y dx + x dy$ , gdzie  $\sigma(t) = \left(\frac{t^4}{4}, \sin^3 \frac{\pi t}{2}, 0\right)$ , dla  $0 \leq t \leq 1$ . Mamy  $F = (y, x, 0)$ . Wtedy  $\nabla f = F$  dla  $f(x, y, z) = xy$ . Zatem

$$\int_{\sigma} y dx + x dy = xy \Big|_{(0,0,0)}^{\left(\frac{1}{4}, 1, 0\right)} = \frac{1}{4}.$$

**Uwaga.** Nie każde pole wektorowe jest gradientem jakiejś funkcji. Załóżmy,

że

$$F = (F_1, F_2, F_3) = \nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right),$$

gdzie  $f$  jest klasy  $C^2$ . Wtedy

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}.$$

Czyli

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}.$$

**Przykłady.**

(a)  $F(x, y, z) = (x^2 + yz, x + y, z)$ . Mamy  $\frac{\partial F_1}{\partial y} = z, \frac{\partial F_2}{\partial x} = 1$ .

(b)  $F(x, y, z) = (yz, zx, xy)$ . Wtedy  $F = \nabla(xyz)$ .

(c)  $F = -\frac{GMm}{r^3}(x, y, z)$ . Dla  $V(x, y, z) = \frac{GMm}{r}$  mamy  $F = \nabla V$ .

(d)  $F = (0, 0, -mg)$ . Dla  $V = -mgz$  mamy  $F = \nabla V$ .

**Definicja 8.2.**  $C$  nazywamy krzywą Jordana (simple curve) jeśli  $C$  jest obrazem odwzorowania  $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  takiego, że  $\sigma$  jest kawałkami klasy  $C^1$  oraz  $\sigma$  jest różnowartościowe. Tzn.  $C$  nie ma samoprzecięć. Punkty  $\sigma(a)$  i  $\sigma(b)$  nazywamy końcami krzywej  $C$ . Każda krzywa Jordana ma dwie orientacje. Krzywą Jordana z wybraną orientacją nazywamy zorientowaną krzywą Jordana.

**Definicja 8.3.** Zamkniętą krzywą Jordana nazywamy obraz przez odwzorowanie  $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , kawałkami klasy  $C^1$ , gdzie  $\sigma$  jest różnowartościowe na  $[a, b)$  oraz  $\sigma(a) = \sigma(b)$ .

**Przykład.**  $C = \{x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$  jest okręgiem obieganym przeciwnie do wskazówek zegara (analogowego). Chcemy obliczyć  $\int_C (y, 0, 0) \circ ds = \int_C y dx$ .

Parametryzujemy  $C$  (zgodnie z orientacją)

$$\sigma(t) = (\cos t, \sin t, 0), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Wtedy

$$\int_C y dx = \int_0^{2\pi} \sin t (-\sin t) dt = -\pi.$$

Trzeba uważać, aby parametryzacja  $\sigma$  była różnowartościowa i zgodna z orientacją krzywej  $C$ . Np. parametryzacja

$$\eta(t) = (\cos 2t, \sin 2t, 0) \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

nie jest różnowartościowa. Okrąg  $C$  jest obiegany dwukrotnie. Z kolei

$$\eta(t) = (\sin t, \cos t, 0) \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

jest parametryzacją niezgodną z orientacją okręgu  $C$ .

Dla zorientowanej krzywej Jordana  $C$  symbolem  $C^-$  oznaczmy tę samą krzywą, ale z przeciwną orientacją. Wtedy z (8.1) wynika

$$\int_{C^-} F \circ ds = - \int_C F \circ ds,$$

bo przy zmianie orientacji wektor  $T$  zmienia się na wektor przeciwny.

Jeśli  $C$  jest złożona z fragmentów  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , to parametryzujemy każdy fragment osobno. Obliczamy

$$\int_C F \circ ds = \int_{C_1} F \circ ds + \dots + \int_{C_n} F \circ ds.$$

**Przykład.**  $C$  jest brzegiem kwadratu jednostkowego w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych zorientowanego przeciwnie do wskazówek zegara (dodatnio). Kolejne boki kwadratu parametryzujemy przedziałem  $[0, 1]$  następująco

$$t \mapsto (t, 0), \quad t \mapsto (1, t), \quad t \mapsto (1 - t, 1), \quad t \mapsto (0, 1 - t).$$

Wtedy

$$\int_C x^2 dx + xy dy = \int_0^1 t^2 dt + \int_0^1 t dt + \int_0^1 (1 - t)^2 (-1) dt = \frac{1}{2}.$$

## 9 Całki powierzchniowe

### 9.1 Powierzchnie w $\mathbb{R}^3$

Przykładem powierzchni jest wykres funkcji dwu zmiennych  $z = f(x, y)$ . Można zmienne zamienić rolami i otrzymać  $x = h(y, z)$  lub  $y = g(x, z)$ .

**Przykłady.**

- (a)  $x = z - z^3$ . W płaszczyźnie  $xz$  wykresem jest krzywa trzeciego stopnia. Do wykresu wraz punktem  $(z - z^3, 0, z)$  należy też cała prosta  $(z - z^3, y, z)$  równoległa do osi  $y$ . Wykres ma postać wygiętego nieskończonego arkusza papieru.
- (b) Torus, czyli powierzchnia powstała przez obrót wokół osi  $z$  okręgu w płaszczyźnie  $yz$ , nie jest wykresem funkcji. Można tę powierzchnię podzielić na dwie części górną i dolną, które są wykresami funkcji zmiennych  $xy$ .

**Definicja 9.1.** Powierzchnią sparametryzowaną nazywamy funkcję  $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ , gdzie  $D$  jest podzbiorem płaszczyzny. Powierzchnią nazywamy obraz  $S = \Phi(D)$ . Stosujemy zapis

$$\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in D.$$

Mówimy, że powierzchnia jest klasy  $C^1$  jeśli funkcje  $x$ ,  $y$  i  $z$  są klasy  $C^1$ .

Można myśleć, że odwzorowanie  $\Phi$  skręca, wygina, rozciąga i ścisza obszar  $D$ , aby otrzymać powierzchnię  $S$ .

### 9.2 Płaszczyzna styczna do powierzchni

Rozważamy odwzorowanie

$$t \rightarrow (x(t, v_0), y(t, v_0), z(t, v_0)) = \Phi(t, v_0),$$

gdzie  $(u_0, v_0)$  jest ustalonym punktem w  $D$ . To odwzorowanie opisuje krzywą w  $\mathbb{R}^3$  leżącą w powierzchni  $S$  i przechodzącą w chwili  $t = u_0$  przez punkt

$$\Phi(u_0, v_0) =: (x_0, y_0, z_0).$$

Wektorem stycznym do tej krzywej w punkcie  $(x_0, y_0, z_0)$  jest

$$T_u = \left( \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \right).$$

Podobnie rozpatrując krzywą  $t \rightarrow \Phi(u_0, t)$  otrzymamy inny wektor styczny w punkcie  $(x_0, y_0, z_0)$

$$T_v = \left( \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \right).$$

$T_u$  i  $T_v$  są wektorami stycznymi w punkcie  $(x_0, y_0, z_0)$  do krzywych leżących w powierzchni  $S$ . Płaszczyzna rozpięta przez te wektory jest zatem styczna do powierzchni w tym punkcie. Wektorem normalnym do powierzchni w  $(x_0, y_0, z_0)$  nazywamy wektor  $T_u \times T_v$ .

**Definicja 9.2.** *Mówimy, że powierzchnia jest gładka w punkcie  $\Phi(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$  jeśli  $T_u \times T_v \neq 0$ . Intuicyjnie oznacza to, że punkt  $(x_0, y_0, z_0)$  nie leży na krawędzi ani też nie jest rogiem powierzchni.*

**Przykład.**  $x = u \cos v, y = u \sin v, z = u$ . Powierzchnia jest klasy  $C^1$ . Mamy

$$T_u = (\cos v, \sin v, 1), \quad T_v = (-u \sin v, u \cos v, 0).$$

Wektory  $T_u$  i  $T_v$  są równoległe tylko, gdy  $T_v = 0$ . Tzn.  $u = 0$ . Zauważmy, że powierzchnia jest zapisana równaniem  $x^2 + y^2 = z^2$ , czyli opisuje dwa stożki stykające się w początku układu.

Przypuśćmy, że powierzchnia jest gładka w punkcie  $(x_0, y_0, z_0) = \Phi(u_0, v_0)$ . Wtedy równanie płaszczyzny stycznej ma postać

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \circ \eta = 0,$$

gdzie  $\eta = T_u \times T_v$  obliczone w  $(u_0, v_0)$ .

**Uwaga.**

$$(a_1, b_1, c_1) \times (a_2, b_2, c_2) = \left( \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right).$$

Otrzymany wektor jest prostopadły do  $(a_1, b_1, c_1)$  i  $(a_2, b_2, c_2)$ . Rzeczywiście

$$a_1 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

**Przykład.**  $x = u \cos v$ ,  $y = u \sin v$ ,  $z = u^2 + v^2$ . Chcemy znaleźć punkty, w których płaszczyzna styczna jest dobrze określona. Mamy

$$T_u = (\cos v, \sin v, 2u), \quad T_v = (-u \sin v, u \cos v, 2v).$$

$$\begin{aligned} T_u \times T_v &= \left( \begin{vmatrix} \sin v & 2u \\ u \cos v & 2v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2u & \cos v \\ 2v & -u \sin v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \cos v & \sin v \\ -u \sin v & u \cos v \end{vmatrix} \right) \\ &= (2v \sin v - 2u^2 \cos v, -2u^2 \sin v - 2v \cos v, u). \end{aligned}$$

Zatem  $T_u \times T_v = 0$  tylko, gdy  $u = v = 0$ . Przykładowo w punkcie  $(u_0, v_0) = (1, 0)$  mamy

$$(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, 1), \quad T_u \times T_v \Big|_{\substack{u=1 \\ v=0}} = (-2, 0, 1).$$

Równanie płaszczyzny stycznej w punkcie  $(1, 0, 1)$  ma zatem postać

$$-2(x - 1) + (z - 1) = 0$$

czyli po uproszczeniu

$$2x - z = 1.$$

Zauważmy, że

$$x^2 + y^2 = u^2, \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tg} v.$$

Zatem równanie powierzchni ma postać

$$z = x^2 + y^2 + \operatorname{arctg}^2 \left( \frac{y}{x} \right).$$

Przypuśćmy, że powierzchnia jest wykresem funkcji  $z = f(x, y)$ , dla  $(x, y) \in D$ . Naturalną parametryzacją jest  $x := x$ ,  $y := y$  i  $z = f(x, y)$ . Wtedy

$$T_x = \left( 1, 0, \frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad T_y = \left( 0, 1, \frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad T_x \times T_y = \left( -\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right).$$

Równanie płaszczyzny stycznej w punkcie  $(x_0, y_0, z_0)$ , gdzie  $z_0 = f(x_0, y_0)$  to

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \circ \left( -\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right) = 0.$$

Po przekształceniu otrzymujemy

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0),$$

gdzie pochodne cząstkowe obliczane są w punkcie  $(x_0, y_0)$ .

### Przykłady.

- (a) Chcemy sparametryzować powierzchnię (hiperboloide) o równaniu  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ . Dla ustalonej wartości  $z$  punkty  $(x, y)$  leżą na okręgu o środku w  $(0, 0)$  i promieniu  $\sqrt{z^2 + 1} = r \geq 1$ . Możemy przyjąć, że

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Mamy  $r^2 - z^2 = 1$ . Zatem możemy przyjąć

$$r = \cosh \psi, \quad z = \sinh \psi, \quad \psi \in \mathbb{R}.$$

Ostatecznie uzyskujemy

$$\begin{aligned} x &= \cosh \psi \cos \varphi, \\ y &= \cosh \psi \sin \varphi, \\ z &= \sinh \psi. \end{aligned}$$

- (b) Torus uzyskujemy obracając wokół osi  $z$  okrąg o promieniu  $r$ . Równanie okręgu w płaszczyźnie  $(y, z)$  ma postać

$$y = R + r \cos \varphi, \quad z = r \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Niech  $d$  oznacza odległość punktu  $(x, y, z)$  torusa od osi  $z$  czyli  $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Otrzymamy więc

$$d = R + r \cos \varphi, \quad z = r \sin \varphi.$$

Zatem

$$\begin{aligned} x &= d \cos \psi = (R + r \cos \varphi) \cos \psi, \\ y &= d \sin \psi = (R + r \cos \varphi) \sin \psi, \\ z &= r \sin \varphi. \end{aligned}$$

### 9.3 Pole powierzchni w $\mathbb{R}^3$

**Definicja 9.3.** Niech  $S$  będzie powierzchnią sparametryzowaną przez funkcję  $\Phi : D \xrightarrow{1-1} \mathbb{R}^3$  klasy  $C^1$ , gdzie  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Tzn.  $S = \Phi(D)$ . Polem powierzchni nazywamy liczbę

$$A(S) = \iint_D \|T_u \times T_v\| \, du \, dv.$$

**Wyjaśnienie.** Przeanalizujemy sumy całkowe całki określającej  $A(S)$ . Założymy, że  $D$  jest prostokątem podzielonym na  $n^2$  małych prostokątów  $R_{ij}$ . Wtedy

$$\Phi(D) = \bigcup_{i,j=1}^n \Phi(R_{ij}).$$

Prostokąty  $R_{ij}$  nie są rozłączne, bo mogą mieć wspólne boki. Ale część wspólna każdego z dwu zbiorów postaci  $\Phi(R_{ij})$  ma miarę zero. Zatem

$$A(S) = \sum_{i,j=1}^n A(\Phi(R_{ij})).$$

Rozważamy mały prostokąt  $R$  w płaszczyźnie  $(u, v)$  o lewym dolnym rogu w  $(u, v)$  a prawym górnym w  $(u + \Delta u, v + \Delta v)$ . Obraz  $\Phi(R)$  jest w przybliżeniu równoległobokiem o bokach

$$\begin{aligned} \Phi(u + \Delta u, v) - \Phi(u, v) &\approx \left( \frac{\partial x}{\partial u}(u, v), \frac{\partial y}{\partial u}(u, v), \frac{\partial z}{\partial u}(u, v) \right) \Delta u, \\ \Phi(u, v + \Delta v) - \Phi(u, v) &\approx \left( \frac{\partial x}{\partial v}(u, v), \frac{\partial y}{\partial v}(u, v), \frac{\partial z}{\partial v}(u, v) \right) \Delta v. \end{aligned}$$

Czyli

$$\begin{aligned} \Phi(u + \Delta u, v) - \Phi(u, v) &\approx T_u(u, v) \Delta u, \\ \Phi(u, v + \Delta v) - \Phi(u, v) &\approx T_v(u, v) \Delta v. \end{aligned}$$

Pole równoległoboku wynosi  $A(\varphi(R)) \approx \|T_u \times T_v\| \Delta u \Delta v$ . Rzeczywiście niech  $u = \frac{T_u \times T_v}{\|T_u \times T_v\|}$ . Wtedy

$$A(\varphi(R)) \approx |\det(u, T_u \Delta u, T_v \Delta v)| = \|T_u \times T_v\| \Delta u \Delta v.$$



Ostatecznie

$$A(S) = \sum_{i,j=1}^n \|T_u \times T_v\|_{\substack{u=u_{i-1} \\ v=v_{j-1}}} \Delta u_i \Delta v_j \xrightarrow{n} \iint_D \|T_u \times T_v\| du dv.$$

**Przykłady.**

- (a)  $D = \{(r, \theta) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1\}$ . Określamy  $\Phi(r, \theta) = (x, y, z)$ , gdzie

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = r.$$

Obliczamy

$$T_r = (\cos \theta, \sin \theta, 1), \quad T_\theta = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0).$$

Zatem

$$T_r \times T_\theta = (-r \cos \theta, -r \sin \theta, r), \quad \|T_r \times T_\theta\| = r\sqrt{2}.$$

Dla  $S = \Phi(D)$  mamy więc

$$A(S) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \|T_r \times T_\theta\| dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r\sqrt{2} dr d\theta = \pi\sqrt{2}.$$

- (b) Helikoida jest opisana przez

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = \theta,$$

dla parametrów spełniających  $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Dla ustalonej wartości kąta  $\theta$  otrzymujemy odcinek prostopadły do osi  $z$  łączący punkty  $(0, 0, \theta)$  i  $(\cos \theta, \sin \theta, \theta)$ . Powstała powierzchnia przypomina wałek do mielenia mięsa. Mamy

$$T_r = (\cos \theta, \sin \theta, 0), \quad T_\theta = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 1),$$

zatem

$$T_r \times T_\theta = (\sin \theta, -\cos \theta, r), \quad \|T_r \times T_\theta\| = \sqrt{r^2 + 1}.$$

Dalej

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{r^2 + 1} dr d\theta \\ &= 2\pi \left[ \frac{1}{2} r \sqrt{r^2 + 1} + \frac{1}{2} \log(r + \sqrt{r^2 + 1}) \right] \Big|_{r=0}^{r=1} = \pi \left[ \sqrt{2} + \log(\sqrt{2} + 1) \right]. \end{aligned}$$

Załóżmy, że powierzchnia jest wykresem funkcji  $z = g(x, y)$ , dla  $(x, y) \in D$ .  
Wtedy

$$T_x \times T_y = \left( -\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1 \right),$$

zatem

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

**Przykład.** Obliczmy pole półsfery o promieniu 1. Mamy

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Niech

$$D_R = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}, \quad R < 1.$$

Wtedy

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

Zatem

$$1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{1 - x^2 - y^2}.$$

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} A(S_R) &= \iint_{D_R} \frac{dx dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{r dr d\theta}{\sqrt{1 - r^2}} \\ &= 2\pi \left( -\sqrt{1 - r^2} \right) \Big|_{r=0}^{r=R} = 2\pi \left( 1 - \sqrt{1 - R^2} \right) \xrightarrow{R \rightarrow 1^-} 2\pi. \end{aligned}$$

## 9.4 Całki powierzchniowe funkcji skalarnych (niezorientowane)

Rozważamy powierzchnię  $S$  sparametryzowaną za pomocą funkcji  $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\Phi(D) = S$ ,

$$\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

Dla funkcji ciągłej  $f(x, y, z)$  określonej na  $S$  definiujemy całkę wzorem

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \|T_u \times T_v\| du dv.$$

Po rozpisaniu otrzymujemy wyrażenie

$$\iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{\left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right)^2} du dv,$$

przy czym

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

#### 9.4.1 Interpretacja całki powierzchniowej

Przypuśćmy, że funkcja  $\varrho(x, y, z)$  opisuje gęstość masy powierzchni  $S$  w punkcie  $(x, y, z)$ . Chcemy obliczyć całkowitą masę powierzchni. Załóżmy, że  $D$  jest prostokątem. Dzielimy  $D$  na  $n^2$  mniejszych prostokątów  $D_{ij}$ . Oznaczmy  $S_{ij} = \Phi(D_{ij})$ . Symbol  $A(S_{ij})$  oznacza pole powierzchni fragmentu  $S_{ij}$ . Dla dużych wartości  $n$  fragment  $S_{ij}$  jest "mały". Uznajemy, że gęstość masy na  $S_{ij}$  jest stała i wynosi  $\varrho(\Phi(u_i, v_j))$ , gdzie  $(u_i, v_j) \in D_{ij}$  (np.  $(u_i, v_j)$  jest prawym górnym rogiem prostokąta  $D_{ij}$ ). Całkowita masa wynosi w przybliżeniu

$$\begin{aligned} \sum_{ij,j=1}^n \varrho(\Phi(u_i, v_j)) A(S_{ij}) &\approx \sum_{ij,j=1}^n \varrho(\Phi(u_i, v_j)) \|T_u \times T_v\| \Big|_{\substack{u=u_i \\ v=v_j}} \Delta u_i \Delta v_j \\ &\xrightarrow{n} \iint_D \varrho(\Phi(u, v)) \|T_u \times T_v\| du dv \\ &= \iint_D \varrho(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \|T_u \times T_v\| du dv. \end{aligned}$$

Jeśli  $\varrho(x, y, z) \equiv 1$ , to  $A(S) = \iint_S dS$ .

**Przykłady.**

- (a) Rozważamy funkcję  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$  i helikoidę  $S$  określoną przez

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 1.$$

Wtedy  $\|T_r \times T_\theta\| = \sqrt{r^2 + 1}$ . Zatem

$$\iint_S \sqrt{x^2 + y^2 + 1} \, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{r^2 + 1} \sqrt{r^2 + 1} \, dr \, d\theta = 2\pi \left( \frac{1}{3} + 1 \right) = \frac{8\pi}{3}.$$

- (b)  $\iint_S z^2 \, dS$ , gdzie  $S$  jest sferą jednostkową  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Można użyć do obliczeń współrzędnych sferycznych. Inaczej, zauważamy, że

$$\iint_S z^2 \, dS = \iint_S x^2 \, dS = \iint_S y^2 \, dS.$$

Zatem

$$\iint_S z^2 \, dS = \frac{1}{3} \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) \, dS = \frac{1}{3} \iint_S dS = \frac{1}{3} A(S) = \frac{4\pi}{3}.$$

Przypuśćmy, że powierzchnia  $S$  jest wykresem funkcji  $z = g(x, y)$ , dla  $(x, y) \in D$ . Wtedy

$$\iint_S f(x, y, z) \, dS = \iint_D f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} \, dx \, dy. \quad (9.1)$$

**Przykład.** Powierzchnia  $S$  jest określona przez  $z = x^2 + y$  dla  $(x, y)$  z prostokąta  $D$  opisanego przez warunki  $0 \leq x \leq 1$  i  $-1 \leq y \leq 1$ . Wtedy

$$\begin{aligned} \iint_S x \, dS &= \int_0^1 \int_{-1}^1 x \sqrt{4x^2 + 2} \, dy \, dx = 2\sqrt{2} \int_0^1 x \sqrt{2x^2 + 1} \, dx \\ &= 2\sqrt{2} \frac{1}{6} (2x^2 + 1)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{3} [3\sqrt{3} - 1]. \end{aligned}$$

Rozważmy wykres  $z = g(x, y)$ . Równanie powierzchni ma postać

$$\Phi(x, y, z) := -g(x, y) + z = 0,$$

tn. powierzchnia jest poziomą funkcji  $\Phi$ . Wiemy, że wektorem normalnym do powierzchni w punkcie  $(x, y, z)$  jest gradient funkcji  $\Phi$  podzielony przez swoją długość, czyli wektor

$$n = \frac{\left(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + 1}}.$$

Niech  $\theta$  oznacza kąt pomiędzy wektorem  $n$  i wektorem  $(0, 0, 1)$ . Wtedy

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + 1}}.$$

Zatem

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, g(x, y)) \frac{1}{\cos \theta} dx dy,$$

gdzie  $\theta$  jest kątem pomiędzy wektorem normalnym i dodatnią półosią  $z$ .

**Uwaga.** Dla małego obszaru  $\Delta A$  w płaszczyźnie  $(x, y)$  pole powierzchni fragmentu  $\Delta S$  odpowiadającego  $\Delta A$  wynosi w przybliżeniu

$$\text{Pole}(\Delta S) \approx \frac{\text{Pole}(\Delta A)}{\cos \theta}.$$

**Przykład.** Obliczyć  $\iint_S x dS$ , gdzie  $S$  jest trójkątem o wierzchołkach  $(1, 0, 0)$ ,

$(0, 1, 0)$  i  $(0, 0, 1)$ . Równanie powierzchni to  $x+y+z = 1$ , czyli  $z = 1-x-y$ , dla  $(x, y)$  z trójkąta  $D$  w płaszczyźnie  $(x, y)$  opisanego przez  $x, y \geq 0$  i  $x+y \leq 1$ . Mamy  $n = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ . Zatem

$$\iint_S x dS = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x\sqrt{3} dy.$$

Inaczej:

$$\iint_S x dS = \frac{1}{3} \iint_S \underbrace{(x+y+z)}_1 dS = \frac{1}{3} A(S) = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}}{4} (\sqrt{2})^2 = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

## 9.5 Całki powierzchniowe pól wektorowych (zorientowane)

**Definicja 9.4.** Niech  $F(x, y, z)$  będzie polem wektorowym określonym na powierzchni  $S = \Phi(D)$ ,  $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Określamy całkę powierzchniową zorientowaną wzorem

$$\iint_{S_\Phi} F \circ dS = \iint_D F \circ (T_u \times T_v) du dv,$$

gdzie w całce po prawej stronie  $F = F(\Phi(u, v))$ .

**Uwaga.** Możemy powiązać tę całkę z całką niezorientowaną. Załóżmy, że  $T_u \times T_v \neq 0$ . Wtedy dla  $n = \frac{T_u \times T_v}{\|T_u \times T_v\|}$  mamy

$$\iint_D F \circ (T_u \times T_v) du dv = \iint_D (F \circ n) \|T_u \times T_v\| du dv = \iint_S (F \circ n) dS.$$

Otrzymujemy więc

$$\iint_{S_\Phi} F \circ dS = \iint_S (F \circ n) dS.$$

Zwrot wektora normalnego  $n$  zależy od parametryzacji, nawet od kolejności zmiennych  $u$  i  $v$ , bo  $T_u \times T_v = -(T_v \times T_u)$ .

**Przykład.** Niech  $S$  będzie sferą jednostkową oraz  $F(x, y, z) = (x, y, z)$ . Użyjemy współrzędnych sferycznych.

$$\begin{aligned} x &= \sin \varphi \cos \psi, \\ y &= \sin \varphi \sin \psi, \\ z &= \cos \varphi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_\varphi &= (\cos \varphi \cos \psi, \cos \varphi \sin \psi, -\sin \varphi), \\ T_\psi &= (-\sin \varphi \cos \psi, \sin \varphi \sin \psi, 0), \end{aligned}$$

zatem

$$T_\varphi \times T_\psi = (\sin^2 \varphi \cos \psi, \sin^2 \varphi \sin \psi, \cos \varphi \sin \varphi) = \sin \varphi (x, y, z).$$

Wektor normalny to

$$n = (x, y, z).$$

$$\iint_{S_\Phi} F \circ dS = \iint_S (n \circ n) dS = \iint_S dS = 4\pi.$$

**Definicja 9.5.** Powierzchnią zorientowaną nazywamy powierzchnię dwustronną, w której jedna strona została określona jako zewnętrzna (dodatnia) a druga jako wewnętrzna (ujemna).

W każdym punkcie powierzchni mamy dwa wektory normalne  $n_1$  i  $n_2$ ,  $n_2 = -n_1$ . Załóżmy, że w każdym punkcie wybraliśmy jeden wektor normalny  $n$  tak, że wybrane wektory wskazują jedną stronę powierzchni. Niech  $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  będzie parametryzacją powierzchni  $S$ . Wektor  $T_u \times T_v$  jest prostopadły do powierzchni  $S$  w punkcie  $\Phi(u, v)$ . Zatem  $T_u \times T_v = \lambda(u, v)n$ , gdzie  $n$  jest wybranym wektorem normalnym w punkcie  $\Phi(u, v)$ . Jeśli  $\lambda(u, v) > 0$  dla  $(u, v) \in D$ , to mówimy, że parametryzacja jest zgodna z orientacją. Jeśli  $\lambda(u, v) < 0$  dla  $(u, v) \in D$ , to parametryzacja jest niezgodna z orientacją (jest przeciwna).

Niech  $S$  będzie wykresem funkcji  $z = g(x, y)$ . Domyślna orientacja jest wyznaczona przez

$$n = \frac{\left(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + 1}}.$$

To oznacza, że górna część wykresu jest zewnętrzna.

**Twierdzenie 9.6.** Niech  $S$  będzie powierzchnią zorientowaną, a  $\Phi_1$  i  $\Phi_2$  dwiema parametryzacjami gładkimi zachowującymi orientację. Wtedy

$$\iint_{S_{\Phi_1}} F \circ dS = \iint_{S_{\Phi_2}} F \circ dS.$$

Jeśli  $\Phi_1$  zachowuje orientację, a  $\Phi_2$  zmienia orientację, to

$$\iint_{S_{\Phi_1}} F \circ dS = - \iint_{S_{\Phi_2}} F \circ dS.$$

Jeśli  $f(x, y, z)$  jest funkcją ciągłą na  $S$ , to

$$\iint_{S_{\Phi_1}} f dS = \iint_{S_{\Phi_2}} f dS,$$

tzn. całka niezorientowana nie zależy od wyboru parametryzacji.

*Dowód.* Rozważamy dwie parametryzacje powierzchni  $S$

$$\Phi_1 : D_1 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{oraz} \quad \Phi_2 : D_2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \text{dla} \quad D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^2.$$

Dla ustalonego punktu  $(x, y, z)$  powierzchni mamy

$$(x, y, z) = \Phi_1(u, v) = \Phi_2(u', v')$$

dla jedynych  $(u, v) \in D_1$  oraz  $(u', v') \in D_2$ . Uzyskujemy w ten sposób odwzorowanie  $g : D_1 \rightarrow D_2$

$$(u', v') = g(u, v).$$

Założmy, że  $g$  jest klasy  $C^1$ . Mamy

$$\Phi_1(u, v) = \Phi_2(u', v') = \Phi_2(g(u, v)).$$

Obliczamy macierz pochodnych obu stron.

$$D\Phi_1(u, v) = [T_u \ T_v] = D\Phi_2 \underbrace{(g(u, v))}_{(u', v')} Dg(u, v) = [T_{u'} \ T_{v'}] Dg(u, v).$$

**Lemat 9.7.**  $a$  i  $b$  są wektorami w  $\mathbb{R}^3$  a  $M$  macierzą wymiaru  $2 \times 2$ . Jeśli  $[c \ d] = [a \ b] M$ , to  $c \times d = \det M \cdot (a \times b)$ .

*Dowód lematu.* Niech  $M = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ . Wtedy

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a + \gamma b & \beta a + \delta b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} c \times d &= (\alpha a + \gamma b) \times (\beta a + \delta b) = \alpha\delta a \times b + \gamma\beta b \times a \\ &= (\alpha\delta - \gamma\beta) a \times b = \det M \cdot (a \times b). \end{aligned}$$

□

Z lematu otrzymujemy

$$T_u \times T_v = \det Dg(u, v) T_{u'} \times T_{v'}.$$



Wykonujemy obliczenia stosując w trakcie podstawienie  $(u', v') = g(u, v)$ .

$$\begin{aligned} \iint_{S_{\Phi_2}} F \circ dS &= \iint_{D_2} F(\Phi_2(u', v')) \circ (T_{u'} \times T_{v'}) du' dv' \\ &= \iint_{D_1} F(\Phi_2(g(u, v)) \circ (T_{u'} \times T_{v'}) |\det Dg(u, v)| du dv. \end{aligned}$$

Założmy, że  $\det Dg(u, v) > 0$  dla  $(u, v) \in D_1$ . Wtedy w wyniku otrzymujemy

$$\iint_{D_1} F(\Phi_1(u, v)) \circ (T_u \times T_v) du dv = \iint_{S_{\Phi_1}} F \circ dS.$$

Jeśli  $\det Dg(u, v) < 0$  dla  $(u, v) \in D_1$ , to w wyniku dostaniemy

$$- \iint_{S_{\Phi_1}} F \circ dS.$$

Dalej w wyniku tego samego podstawienia mamy

$$\begin{aligned} \iint_{S_{\Phi_2}} f dS &= \iint_{D_2} f(\Phi_2(u', v')) \|T_{u'} \times T_{v'}\| du' dv' \\ &= \iint_{D_1} f(\Phi_1(u, v)) \underbrace{\|T_{u'} \times T_{v'}\| |\det Dg(u, v)|}_{\|T_u \times T_v\|} du dv = \iint_{S_{\Phi_1}} f dS. \end{aligned}$$

□

### 9.5.1 Interpretacja fizyczna całki powierzchniowej zorientowanej

Zbadamy sumy Riemanna całki

$$\iint_S F \circ dS = \iint_D F(\Phi(u, v)) \circ (T_u \times T_v) du dv.$$

Niech  $R$  będzie małym prostokątem leżącym w  $D$  o bokach  $\Delta u$  i  $\Delta v$  równoległych do osi współrzędnych. Lewy dolny róg prostokąta  $R$  oznaczmy przez  $(u, v)$ . Obraz  $\Phi(R)$  prostokąta jest w przybliżeniu równoległobokiem o bokach  $T_u \Delta u$  i  $T_v \Delta v$ . Rozważmy wielkość

$$F(\Phi(u, v)) \circ (T_u \Delta u \times T_v \Delta v).$$

Ze wzoru

$$\det(a, b, c) = a \circ (b \times c), \quad \text{dla } a, b, c \in \mathbb{R}^3.$$

wynika, że jest to plus minus objętość równoległoscianu rozpiętego przez wektory  $F(\Phi(u, v))$ ,  $T_u \Delta u$  i  $T_v \Delta v$ . Zakładamy, że powierzchnia  $S$  jest zorientowana i parametryzacja  $\Phi$  jest zgodna z orientacją. Jeśli wektor  $F$  jest skierowany w stronę dodatnią powierzchni, to otrzymujemy objętość równoległoscianu, a jeśli w stronę ujemną, to otrzymamy minus objętość równoległoscianu.

Niech  $F$  oznacza prędkość przepływu jakiegoś płynu w punkcie  $(x, y, z) = \Phi(u, v)$ . Wtedy  $F$  wskazuje kierunek przepływu a liczba

$$|F(\Phi(u, v)) \circ (T_u \Delta u \times T_v \Delta v)|$$

mierzy ilość płynu jaki przepłynął przez fragment powierzchni  $\Phi(R)$  w jednostce czasu. Ilość płynu jaka przepłynie w jednostce czasu jest równa zatem plus minus objętości równoległoscianu rozpiętego przez  $F(\Phi(u, v))$ ,  $T_u \Delta u$  i  $T_v \Delta v$ . Znak zależy od tego, czy siła  $F$  jest skierowana na zewnątrz czy do wewnątrz powierzchni. Reasumując  $F \circ (T_u \times T_v) \Delta u \Delta v$  jest prędkością przepływu na stronę zewnętrzną przez fragment powierzchni  $\Phi(R)$ . Podzielmy obszar  $D$  na małe prostokąty  $R_{ij}$ . Wtedy

$$\sum_{i,j=1}^n F \circ (T_u \times T_v) \Big|_{\substack{u=u_{i-1} \\ v=v_{j-1}}} \Delta u_i \Delta v_j$$

jest sumaryczną prędkością przepływu na zewnątrz powierzchni  $S$ . Ostatecznie całka

$$\iint_S F \circ dS$$

jest prędkością przepływu na zewnątrz powierzchni  $S$ .

Całka powierzchniowa służy do obliczania przepływu ciepła. Niech  $T(x, y, z)$  oznacza temperaturę w punkcie  $(x, y, z)$ . Rozważmy pole wektorowe

$$F = -k \nabla T = -k \left( \frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right),$$

gdzie  $k$  jest stałym współczynnikiem dodatnim, zależnym od ośrodka. Wtedy całka  $\iint_S F \circ dS$  opisuje tempo przepływu ciepła na zewnątrz powierzchni  $S$ .

**Przykład.**  $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ ,  $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ .  
Założmy, że  $k = 1$ , czyli

$$F = -\nabla T = -2(x, y, z).$$

Wtedy  $F \circ n = -2$  oraz

$$\iint_S F \circ dS = \iint_S (F \circ n) dS = -8\pi.$$

### 9.5.2 Całka powierzchniowa dla wykresów funkcji

Przypuśćmy, że  $S$  jest wykresem funkcji  $z = g(x, y)$  dla  $(x, y) \in D$ . Stosujemy parametryzację

$$x := x, \quad y := y, \quad z = g(x, y).$$

Wtedy

$$T_x = \left(1, 0, \frac{\partial g}{\partial x}\right), \quad T_y = \left(0, 1, \frac{\partial g}{\partial y}\right), \quad T_x \times T_y = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1\right).$$

Dla pola wektorowego  $F = (P, Q, R)$  w  $\mathbb{R}^3$  otrzymujemy

$$\iint_S F \circ dS = \iint_D F \circ (T_x \times T_y) dx dy = \iint_D \left[-P \frac{\partial g}{\partial x} - Q \frac{\partial g}{\partial y} + R\right] dx dy, \quad (9.2)$$

przy czym funkcje  $P$ ,  $Q$  i  $R$  są obliczone w  $(x, y, g(x, y))$ .

## 10 Wzór Greena

Twierdzenie podaje związek pomiędzy całką krzywoliniową zorientowaną, wzdłuż krzywej zamkniętej  $C$  w  $\mathbb{R}^2$  a całką podwójną po obszarze  $D$  ograniczonym przez tę krzywą.

**Definicja 10.1.** *Obszar  $D$  nazywamy elementarnym typu I jeśli*

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\},$$

gdzie  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  są funkcjami ciągłymi.  $D$  nazywamy elementarnym typu II jeśli

$$D = \{(x, y) : c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}.$$

$D$  nazywamy obszarem elementarnym, jeśli jest jednocześnie elementarny typu I i typu II.

Brzeg każdego obszaru orientujemy przeciwnie do wskazówek zegara (analogowego).

**Lemat 10.2.** Niech  $P(x, y)$  będzie funkcją klasy  $C^1$  na obszarze  $D$  typu I. Wtedy

$$\int_C P dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy,$$

gdzie  $C$  jest brzegiem obszaru  $D$ .

**Uwaga.** Przypuśćmy, że pole wektorowe  $F$  w  $\mathbb{R}^3$  ma postać  $F = (P, 0, 0)$ . Wtedy

$$\int_C F \circ ds = \int_C P dx.$$

*Dowód.* Brzeg obszaru  $D$  składa się dwu odcinków pionowych odpowiadających  $x = a$  i  $x = b$  oraz z dwu fragmentów wykresu  $C_1^+$  i  $C_2^-$  dla funkcji  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$ . Na odcinkach pionowych mamy  $dx = 0$ . Zatem

$$\int_C P dx = \int_{C_1^+} P dx - \int_{C_2^+} P dx.$$

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy dx = \int_a^b P(x, y) \Big|_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} dx \\ &= \int_a^b P(x, \varphi_2(x)) dx - \int_a^b P(x, \varphi_1(x)) dx \\ &= \int_{C_2^+} P(x, y) dx - \int_{C_1^+} P(x, y) dx = - \int_C P dx. \end{aligned}$$

□

Zamieniając rolami  $P$  i  $Q$  oraz  $x$  i  $y$  otrzymamy

**Lemat 10.3.** Niech  $Q(x, y)$  będzie funkcją klasy  $C^1$  na obszarze  $D$  typu II. Wtedy

$$\int_C Q dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy,$$

gdzie  $C$  jest brzegiem obszaru  $D$ .

**Uwaga.** Zmiana znaku z „-” na „+” wynika z tego, że zamieniając rolami  $x$  i  $y$  zmieniamy orientację.

*Dowód.* Brzeg obszaru  $D$  składa się z dwu odcinków poziomych odpowiadających  $y = c$  i  $y = d$  oraz z dwu fragmentów wykresu  $C_1^-$  i  $C_2^+$  dla funkcji  $\psi_1$  i  $\psi_2$ . Na odcinkach poziomych mamy  $dy = 0$ . Zatem

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy &= \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_c^d Q(x, y) \Big|_{x=\psi_1(y)}^{x=\psi_2(y)} dy \\ &= \int_c^d Q(\psi_2(y), y) dy - \int_c^d Q(\psi_1(y), y) dy \\ &= \int_{C_2^+} Q(x, y) dy + \int_{C_1^-} Q(x, y) dy = \int_C Q dy. \end{aligned}$$

□

Lematy dają w wyniku

**Twierdzenie 10.4** (wzór Greena). *Niech  $D$  będzie obszarem elementarnym z brzegiem  $C$  zorientowanym dodatnio. Niech  $P(x, y)$  i  $Q(x, y)$  będą funkcjami klasy  $C^1$  określonymi na  $D$ . Wtedy*

$$\int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

**Uwaga.** Wzór Greena jest prawdziwy dla obszarów, które można podzielić na kilka obszarów elementarnych. Przypuśćmy, że  $D = D_1 \cup D_2$  oraz wnętrza obszarów  $D_1$  i  $D_2$  są rozłączne. Niech  $C_0$  oznacza część wspólną brzegów obszarów  $\partial D_1$  i  $\partial D_2$ . Wtedy

$$\begin{aligned} \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \iint_{D_1} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \iint_{D_2} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \int_{\partial D_1} P dx + Q dy + \int_{\partial D_2} P dx + Q dy = \int_{\partial D} P dx + Q dy, \end{aligned}$$

bo całki wzdłuż  $C_0$  zniósą się.

**Uwaga.** Przypuśćmy, że funkcja  $P$  zeruje się na brzegu obszaru  $D$ , ale  $\frac{\partial P}{\partial y}$  nie jest zerowa w  $D$ . Otrzymamy

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_{\partial D} P(x, y) dx = 0.$$

Np. niech  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$  i  $P(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ .

**Twierdzenie 10.5.** Niech  $D$  będzie obszarem, dla którego można zastosować wzór Greena. Wtedy

$$A(D) = \frac{1}{2} \int_{\partial D} (x dy - y dx).$$

*Dowód.* Przyjmijmy  $P(x, y) = -y$  oraz  $Q(x, y) = x$ . Mamy

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2.$$

Zatem

$$\int_{\partial D} (x dy - y dx) = \iint_D 2 dx dy = 2 A(D).$$

□

**Przykład.** Hipocykloida jest określona równaniem

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, \quad a > 0.$$

Chcemy obliczyć pole obszaru ograniczonego przez tę krzywą. Zastosujemy parametryzację

$$x^{1/3} = a^{1/3} \cos \theta, \quad y^{1/3} = a^{1/3} \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Wtedy

$$x = a \cos^3 \theta, \quad y = a \sin^3 \theta.$$

Dalej

$$\begin{aligned} A(D) &= \frac{1}{2} \int_{\partial D} (x dy - y dx) = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} [3 \cos^3 \theta \sin^2 \theta \cos \theta + 3 \sin^3 \theta \cos^2 \theta \sin \theta] d\theta \\ &= \frac{3a^2}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta = \frac{3a^2}{8} \int_0^{2\pi} \sin^2 2\theta d\theta = \frac{3a}{16} \int_0^{2\pi} [\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta] d\theta = \frac{3\pi}{8} a^2. \end{aligned}$$

## 10.1 Rotacja

Dla pola wektorowego  $F = (P, Q)$  na płaszczyźnie wielkość

$$\operatorname{curl} F = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

nazywamy rotacją. Wyobrażamy sobie, że  $F(x, y)$  określa prędkość przepływu w punkcie  $(x, y)$ . Załóżmy, że obiekt pod wpływem działania  $F(x, y)$  przesuwa się w kierunku poziomym (równoległe do osi  $x$ ) z punktu  $(x, y)$  o  $\Delta x > 0$ . Wtedy obiekt ten uzyska przyrost prędkości w górę (czyli w lewo) o

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \Delta x \approx Q(x + \Delta x, y) - Q(x, y).$$

Czyli przyrost prędkości w górę na jednostkę przesunięcia w prawo wynosi  $\frac{\partial Q}{\partial x}$ . Tzn. wielkość  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  określa tendencję do obrotu obiektu w kierunku dodatnim (w lewo). Podobnie przy przesunięciu obiektu w górę o  $\Delta y$  z punktu  $(x, y)$  obiekt uzyskuje przyrost prędkości w prawo wynoszący

$$P(x, y + \Delta y) - P(x, y) \approx \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \Delta y.$$

Tzn. wielkość  $\frac{\partial P}{\partial y}$  określa tendencję do skrętu w kierunku ujemnym. Reasumując wielkość  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$  określa wypadkową tendencję do skrętu obiektu w kierunku dodatnim.

## 11 Twierdzenie Stokesa

Twierdzenie Stokesa podaje związek pomiędzy całką krzywoliniową zorientowaną wzdłuż krzywej zamkniętej  $C$  w  $\mathbb{R}^3$  a całką powierzchniową zorientowaną po powierzchni  $S$ , dla której krzywa  $C$  jest brzegiem, tzn.  $C = \partial S$ . Na brzegu wprowadzamy orientację zgodną z orientacją powierzchni, tzn. idąc wzdłuż brzegu z głową podniesioną w kierunku dodatniej strony powierzchni, powierzchnia znajduje się po naszej lewej stronie. Twierdzenie Stokesa przypomina twierdzenie Greena tyle, że powierzchnia  $S$  nie musi być płaska. Rozważymy przypadek, gdy  $S$  jest wykresem funkcji  $z = g(x, y)$ , dla  $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ .

**Twierdzenie 11.1** (wzór Stokesa). *Niech  $S$  będzie zorientowaną powierzchnią będącą wykresem funkcji  $z = g(x, y)$ ,  $(x, y) \in D$ , gdzie  $g$  jest klasy  $C^2$ . Zakładamy, że do obszaru  $D$  można zastosować wzór Greena. Wtedy*

$$\int_{\partial S} F \circ ds = \iint_S \text{curl } F \circ dS,$$

gdzie  $\text{curl } F$  jest polem wektorowym określonym dla  $F = (P, Q, R)$  wzorem

$$\text{curl } F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

**Uwaga.** Jeśli  $R \equiv 0$ , oraz  $P$  i  $Q$  nie zależą od  $z$ , to  $\text{curl } F = (0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})$ .

*Dowód.* Ze wzoru (9.2) mamy

$$\begin{aligned} & \iint_S \text{curl } F \circ dS \\ &= \iint_D \left[ - \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \frac{\partial z}{\partial x} - \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dx dy \end{aligned}$$

Niech  $\sigma(t) = (x(t), y(t))$  będzie parametryzacją brzegu  $\partial D$ , dla  $a \leq t \leq b$ . Wtedy

$$\eta(t) = (x(t), y(t), g(x(t), y(t))), \quad a \leq t \leq b$$



jest parametryzacją brzegu  $\partial S$ . Zatem

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial S} F \circ ds &= \int_a^b \left[ P \frac{dx}{dt} + Q \frac{dy}{dt} + R \left( \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right) \right] dt \\
 &= \int_a^b \left[ \left( P + R \frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{dx}{dt} + \left( Q + R \frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{dy}{dt} \right] \\
 &= \int_{\partial D} \left( P + R \frac{\partial z}{\partial x} \right) dx + \left( Q + R \frac{\partial z}{\partial y} \right) dy \\
 &= \iint_D \left[ \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \left( \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{\partial z}{\partial y} + R \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} - \left( \frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{\partial z}{\partial x} - R \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right] dx dy \\
 &= \iint_S \operatorname{curl} F \circ dS
 \end{aligned}$$

□

### Przykłady.

- (a)  $F(x, y, z) = (ye^z, xe^z, xye^z)$ . Przypuśćmy, że powierzchnia  $S$  spełnia warunki twierdzenia. Mamy

$$\operatorname{curl} F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ye^z & xe^z & xye^z \end{vmatrix} = 0.$$

Zatem

$$\int_{\partial S} F \circ ds = \iint_S \operatorname{curl} F \circ dS = 0.$$

- (b)  $C$  jest krzywą będącą przecięciem cylindra  $x^2 + y^2 = 1$  oraz płaszczyzny  $x + y + z = 1$ . Orientacja krzywej wyznacza dodatnią orientację po rzutowaniu na okrąg  $x^2 + y^2 = 1$ .  $C$  jest brzegiem powierzchni  $S$ ,

która jest wyznaczona przez wykres funkcji  $z = 1 - x - y$  określonej na kole  $x^2 + y^2 \leq 1$ . Obliczamy

$$\int_C -y^3 dx + x^3 dy - z^3 dz = \iint_S \operatorname{curl}(-y^3, x^3, -z^3) \circ dS.$$

Mamy

$$\operatorname{curl}(-y^3, x^3, -z^3) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^3 & x^3 & -z^3 \end{vmatrix} = (0, 0, 3(x^2 + y^2)).$$

Zatem ze wzoru (9.2) otrzymujemy

$$\int_C -y^3 dx + x^3 dy - z^3 dz = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} 3(x^2+y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 3r^3 dr d\theta = 2\pi \cdot \frac{3}{4} = \frac{3\pi}{2}.$$

Wzór Stokesa jest prawdziwy dla powierzchni sparametryzowanych, a nie tylko dla wykresów funkcji  $z = g(x, y)$ ,  $(x, y) \in D$ . Pewna komplikacja dotyczy brzegu  $\partial S$ , gdy  $S$  jest sparametryzowana.

**Przykład.** Rozważmy sferę jednostkową  $S$  i parametryzację przez współrzędne sferyczne  $0 \leq \varphi \leq \pi$ ,  $0 \leq \psi \leq 2\pi$ . Parametryzacja nie jest różnowartościowa.

**Twierdzenie 11.2** (wzór Stokesa). *Niech  $S$  będzie powierzchnią sparametryzowaną przez  $\Phi : D \rightarrow S$ , gdzie  $D$  jest obszarem w  $\mathbb{R}^2$ , do którego można zastosować wzór Greena. Zakładamy, że odwzorowanie  $\Phi$  jest klasy  $C^1$  i różnowartościowe. Brzeg obszaru  $D$  orientujemy dodatnio. Wtedy brzegiem powierzchni  $S$  jest  $\partial S = \Phi(\partial D)$ . Wprowadzamy orientację na  $\partial S$  przenosząc ją z  $\partial D$ . Tzn., jeśli  $\sigma(t)$  jest parametryzacją brzegu  $\partial D$  zgodną z orientacją, to  $\eta(t) = \Phi(\sigma(t))$  jest parametryzacją  $\partial S$ . Wtedy*

$$\int_{\partial S} F \circ ds = \iint_S \operatorname{curl} F \circ dS.$$

**Przykład.** Niech  $S$  będzie powierzchnią klosha  $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 2$ ,  $z \geq 0$ . Brzegiem klosha jest okrąg  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = 0$ . Dla pola  $F = (y, -x, e^{xz})$

chcemy obliczyć

$$\iint_S \operatorname{curl} F \circ dS = \int_{\partial S} F \circ ds.$$

Parametryzujemy  $\partial S$  poprzez  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $z = 0$  dla  $0 \leq t \leq 2\pi$ .  
Otrzymujemy w wyniku

$$\int_0^{2\pi} (-\sin^2 t - \cos^2 t) dt = -2\pi.$$

### 11.1 Interpretacja rotacji $\operatorname{curl} F$

Wybermy wektor jednostkowy  $n$  i punkt  $P$  przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ . Niech  $F$  będzie polem wektorowym w  $\mathbb{R}^3$ . Symbolem  $S_r$  oznaczamy koło o promieniu  $r$  i środku w  $P$ , prostopadłe do wektora  $n$ . Ze wzoru Stokesa mamy

$$\int_{\partial S_r} F \circ ds = \iint_{S_r} \operatorname{curl} F \circ dS = \iint_{S_r} (\operatorname{curl} F \circ n) dS = [\operatorname{curl} F(Q_r) \circ n] A(S_r),$$

gdzie  $Q_r$  jest pewnym punktem w  $S_r$ . Otrzymujemy więc

$$\operatorname{curl} F(Q_r) \circ n = \frac{1}{A(S_r)} \int_{\partial S_r} F \circ ds = \frac{1}{A(S_r)} \int_{\partial S_r} (F \circ T) ds,$$

gdzie  $T$  jest jednostkowym wektorem stycznym do krzywej. Przechodząc do granicy, gdy  $r \rightarrow 0^+$  otrzymamy

$$\operatorname{curl} F(P) \circ n = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{A(S_r)} \int_{\partial S_r} (F \circ T) ds.$$

### 11.2 Interpretacja całki $\int_C (F \circ T) ds$ dla krzywej zamkniętej $C$

(a) Załóżmy, że pole  $F$  jest styczne do krzywej  $C$  w kierunku zgodnym z orientacją  $C$ . Wtedy  $F \circ T > 0$ . Zatem  $\int_C (F \circ T) ds > 0$ .

(b) Jeśli pole  $F$  jest styczne do krzywej  $C$  w kierunku przeciwnym, to  $F \circ T < 0$ . Zatem  $\int_C (F \circ T) ds < 0$ .

(c) Przypuśćmy, że pole  $F$  jest prostopadłe do  $C$ . Wtedy  $\int_C (F \circ T) ds = 0$ .

Ogólnie wielkość  $\int_C (F \circ T) ds$  oznacza ilość płynu przepływającego w jednostce czasu, w kierunku dodatnim wokół krzywej  $C$ , jeśli  $F$  oznacza prędkość przepływu. Wielkość  $\int_C F \circ ds$  nazywamy cyrkulacją pola  $F$  wokół krzywej  $C$ .

Zatem  $\text{curl } F(P) \circ n$  jest cyrkulacją pola na jednostkę powierzchni w punkcie  $P$  w płaszczyźnie prostopadłej do wektora  $n$ . Przy ustalonym punkcie  $P$  niech

$$n = \frac{\text{curl } F(P)}{\|\text{curl } F(P)\|},$$

przy założeniu, że  $\text{curl } F(P) \neq 0$ . Wtedy wielkość  $\text{curl } F(P) \circ n$  jest największa z możliwych. Tzn. w płaszczyźnie prostopadłej do wektora  $\text{curl } F(P)$  mamy największą tendencję do cyrkulacji.

**Uwaga.** Wzór Stokesa można zapisać następująco, po przejściu do całek niezorientowanych.

$$\int_{\partial S} (F \circ T) ds = \iint_S (\text{curl } F \circ n) dS.$$

## 12 Wzór Gaussa-Ostrogradskiego

Dla pola wektorowego klasy  $F = (F_1, F_2, F_3)$  w  $\mathbb{R}^3$  klasy  $C^1$  dywergencją nazywamy funkcję

$$\text{div } F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \circ (F_1, F_2, F_3).$$

Twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego mówi, że przepływ pola  $F$  na zewnątrz zorientowanej powierzchni zamkniętej jest równy całce potrójnej z dywergencji pola  $F$  po obszarze ograniczonym przez powierzchnię  $S$ .

**Definicja 12.1.** Mówimy, że obszar  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  jest elementarny, jeśli ma jedną z trzech postaci:

$$(a) \Omega = \{(x, y, z) : (x, y) \in D_1, \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y)\},$$

$$(b) \Omega = \{(x, y, z) : (x, z) \in D_2, \psi_1(x, z) \leq y \leq \psi_2(x, z)\},$$

$$(c) \Omega = \{(x, y, z) : (y, z) \in D_3, \eta_1(y, z) \leq x \leq \eta_2(y, z)\},$$

gdzie funkcje  $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2, \eta_1, \eta_2$  są ciągłe, a obszary  $D_1, D_2$  i  $D_3$  takie jak we wzorze Greena. Obszar  $\Omega$  jest elementarny w trzech kierunkach, jeśli ma każdą z tych postaci.

**Przykłady.** Prostopadłościan  $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$  i kula w  $\mathbb{R}^3$  są elementarne w trzech kierunkach.

Powierzchnię zamkniętą orientujemy domyślnie tak, że zewnętrzna część jest dodatnia. Jeśli  $S$  składa się z kilku części  $S_1, S_2, \dots, S_n$ , to

$$\iint_S F \circ dS = \iint_{S_1} F \circ dS + \dots + \iint_{S_n} F \circ dS.$$

**Przykład.** Niech  $S$  będzie brzegiem sześcianu  $[-1, 1]^3$ . Zewnętrzne wektory normalne do poszczególnych ścian mają postać

$$\begin{aligned} n_1 &= (0, 0, -1), & n_2 &= (0, 0, 1), \\ n_3 &= (0, -1, 0), & n_4 &= (0, 1, 0), \\ n_5 &= (-1, 0, 0), & n_6 &= (1, 0, 0). \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} \iint_S F \circ dS &= \iint_S (F \circ n) dS = \sum_{i=1}^6 \iint_{S_i} (F \circ n_i) dS \\ &= - \iint_{S_1} F_3 dS + \iint_{S_2} F_3 dS - \iint_{S_3} F_2 dS + \iint_{S_4} F_2 dS - \iint_{S_5} F_1 dS + \iint_{S_6} F_1 dS. \end{aligned}$$

**Twierdzenie 12.2** (wzór Gaussa Ostrogradskiego). Niech  $\Omega$  będzie obszarem elementarnym w trzech kierunkach w  $\mathbb{R}^3$ . Brzeg  $\partial\Omega$  orientujemy dodatnio. Wtedy dla pola wektorowego  $F$  klasy  $C^1$  w  $\mathbb{R}^3$  mamy

$$\iint_{\partial\Omega} F \circ dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dx dy dz.$$

*Dowód.* Mamy

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dx dy dz = \iiint_{\Omega} \frac{\partial F_1}{\partial x} dx dy dz + \iiint_{\Omega} \frac{\partial F_2}{\partial y} dx dy dz + \iiint_{\Omega} \frac{\partial F_3}{\partial z} dx dy dz.$$

$$\iint_{\partial\Omega} F \circ dS = \iint_{\partial\Omega} (F \circ n) dS = \iint_{\partial\Omega} F_1 n_1 dS + \iint_{\partial\Omega} F_2 n_2 dS + \iint_{\partial\Omega} F_3 n_3 dS.$$

Wystarczy pokazać, że odpowiednie składniki są sobie równe.

Pokażemy, że

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial F_3}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\partial\Omega} F_3 n_3 dS.$$

$\Omega$  ma postać

$$\Omega = \{(x, y, z) : \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y), (x, y) \in D_1\}.$$

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \frac{\partial F_3}{\partial z} dx dy dz &= \iint_{D_1} \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} \frac{\partial F_3}{\partial z} dz dx dy \\ &= \iint_{D_1} [F_3(x, y, \varphi_2(x, y)) - F_3(x, y, \varphi_1(x, y))] dx dy \\ &= \iint_{D_1} F_3(x, y, \varphi_2(x, y)) dx dy - \iint_{D_1} F_3(x, y, \varphi_1(x, y)) dx dy. \end{aligned}$$

Brzeg obszaru  $\Omega$  składa się z powierzchni dolnej  $S_1^-$  i górnej  $S_2^+$  związanych z wykresami funkcji  $z = \varphi_1(x, y)$  i  $z = \varphi_2(x, y)$  dla  $(x, y) \in D_1$  oraz z powierzchni pionowej pomiędzy tymi wykresami. Wektory normalne do powierzchni pionowej mają postać  $(n_1, n_2, 0)$ , tzn.  $n_3 = 0$ . Zatem

$$\iint_{\partial\Omega} F_3 n_3 dS = \iint_{S_2^+} F_3 n_3 dS - \iint_{S_1^+} F_3 n_3 dS.$$

Dla  $S_2$  wektor normalny ma postać

$$n = \frac{\left(-\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}, -\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}, 1\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)^2 + 1}}.$$

Stąd na podstawie (9.1) otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \iint_{S_2^+} F_3 n_3 dS \\ &= \iint_{D_1} F_3(x, y, \varphi_2(x, y)) \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right)^2 + 1}} \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right)^2 + 1} dx dy \\ &= \iint_{D_1} F_3(x, y, \varphi_2(x, y)) dx dy. \end{aligned}$$

Podobnie uzyskujemy

$$\iint_{S_1^+} F_3 n_3 dS = \iint_{D_1} F_3(x, y, \varphi_1(x, y)) dx dy.$$

□

### Przykłady.

- (a)  $F = (2x, y^2, z^2)$  oraz  $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ . Niech  $B$  oznacza kulę jednostkową. Wtedy

$$\iint_S F \circ dS = \iiint_B (2+2y+2z) dx dy dz = \iiint_B 2 dx dy dz = 2 \operatorname{vol}(B) = \frac{8\pi}{3}.$$

- (b) Chcemy obliczyć całkę niezorientowaną  $\iint_S (x^2 + y + z) dS$ , gdzie  $S$  jest sferą jednostkową. Mamy  $n = (x, y, z)$ . Niech  $F = (x, 1, 1)$ . Wtedy

$$\iint_S (x^2 + y + z) dS = \iint_S (x, 1, 1) \circ dS = \iiint_B dx dy dz = \frac{4\pi}{3}.$$

## 12.1 Interpretacja fizyczna dywergencji

Rozważamy pole wektorowe  $F$  klasy  $C^1$  w  $\mathbb{R}^3$ . Dla ustalonego punktu  $P$  niech  $B_r$  oznacza kulę o promieniu  $r$  i środku w punkcie  $P$ . Ze wzoru Gaussa-Ostrogradskiego mamy

$$\iiint_{B_r} \operatorname{div} F dx dy dz = \int_{\partial B_r} (F \circ n) dS = \int_{\partial B_r} F \circ dS.$$

Z twierdzenia o wartości średniej mamy

$$\iiint_{B_r} \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz = \operatorname{div} F(Q_r) \cdot \operatorname{vol}(B_r)$$

dla pewnego punktu  $Q_r$  z  $B_r$ . Zatem

$$\operatorname{div} F(Q_r) = \frac{1}{\operatorname{vol}(B_r)} \int_{\partial B_r} F \circ dS.$$

Przechodząc do granicy  $r \rightarrow 0^+$  otrzymujemy

$$\operatorname{div} F(P) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\operatorname{vol}(B_r)} \int_{\partial B_r} F \circ dS.$$

Wyrażenie

$$\frac{1}{\operatorname{vol}(B_r)} \int_{\partial B_r} F \circ dS$$

jest prędkością przepływu na zewnątrz sfery  $\partial B_r$  na jednostkę objętości. Jeśli  $\operatorname{div} F(P) > 0$ , to punkt  $P$  nazywamy źródłem. Jeśli  $\operatorname{div} F(P) < 0$ , to punkt  $P$  nazywamy odpływem.

## 12.2 Potencjały i funkcje harmoniczne

Rozważać będziemy funkcje dwu zmiennych. Przypuśćmy, że  $F = \nabla V$ , gdzie  $V$  jest funkcją dwu zmiennych klasy  $C^1$ . Niech  $C$  będzie krzywą łączącą punkt  $A$  z punktem  $B$ . Wtedy z Twierdzenia 8.1 otrzymujemy

$$\int_C F \circ ds = V(B) - V(A).$$

Oznaczmy  $F = (P, Q)$ . Powstaje problem jak stwierdzić, czy  $F = \nabla V$  dla pewnego potencjału  $V$ . Szukamy funkcji  $V$  spełniającej

$$P = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial V}{\partial y}.$$

Żałóżmy, że  $P$  i  $Q$  są klasy  $C^1$ . Tzn. potencjał  $V$  musiałby być klasy  $C^2$ . Wtedy

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$



Powstaje następnym problem, czy warunek

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

jest wystarczający dla istnienia potencjału  $V$ . Przypuśćmy, że warunek ten jest spełniony. Wtedy dla krzywej zamkniętej  $C$  otaczającej obszar  $D$  mamy

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_D \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx dy = 0.$$

Założmy, że pole wektorowe  $F = (P, Q)$  spełnia  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  w obszarze spójnym i jednospójnym  $D$ . Jednospójność oznacza, że dopełnienie  $D$  jest również spójne. Ustalmy punkt  $(x_0, y_0)$  w  $D$ . Dla punktu  $(x_1, y_1)$  z  $D$  określamy

$$V(x_1, y_1) = \int_{C_{x_1, y_1}} F \circ ds = \int_{C_{x_1, y_1}} P dx + Q dy,$$

gdzie  $C_{x_1, y_1}$  jest łamaną o skończonej liczbie poziomych i pionowych odcinków, łączącą  $(x_0, y_0)$  z  $(x_1, y_1)$ . Całka nie zależy od wyboru łamanej  $C_{x_1, y_1}$ . Rzeczywiście niech  $\tilde{C}_{x_1, y_1}$  będzie inną taką łamaną. Łamane mogą przecinać się w kilku punktach. Rozważmy dwa kolejne punkty przecięcia i obszar  $D$  ograniczony przez łamane pomiędzy tymi punktami. Niech  $C$  i  $\tilde{C}$  oznaczają odcinki łamanych  $C_{x_1, y_1}$  i  $\tilde{C}_{x_1, y_1}$  tworzące brzeg obszaru  $D$ . Wtedy  $\partial D = C \cup \tilde{C}^-$  lub  $\partial D = C^- \cup \tilde{C}$ . Rozważymy pierwszy przypadek. Ze wzoru Greena mamy

$$0 = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial D} P dx + Q dy = \int_C P dx + Q dy - \int_{\tilde{C}} P dx + Q dy.$$

Zatem

$$\int_C P dx + Q dy = \int_{\tilde{C}} P dx + Q dy.$$

Poprzez zsumowanie otrzymamy

$$\int_{C_{x_1, y_1}} P dx + Q dy = \int_{\tilde{C}_{x_1, y_1}} P dx + Q dy.$$

Pokażemy, że  $\nabla V = F = (P, Q)$ . Rozważamy punkty  $(x_1, y_1)$  oraz  $(x_1 + h, y_1)$  dla małych wartości  $h$ . Możemy przyjąć, że  $C_{x_1+h, y_1} = C_{x_1, y_1} \cup l_h$ , gdzie  $l_h$  jest poziomym odcinkiem od  $(x_1, y_1)$  do  $(x_1 + h, y_1)$ . Odcinek ten możemy sparametryzować za pomocą

$$x = x_1 + t, \quad y = y_1, \quad 0 \leq t \leq h.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} V(x_1 + h, y_1) - V(x_1, y_1) &= \int_{C_{x_1+h, y_1}} P dx + Q dy - \int_{C_{x_1, y_1}} P dx + Q dy \\ &= \int_{l_h} P dx + Q dy = \int_0^h P(x_1 + t, y_1) dt. \end{aligned}$$

Zatem

$$\frac{V(x_1 + h, y_1) - V(x_1, y_1)}{h} = \frac{1}{h} \int_0^h P(x_1 + t, y_1) dt \xrightarrow{h \rightarrow 0} P(x_1, y_1).$$

To oznacza, że  $\frac{\partial V}{\partial x} = P$ . Podobnie pokazujemy, że  $\frac{\partial V}{\partial y} = Q$ . Mówimy, że

**Definicja 12.3.** *funkcja  $u(x, y)$  klasy  $C^2$  jest harmoniczna jeśli*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Przypuśćmy, że funkcja harmoniczna  $u(x, y)$  jest określona w obszarze spójnym i jednospójnym  $D$ . Oznaczmy

$$P = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad Q = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Wtedy

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Z poprzedniego rozumowania istnieje potencjał  $v(x, y)$  taki, że

$$\nabla v = (P, Q) = \left( -\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

tzn.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (12.1)$$

Otrzymujemy

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0,$$

czyli  $v(x, y)$  jest też funkcją harmoniczną. Funkcję  $v(x, y)$  określoną przez (12.1) nazywamy funkcją harmoniczną sprzężoną do funkcji  $u(x, y)$ .

**Przykład.**  $u = x^2 - y^2$  i  $2xy$  są sprzężonymi funkcjami harmonicznymi. Zauważmy, że dla  $z = x + iy$  mamy

$$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i 2xy.$$

### 12.3 Inny zapis całki $\iint_S F \circ dS$

Niech  $F = (P, Q, R)$  będzie polem wektorowym. Wtedy

$$\iint_S F \circ dS = \iint_S (F \circ n) dS = \iint_S P n_1 dS + \iint_S Q n_2 dS + \iint_S R n_3 dS.$$

Rozważmy mały fragment  $dS$  powierzchni  $S$  i rzut  $dS_{x,y}$  tego fragmentu na płaszczyznę  $xy$ . Wtedy stosunek pól tych fragmentów zależy od trzeciej współrzędnej wektora normalnego do  $dS$

$$n_3 \text{Pole}(dS) = \text{Pole}(dS_{x,y}).$$

Stąd

$$n_3 dS = dx dy.$$

Podobnie

$$n_1 dS = dy dz, \quad n_2 dS = dz dx.$$

Stosuje się więc alternatywny zapis

$$\iint_S F \circ dS = \iint_S P dy dz + \iint_S Q dz dx + \iint_S R dx dy.$$