

D1. Zadania dodatkowe do wykładu
analiza A3

1. Obliczyć dz/dt dla

$$z = 2x^2 - 3y^3; \quad x = \sqrt{t}, \quad y = e^{2t}$$

$$z = \arctg(y^2 - x^2); \quad x = \sin t, \quad y = \cos t.$$

2. Obliczyć $\partial z/\partial u$ oraz $\partial z/\partial v$ dla

$$z = \frac{x}{y^2}; \quad x = u + v - 1, \quad y = u - v - 1$$

$$z = \ln(x^2 - y^2); \quad x = u - v, \quad y = u^2 + v^2$$

$$z = 2e^{x^2y}; \quad x = \sqrt{xy}, \quad y = 1/u$$

3. Obliczyć $\partial z/\partial r$ oraz $\partial z/\partial s$ dla

$$z = \sin 2u \cos 3v; \quad u = (r + s)^2, \quad v = (r - s)^2$$

$$z = ue^v + ve^{-u}; \quad u = \ln r, \quad v = s \ln r$$

4. Obliczyć dw/dt dla

$$w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad x = e^t, \quad y = e^{-t}, \quad z = 2t$$

$$w = \sin xy^2z^3; \quad x = 3t, \quad y = t^{1/2}, \quad z = t^{1/3}$$

5. Obliczyć $\partial w/\partial u$ oraz $\partial w/\partial v$ dla

$$w = \frac{yz}{x^2 + xy}; \quad x = u^2, \quad y = v^2, \quad z = u^2 - v^2$$

$$w = y \ln xz; \quad x = ve^u, \quad y = u^2v^4, \quad z = ue^v$$

6. Niech $z = f(x - y)$. Pokazać, że $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial z}{\partial y}$.

7. Niech $w = f(x - y, y - z, z - x)$. Pokazać, że

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

8. Przyjmujemy, że pień drzewa ma kształt cylindra. Załóżmy, że średnica pnia rośnie w tempie 3 cm na rok a wysokość pnia rośnie 10 cm na rok. Jak szybko zmienia się objętość drewna w pniu, gdy pień ma wysokość 3m a średnica wynosi 20 cm ?

9. Samochód zbliża się do przejazdu kolejowego z prędkością 30 km/h. Zakładamy, że trasa pociągu jest prostopadła do szosy. Pociąg zbliża się do skrzyżowania z szosą z prędkością 150 km/h. Jak szybko zmienia się odległość samochodu od pociągu, gdy samochód jest 1 km od skrzyżowania, a pociąg jest 2 km od skrzyżowania ?

10. Masa rakiety wznoszącej się z Ziemi zmniejsza się z prędkością 40 kg na sekundę (ze względu na zużycie paliwa). Jak szybko zmienia się wielkość siły przyciągania F , gdy rakieta znajduje się 6400 km od środka Ziemi i wznosi się z prędkością 100 km na sekundę ? (*Wskazówka:* Na podstawie prawa Newtona $F = GMm/r^2$, gdzie G jest stałą grawitacji, M jest masą Ziemi, m jest masą rakiety oraz r oznacza odległość rakiety od środka Ziemi.)

11. Obliczyć dy/dx używając różniczkowanie niejawne.

$$x^3 + 4x^2y - 3xy^2 + 2y^3 + 5 = 0;$$

$$x^2 + y^2 + \sin xy^2 = 0.$$

12. Załóżmy, że równanie określa z jako funkcję zmiennych x i y . Zastosować różniczkowanie niejawne do obliczenia $\partial z/\partial x$ oraz $\partial z/\partial y$.

$$x^2z^2 - 2xyz + z^3y^2 = 3;$$

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{x+y+z} = \frac{1}{2}.$$