

①

Niech $\alpha, \beta \geq 0$ oraz $\alpha + \beta \leq \pi$.

Wtedy

$$\cos \alpha + \cos \beta \geq \cos(\alpha + \beta) + 1 \quad (*)$$

Rzeczywiście, możemy przyjąć $\alpha \geq \beta$.

(*) jest równoważna

$$2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \geq 2 \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2}$$

czyli

$$\cos \frac{\alpha - \beta}{2} \geq \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Możemy zmniejszyć $\alpha \geq \beta$. Oba kąty leżą w $[0, \frac{\pi}{2}]$

ciśc monotonność jest spójna, bo $\frac{\alpha - \beta}{2} \geq \frac{\alpha + \beta}{2}$.

Jeśli $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 2\pi$, $\alpha_i \geq 0$ oraz $n \geq 4$, to

znajdą się dwa kąty takie, iż

$$\alpha_i + \alpha_{i+1} \leq \pi.$$

Wtedy $\cos \alpha_i + \cos \alpha_{i+1} \geq \cos(\alpha_i + \alpha_{i+1}) + \cos 0$

Możemy wtedy zamienić $\tilde{\alpha}_i = \alpha_i + \alpha_{i+1}$ oraz $\tilde{\alpha}_{i+1} = 0$.

w ten sposób linia węzłów zmniejszy się o 1.

Powtarzamy tę czynność aż zostanie 3 kąty: α, β, γ .

Otrzymamy wówczas

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma + (n-3)$$

Rozwiązamy 3 kąty ⁽²⁾ α, β, γ , $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$.

$$4\pi = (\alpha + \beta) + (\beta + \gamma) + (\alpha + \gamma)$$

Zatem przyjmijmy jeden z kątów pośredni $\frac{4\pi}{3}$.

Np. niech $\alpha + \beta \geq \frac{4\pi}{3}$.

Wtedy

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Mamy $\frac{2\pi}{3} \leq \frac{\alpha + \beta}{2} \leq \pi$.

Stąd $\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \leq 0$. Najmniejsza wartość przy sumie $\alpha + \beta$

osiągnięta, gdy $\alpha = \beta$.

Zredukowaliśmy problem do

$$2\alpha + \gamma = 2\pi$$

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 2 \cos \alpha + \cos 2\alpha$$

$$= 2 \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha - 1$$

$$= 2 \left(\cos \alpha + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{3}{2} \geq -\frac{3}{2}.$$

Równie jest osiągnięta dla $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$

co daje $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ $\gamma = \frac{2\pi}{3}$.