

Założmy, że $\text{Im } A \subset \text{Im } B$. Wtedy $A = BC$ dla pewnego ograniczonego operatora C . Rzeczywiście, z założenia dla $x \in (\ker A)^\perp$ istnieje jedyny wektor $y \in (\ker B)^\perp$ taki, że $Ax = By$. Określmy $C_0x = y$. Operator C_0 jest liniowy, różnowartościowy i odwzorowuje $(\ker A)^\perp$ w $(\ker B)^\perp$. Ponadto $A = BC_0$ na podprzestrzeni $(\ker A)^\perp$. Pokażemy, że C_0 ma domknięty wykres. Założmy, że

$$(\ker A)^\perp \ni x_n \rightarrow x, \quad C_0x_n \rightarrow y.$$

Wtedy

$$Ax_n \rightarrow Ax, \quad Ax_n = BC_0x_n \rightarrow By.$$

Stąd $Ax = By$. Zatem $C_0x = y$.

Określmy operator liniowy $C : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ poprzez

$$Cx = \begin{cases} 0 & x \in \ker A, \\ C_0x & x \in (\ker A)^\perp. \end{cases}$$

Wtedy C jest ograniczonym operatorem liniowym z $\mathcal{H}$ w siebie spełniającym $A = BC$. Jeśli B jest zwarty, to również A jest zwarty.

Teza jest prawdziwa również dla przestrzeni Banacha. Niech $A \in B(X, Z)$, $B \in B(Y, Z)$, gdzie X, Y i Z są przestrzeniami Banacha oraz $\text{Im } A \subset \text{Im } B$. Niech X_A oraz Y_B oznaczają przestrzenie ilorazowe $X/\ker A$ i $Y/\ker B$, odpowiednio. Operatory A i B przenoszą się (bez zmiany obrazu) na operatory różnowartościowe i ograniczone z przestrzeni X_A i Y_B , odpowiednio, w przestrzeń Z . Oznaczmy je symbolami

$$\tilde{A} : X_A \rightarrow Z, \quad \tilde{B} : Y_B \rightarrow Z.$$

Mamy $\text{Im } \tilde{A} \subset \text{Im } \tilde{B}$. Zatem dla $u \in X_A$ istnieje jedyny element $v \in Y_B$ taki, że $\tilde{A}u = \tilde{B}v$. Określmy operator $C : X_A \rightarrow Y_B$ wzorem $Cu = v$. Operator C jest liniowy oraz $\tilde{A} = \tilde{B}C$. Sprawdźmy, że C ma domknięty wykres. Niech $u_n \rightarrow u$ w X_A oraz $Cu_n \rightarrow v$ w Y_B . Wtedy

$$\tilde{A}u_n \rightarrow \tilde{A}u, \quad \tilde{B}Cu_n \rightarrow \tilde{B}v.$$

Stąd $\tilde{A}u = \tilde{B}v$, czyli $Cu = v$.

Założmy, że operator $B : Y \rightarrow Z$ jest zwarty. Wtedy operator $\tilde{B} : Y_B \rightarrow Z$ też jest zwarty. Istotnie niech v_n będzie ciągiem ograniczonym w Y_B . Istnieje element $y_n \in Y$ taki, że $y_n \in v_n$ oraz $\|y_n\|_Y \leq \|v_n\|_{Y_B} + 1$. Zatem ciąg y_n jest ograniczony w Y . Wtedy ciąg $By_n = \tilde{B}v_n$ zawiera podciąg zbieżny w Z .

Niech P_A oznacza odwzorowanie ilorazowe $P_A : X \rightarrow X_A$. Wtedy

$$A = \tilde{A}P_A = \tilde{B}CP_A.$$

Stąd operator A jest zwarty.