

Symbol $B(0, r)$ oznacza kulę o promieniu r wg metryki określonej w zadaniu 3 z listy 11. Czy można znaleźć element x_0 , dla którego nie istnieje liczba $r > 0$ spełniająca

$$\overline{B(0, r)} \subset \{x^* : |x^*(x_0)| < 1\}$$

Równoważnie, czy można znaleźć element x_0 , dla którego nie istnieje liczba $R > 0$ o własności

$$\overline{B(0, 1)} \subset \{x^* : |x^*(x_0)| < R\} =: V_R$$

Niech $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ będzie gęstym ciągiem w kuli jednostkowej. Symbol X_n oznacza podprzestrzeń rozpiętą przez elementy $x_1, x_2, \dots, x_n$. Załóżmy, że $x_0 \notin X_n$ dla każdego n oraz $\|x_0\| = 1$. Na podstawie Wniosku 5.12 i Uwagi 5.14 z notatek do wykładu Analiza Funkcjonalna 1, istnieje funkcjonał x_n^* taki, że

$$x_n^*(x_0) = d(x_0, X_n), \quad \|x_n^*\| = 1, \quad x_n^*|_{X_n} = 0$$

Mamy

$$d(x_n^*, 0) = \sum_{k=n+1}^\infty 2^{-k} |x_n^*(x_k)| \leq \sum_{k=n+1}^\infty 2^{-k} = 2^{-n}$$

Zatem $y_n^* := 2^n x_n^* \in \overline{B(0, 1)}$. Ponadto $y_n^*(x_0) = 2^n d(x_0, X_n)$. Wystarczy zatem znaleźć element x_0 taki, że ciąg liczb $2^n d(x_0, X_n)$ jest nieograniczony, bo wtedy $y_n^* \notin V_R$ dla pewnej dostatecznie dużej liczby n .

Można znaleźć nieskończony ciąg n_k taki, że $X_{n_k} \subsetneq X_{n_{k+1}}$. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $n_k \geq 2k$. Z twierdzenia Riesz'a istnieje element $y_k \in X_{n_{k+1}}$ taki, że $\|y_k\| = 1$ oraz $d(y_k, X_{n_k}) = 1$. Niech $Y_k := X_{n_k}$. Zatem $d(y_k, Y_k) = 1$. Z warunku $n_{k+1} \geq n_k + 1$ wynika, że $y_k \in Y_{k+1} \setminus Y_k$. Rozważmy element

$$x_0 = \sum_{k=1}^\infty a_k y_k, \quad a_k > 0, \quad \sum_{k=1}^\infty a_k < \infty$$

Z nierówności trójkąta otrzymujemy

$$\begin{aligned} d(x_0, Y_n) &= d\left(\sum_{k=n}^\infty a_k y_k, Y_n\right) \geq d(a_n y_n, Y_n) - d\left(\sum_{k=n+1}^\infty a_k y_k, Y_n\right) \\ &\geq a_n d(y_n, Y_n) - \sum_{k=n+1}^\infty a_k \|y_k\| = a_n - \sum_{k=n+1}^\infty a_k \end{aligned}$$

Niech $a_k = 2/3^k$. Wtedy

$$d(x_0, Y_n) \geq 3^{-n}$$

Zatem

$$2^{n_k} d(x_0, X_{n_k}) = 2^{n_k} d(x_0, Y_{n_k}) \geq 2^{n_k} 3^{-n_k} \geq 4^k 3^{-k} \xrightarrow[k]{} \infty$$