

Uwaga. Analogiczne twierdzenie jest prawdziwe dla granicy lewostronnej i dwustronnej.

Dowód. Niech $x > a$. Wtedy

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

dla pewnego ξ , $a < \xi < x$. Gdy $x \rightarrow a^+$, to $\xi \rightarrow a^+$. Zatem

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \rightarrow a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

□

Uwaga. Teza jest prawdziwa również dla granicy niewłaściwej.

Przykłady.

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \sin x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cos x} = \frac{1}{2}.$$

Lepszym wyjściem jest użycie wzorów trygonometrycznych

$$\frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} = \frac{1 - \cos x}{1 - \cos^2 x} = \frac{1}{1 + \cos x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}.$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sin \pi x}{\sqrt{1 - x^2}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\pi \cos \pi x}{\frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}} = - \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\pi \sqrt{1 - x^2} \cos \pi x}{x} = 0.$$

Można też obliczyć granicę bezpośrednio

$$\frac{\sin \pi x}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{\sin \pi(1 - x)}{\pi(1 - x)} \cdot \frac{\sqrt{1 - x}}{\sqrt{1 + x}} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} 1 \cdot \frac{0}{\sqrt{2}} = 0.$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sqrt{\sin x}}{\log \frac{x}{\pi}} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x} \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{x \cos x}{2\sqrt{\sin x}} = -\infty.$$

Wniosek 5.19. Załóżmy, że funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są różniczkowalne w przedziale (a, ∞) , $g'(x) \neq 0$ dla $x > a$, oraz $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$. Wtedy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

o ile druga granica istnieje.

Dowód. Możemy przyjąć, że $a \geq 1$. Określmy funkcje

$$F(y) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{y}\right) & 0 < y < \frac{1}{a}, \\ 0 & y = 0, \end{cases} \quad G(y) = \begin{cases} g\left(\frac{1}{y}\right) & 0 < y < \frac{1}{a}, \\ 0 & y = 0. \end{cases}$$

Wtedy F i G są różniczkowalne w przedziale $(0, \frac{1}{a})$ i ciągłe w punkcie 0. Rzeczywiście

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} F(y) = \lim_{y \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{y}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

Dalej

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{g\left(\frac{1}{y}\right)} \stackrel{(H)}{=} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{y^2} f'\left(\frac{1}{y}\right)}{-\frac{1}{y^2} g'\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)}{g'\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

□

Przykład.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1.$$

Twierdzenie 5.20 (Reguła de l'Hospitala dla $\frac{\infty}{\infty}$). Funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są różniczkowalne w (a, b) oraz $g'(x) \neq 0$ dla $a < x < b$. Załóżmy, że

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \infty.$$

Wtedy

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

o ile granica po prawej stronie istnieje.

Uwaga. Analogiczne twierdzenie jest prawdziwe dla granic lewostronnych, obustronnych i granic w $\pm\infty$.

Uwaga. Przekształcenie

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)^{-1}}{f(x)^{-1}}$$

i użycie Twierdzenia 5.18 nie będzie skuteczne, bo

$$\frac{(g(x)^{-1})'}{(f(x)^{-1})'} = \frac{g'(x) (f(x))^2}{f'(x) (g(x))^2}.$$

Dowód. Idea dowodu polega na tym, że dla x blisko a wyrażenia $\frac{f(x)}{g(x)}$ oraz $\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$ zachowują się podobnie. Niech $a < x < x_0$. Wtedy

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x) - f(x_0) + f(x_0)}{g(x) - g(x_0) + g(x_0)} \\ &= \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} + \frac{f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}}{1 + \frac{g(x_0)}{g(x) - g(x_0)}} = \frac{\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} + \frac{f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}}{1 + \frac{g(x_0)}{g(x) - g(x_0)}} \end{aligned}$$

dla pewnego punktu ξ położonego pomiędzy x i x_0 . Oznaczmy $L = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Wtedy

$$\frac{f(x)}{g(x)} - L = \frac{\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - L + \frac{f(x_0) - Lg(x_0)}{g(x) - g(x_0)}}{1 + \frac{g(x_0)}{g(x) - g(x_0)}}.$$

Ustalmy liczbę $0 < \eta < 1/2$. Wybierzmy x_0 tak, aby

$$\left| \frac{f'(t)}{g'(t)} - L \right| < \eta, \quad \text{dla } a < t < x_0.$$

Wtedy

$$\left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - L \right| < \eta.$$

Ponieważ $g(x) \rightarrow \infty$ dla $x \rightarrow a^+$, to możemy teraz znaleźć $a < x_1 \leq x_0$ tak, aby

$$\frac{|f(x_0) - Lg(x_0)| + |g(x_0)|}{|g(x) - g(x_0)|} < \eta, \quad \text{dla } a < x < x_1.$$

Niech $a < x < x_1$. Otrzymamy

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| \leq \frac{\left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - L \right| + \left| \frac{f(x_0) - Lg(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \right|}{1 - \left| \frac{g(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \right|} < \frac{2\eta}{1 - \eta} < 4\eta.$$

□

Przykłady.

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = 0. \text{ Można też uzasadnić inaczej: dla } x > 0 \text{ mamy}$$

$$0 < \frac{x^k}{e^x} \leq \frac{x^k}{\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}} = \frac{(k+1)!}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0.$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \log x} = \lim_{y=x \log x, y \rightarrow 0^-} e^y = 1.$$

5.9 Pochodna ciągu i szeregu funkcyjnego

Twierdzenie 5.21. *Funkcje $f_n(x)$ są ciągłe i różniczkowalne w sposób ciągły w przedziale $[a, b]$. Załóżmy, że ciągi $f_n(x)$ i $f'_n(x)$ są jednostajnie zbieżne do $f(x)$ i $g(x)$, odpowiednio. Wtedy $f'(x) = g(x)$ (na końcach przedziału $f'_+(a) = g(a)$ i $f'_-(b) = g(b)$). Tzn.*

$$\left(\lim_n f_n(x) \right)' = \lim_n f'_n(x).$$

Czyli pochodna granicy ciągu funkcji jest granicą pochodnych tych funkcji.

Dowód. Niech $a \leq x_0 \leq b$. Chcemy pokazać, że $f'(x_0) = g(x_0)$. Z założenia dla $\varepsilon > 0$ istnieje próg N taki, że dla $n > N$ mamy $|f'_n(t) - g(t)| < \varepsilon/3$, dla $a \leq t \leq b$. Wiemy, że funkcja $g(x)$ jest ciągła, jako granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji $f'_n(x)$. Zatem istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że dla $|\xi - x_0| < \delta$ mamy $|g(\xi) - g(x_0)| < \varepsilon/3$. Niech $0 < |x - x_0| < \delta$. Wtedy dla $n > N$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left| \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} - g(x_0) \right| &= |f'_n(\xi) - g(x_0)| \\ &\leq |f'_n(\xi) - g(\xi)| + |g(\xi) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2}{3}\varepsilon, \end{aligned}$$

dla pewnego punktu ξ leżącego pomiędzy x i x_0 . Zatem dla $0 < |x - x_0| < \delta$ mamy

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - g(x_0) \right| = \lim_n \left| \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} - g(x_0) \right| \leq \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon.$$

To oznacza, że

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g(x_0),$$

czyli $f'(x_0) = g(x_0)$. □

Uwaga. W dowodzie wykorzystana była jedynie zbieżność punktowa ciągu f_n .

Uwaga. Wystarczy założyć, że ciąg $f_n(x)$ jest zbieżny w jednym punkcie c przedziału $[a, b]$. Rzeczywiście, z tego warunku wynika jednostajna zbieżność ciągu $f_n(x)$. Sprawdźmy jednostajny warunek Cauchy'ego dla ciągu $f_n(x)$.

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &\leq \underbrace{|f_n(x) - f_m(x)|}_{h(x)} - \underbrace{|f_n(c) - f_m(c)|}_{h(c)} + |f_n(c) - f_m(c)| \\ &= \underbrace{|f'_n(\xi) - f'_m(\xi)|}_{h'(\xi)} |x - c| + |f_n(c) - f_m(c)| \\ &\leq (b - a)|f'_n(\xi) - f'_m(\xi)| + |f_n(c) - f_m(c)|. \end{aligned}$$

Wniosek 5.22. Załóżmy, że funkcje f_n są ciągłe i różniczkowalne w sposób ciągły w przedziale $[a, b]$. Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny przynajmniej w

jednym punkcie, natomiast szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie, to suma szeregu $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest funkcją różniczkowalną oraz

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x), \quad (5.7)$$

tzn. pochodna sumy szeregu funkcyjnego jest szeregiem pochodnych.

Dowód. Niech $s_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$. Ciąg funkcyjny $s_n(x)$ spełnia założenia poprzedniego twierdzenia. Zatem $\left(\lim_n s_n(x) \right)' = \lim_n s'_n(x)$, co jest równoznaczne z (5.7). $\square$

Przykład. $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx^2}}{n^3}$, $0 \leq x \leq 1$. Przyjmujemy $f_n(x) = \frac{e^{-nx^2}}{n^3}$. Wtedy $f'_n(x) = -\frac{2xe^{-nx^2}}{n^2}$, co daje $|f'_n(x)| \leq \frac{2}{n^2}$. Zatem szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ też jest jednostajnie zbieżny. Czyli $s'(x) = -2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx^2}}{n^2}$.

Twierdzenie 5.23. Załóżmy, że liczba $R > 0$ jest promieniem zbieżności szeregu potęgowego $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Wtedy funkcja $f(x)$ jest różniczkowalna w przedziale $(-R, R)$ oraz $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

Uwaga. Szereg potęgowy dla funkcji $f'(x)$ ma większe wartości bezwzględne współczynników, więc promień zbieżności nie może być mniejszy od R . Jednak promienie zbieżności obu szeregów są takie same. Istotnie, niech R' oznacza promień zbieżności dla $x^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$ $x \neq 0$.

(a) Jeśli istnieje granica $\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{R}$, to

$$\frac{1}{R'} = \lim_n \frac{(n+1)|a_{n+1}|}{n|a_n|} = \lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{R}.$$

(b) Jeśli istnieje granica $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$, to

$$\frac{1}{R'} = \lim_n \sqrt[n]{n|a_n|} = \lim_n \sqrt[n]{n} \lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}.$$

Ogólnie mamy

$$\frac{1}{R'} = \limsup_n \sqrt[n]{n|a_n|} = \lim_n \sqrt[n]{n} \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}.$$

Dowód. Szereg pochodnych $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ jest zbieżny w przedziale $(-R, R)$.

Wiemy, że zbieżność jest jednostajna w każdym przedziale $[-R + \delta, R - \delta]$, dla $\delta > 0$. Z Wniosku 5.22 otrzymujemy tezę, czyli

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

□

Wniosek 5.24. Funkcja $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dla $-R < x < R$, gdzie R jest promieniem zbieżności, jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna oraz

$$f^{(k)}(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)^{(k)} = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \dots (n-k+1) a_n x^{n-k}.$$

Dowód. Stosujemy wielokrotnie Wniosek 5.22, korzystając z faktu, że promień zbieżności nie zmienia się przy różniczkowaniu. □

Przykłady.

(a) Rozważmy funkcję $f(x) = \log(1+x)$, $x > -1$. Mamy

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad \text{dla } |x| < 1.$$

Rozważmy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$. Promień zbieżności tego szeregu wynosi 1. Z Twierdzenia 5.23 mamy

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} = (\log(1+x))'.$$

Zatem

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n + C, \quad |x| < 1,$$

dla pewnej stałej C . Podstawiając $x = 0$ uzyskamy $C = 0$. Zatem

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n, \quad \text{dla } -1 < x < 1. \quad (5.8)$$

Z kryterium Leibniza szereg po prawej stronie jest zbieżny również dla $x = 1$. Zatem z Twierdzenia 4.17 otrzymujemy

$$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

(b) $f(x) = \arctg x$. Wtedy

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad |x| < 1.$$

Rozważmy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$. Szereg ten jest zbieżny dla $|x| < 1$.

Wiemy, że

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = (\arctg x)',$$

czyli

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} + C, \quad |x| < 1.$$

Podstawiamy $x = 0$ i otrzymujemy, że $C = 0$. Zatem

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad |x| < 1. \quad (5.9)$$

Podobnie jak w poprzednim przykładzie możemy podstawić $x = 1$ i uzyskać

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

5.10 Wzory Taylora i MacLaurina

Twierdzenie 5.25 (Wzór Taylora). *Niech $f(x)$ będzie funkcją n -krotnie różniczkowalną w przedziale wokół punktu a . Wtedy dla liczb b z tego przedziału mamy*

$$f(b) = f(a) + \frac{(b-a)}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n,$$

gdzie R_n ma jedną z dwu postaci:

$$(1) \quad R_n = \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta(b-a)), \quad \text{dla pewnej liczby } 0 < \theta < 1 \quad (\text{reszta w postaci Lagrange'a}),$$

$$(2) \quad R_n = \frac{(b-a)^n}{(n-1)!} (1-\theta')^{n-1} f^{(n)}(a + \theta'(b-a)), \quad \text{dla pewnej liczby } 0 < \theta' < 1 \\ (\text{reszta w postaci Cauchy'ego}).$$

Uwagi

1. Oznaczmy $b - a = h$. Wtedy

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n,$$

$$R_n = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta h) = \frac{h^n}{(n-1)!} (1-\theta')^{n-1} f^{(n)}(a + \theta' h).$$