0. Zadania do wykładu
Analiza II, R. Szwarc

1. Pokazać, że wielomian

$$p(x) = x^n + \sum_{i=0}^{k} a_j x^j, \quad k \leqslant n-2$$

ma co najwyżej $k+2$ różnych pierwiastków.

2. Dla wielomianu $p(x)$ liczbę r nazywamy pierwiastkiem stopnia $k(r) \geqslant 1$, jeśli $p^{(j)}(r) = 0$ dla $0 \leqslant j \leqslant k(r) - 1$ oraz $p^{(k(r))}(a) \neq 0$. Niech $r_1 < r_2 < \ldots < r_l$ oznaczają pierwiastki wielomianu

$$p(x) = x^n + \sum_{i=0}^{k} a_j x^j, \quad k \leqslant n-2, \; a_k \neq 0.$$

Pokazać, że

$$k(r_1) + k(r_2) + \ldots + k(r_l) \leqslant k+2.$$

3. Pokazać, że jeśli $n-k$ jest liczbą nieparzystą, to w poprzednich zadaniach można zamienić $k+2$ na $k+1$.

4. Szereg potęgowy

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

jest zbieżny dla wszystkich wartości x. Pokazać, że funkcja $f(x)$ ma skończenie wiele miejsc zerowych w przedziale $[a, b]$. Podać przykład szeregu, dla którego $f(x)$ ma nieskończenie wiele miejsc zerowych. Podać przykład szeregu bez miejsc zerowych.

5. Szereg potęgowy z zadania 4 zeruje się w nieskończenie wielu punktach $0 < r_1 < r_2 < \ldots$. Czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n^2}$$

musi być zbieżny ? Czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-r_n}$$

musi być zbieżny ?

$*$**6.** Pokazać, że szereg MacLaurina funkcji e^{e^x} jest zbieżny w każdym punkcie x.

7. Funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są nieskończenie wiele razy różniczkowalne oraz

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - g(x)}{x^n} = 0,$$

dla pewnej liczby naturalnej $n \geqslant 0$. Pokazać, że

$$f^{(k)}(0) = g^{(k)}(0), \quad 0 \leqslant k \leqslant n.$$

$*$**8.** Pokazać, że szereg MacLaurina funkcji $e^{\sin x}$ jest zbieżny w każdym punkcie x.