

Analiza funkcjonalna II

Ryszard Szwarc

Wykład prowadzony w semestrze letnim 2008

Opracowany na podstawie notatek Wiktora Malinowskiego

Wrocław 2010

Spis treści

1	Operatory ograniczone na przestrzeni Banacha	2
2	Operatory dodatnie	17
3	Zbieżność operatorów	26
4	Operatory zwarte	30
5	Nierówność Löwnera	48
6	Operatory unitarne	52
7	Operatory śladowe	62
8	Zadania	71

1 Operatory ograniczone na przestrzeni Banacha

Niech $T : X \longrightarrow X$ będzie ciągłym operatorem liniowym na przestrzeni Banacha X . Przypominamy, że normę operatora T określamy wzorem

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\}.$$

Symbolem $B(X) := B(X, X)$ oznaczamy przestrzeń Banacha wszystkich ciągłych operatorów liniowych z X w X .

Przykład 1.1. Rozważmy odwzorowanie liniowe $T : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$. Chcemy zbadać dla jakich zespolonych liczb λ operator (tzn. macierz) $\lambda I - T$ jest odwracalny. Jak wiadomo z kursu algebry liniowej warunkiem równoważnym jest $\det(\lambda I - T) \neq 0$. Liczby λ , dla których ostatni wyznacznik zeruje się nazywamy wartościami własnymi. Wiadomo, że jeśli $\det(\lambda I - T) = 0$, to istnieje niezerowy wektor $v \in \mathbb{C}^n$ taki, że $Tv = \lambda v$. Tzn. macierz $\lambda I - T$ nie jest różnowartościowa. Innym równoważnym warunkiem jest, że $\text{Im}(\lambda I - T) \subsetneq \mathbb{C}^n$.

Definicja 1.2. Zbiorem **rezolwenty** $\rho(T)$ nazywamy zbiór tych liczb zespolonych λ , dla których operator $\lambda I - T$ jest odwracalny. Dopelnienie $\mathbb{C} \setminus \rho(T)$ nazywamy **spektrum** operatora T i oznaczamy symbolem $\sigma(T)$.

Definicja 1.3. Spektrum punktowym $\sigma_p(T)$ nazywamy zbiór wartości własnych operatora T , tzn. zbiór liczb zespolonych λ takich, że $\lambda I - T$ nie jest operatorem różnowartościowym. Wtedy istnieje niezerowy element x w X taki, że $Tx = \lambda x$.

Definicja 1.4. Spektrum resztowym $\sigma_r(T)$ nazywamy zbiór liczb zespolonych λ , dla których obraz $\text{Im}(\lambda I - T)$ nie jest gęstą podprzestrzenią w X .

Przykład 1.5. Rozważmy przestrzeń

$$X = \ell^2 = \{(x_n)_{n=0}^\infty : \sum_{n=0}^\infty |x_n|^2 < \infty\}.$$

Dla $x = (x_n)_{n=0}^\infty$ określmy operator S wzorem

$$(Sx)_n = \begin{cases} x_{n-1} & n \geq 1 \\ 0 & n = 0. \end{cases}$$

Tzn.

$$S(x_0, x_1, x_2, \dots) = (0, x_0, x_1, x_2, \dots).$$

Mamy $\|Sx\|_2 = \|x\|_2$, zatem $\|S\| = 1$. To oznacza, że operator S jest izometrią.

Sprawdzamy różnowartościowość operatora $\lambda I - S$. W tym celu rozwiązujemy równanie $(\lambda I - S)x = 0$, czyli $Sx = \lambda x$. Otrzymujemy nieskończony ciąg równań

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda x_0 \\ x_{n-1} &= \lambda x_n, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Jeśli $\lambda = 0$, to $x_n = 0$ dla wszystkich n . Załóżmy, że $\lambda \neq 0$. Wtedy $x_0 = 0$ oraz

$$x_n = \lambda^{-1} x_{n-1} = \lambda^{-n} x_0 = 0.$$

To oznacza, że operator S nie posiada wartości własnych.

Zbadamy teraz $\sigma_r(S)$. Załóżmy, że obraz $\text{Im}(\lambda I - S)$ nie jest gęsty w ℓ^2 . Równoważnie istnieje niezerowy element $y \in \ell^2$ taki, że $y \perp \text{Im}(\lambda I - S)$.

Niech $V = \text{lin}\{e_0, e_1, e_2, \dots\}$, gdzie $e_k = (0, \dots, 0, \underset{k}{1}, 0, \dots)$. Przestrzeń V jest gęsta w ℓ^2 , tzn. $\overline{V} = \ell^2$. Zatem

$$(\lambda I - S)(V) \subset \text{Im}(\lambda I - S) = (\lambda I - S)(\ell^2) = (\lambda I - S)(\overline{V}) \subset \overline{(\lambda I - S)(V)}.$$

Skorzystaliśmy z własności znanej z kursu topologii, że obraz przez odwzorowanie ciągle domknięcia zbioru jest zawarty w domknięciu obrazu tego zbioru. To oznacza, że

$$\overline{\text{Im}(\lambda I - S)} = \overline{(\lambda I - S)(V)}.$$

Wnioskujemy, że warunek $y \perp \text{Im}(\lambda I - S)$ jest równoważny z warunkiem $y \perp (\lambda I - S)(V)$. Ostatni warunek z kolei oznacza, że $y \perp (\lambda I - S)(e_k)$ dla $k = 0, 1, 2, \dots$. Rozwiązujemy układ równań

$$\langle y, (\lambda I - S)e_k \rangle = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Zatem

$$\langle y, \lambda e_k - e_{k+1} \rangle = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Dalej

$$y_{k+1} = \bar{\lambda} y_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Otrzymujemy ostatecznie

$$y_k = \bar{\lambda}^k y_0, \quad k \geq 1.$$

Jeśli $y_0 = 0$, to $y = 0$. Jeśli $y_0 \neq 0$, to $y \in \ell^2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|\lambda| < 1$. Zatem

$$\sigma_r(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}.$$

Pozostaje zbadać liczby λ spełniające $|\lambda| \geq 1$. Sprawdzimy, kiedy $\lambda I - S$ jest „na”. W tym celu dla $y \in \ell^2$ rozwiązujemy równanie $(\lambda I - S)x = y$. Wtedy

$$\begin{aligned} \lambda x_0 &= y_0, \\ \lambda x_n - x_{n-1} &= y_n, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy

$$x_n = \lambda^{-1} y_n + \lambda^{-1} x_{n-1}.$$

Zatem

$$x_n = \lambda^{-1} y_n + \lambda^{-2} y_{n-1} + \dots + \lambda^{-n-1} y_0. \quad (1.1)$$

Niech $y = e_0$, gdzie

$$e_0 = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 0, & n \geq 1. \end{cases}$$

Wtedy

$$x_n = \lambda^{-n-1}, \quad n \geq 0.$$

Dla $|\lambda| = 1$ ciąg (x_n) nie należy do ℓ^2 . Zatem

$$\sigma(S) \supseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}.$$

Niech $|\lambda| > 1$. Sprawdzamy normę rozwiązania x z (1.1).

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^n \lambda^{-k-1} y_{n-k} \right|^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k,l=0}^n |\lambda|^{-k-1} |y_{n-k}| |\lambda|^{-l-1} |y_{n-l}| \\ &= \sum_{k,l=0}^{\infty} |\lambda|^{-k-1} |\lambda|^{-l-1} \sum_{n=\max(k,l)}^{\infty} |y_{n-k}| |y_{n-l}| \\ &\leq \sum_{k,l=0}^{\infty} |\lambda|^{-k-1} |\lambda|^{-l-1} \left(\sum_{n=\max(k,l)}^{\infty} |y_{n-k}|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=\max(k,l)}^{\infty} |y_{n-l}|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \sum_{k,l=0}^{\infty} |\lambda|^{-k-1} |\lambda|^{-l-1} \|y\|_2^2 = \left(\frac{1}{|\lambda| - 1} \right)^2 \|y\|_2^2. \end{aligned}$$

Zatem

$$\|(\lambda I - S)^{-1} y\|_2 = \|x\|_2 \leq \frac{1}{|\lambda| - 1} \|y\|_2,$$

czyli

$$\|(\lambda I - S)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda| - 1}.$$

Podsumowując

$$\sigma(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}.$$

Uwaga 1.6.

1. W przykładzie można zauważyć, że jeśli $\lambda \in \sigma(S)$, to $|\lambda| \leq \|S\|$. Ta własność zachodzi dla każdego ograniczonego operatora (por. Wniosek 1.8).
2. Zbiór $\sigma(S)$ jest domknięty i również ta własność jest spełniona dla dowolnego ograniczonego operatora liniowego (por. Twierdzenie 1.10).

Twierdzenie 1.7. *Założmy, że ograniczony operator liniowy $T : X \rightarrow X$, gdzie X jest przestrzenią Banacha, spełnia $\|T\| < 1$. Wtedy operator $I - T$ jest odwracalny oraz*

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n.$$

Dowód. Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ jest bezwzględnie zbieżny, bo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|T^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n = \frac{1}{1 - \|T\|}.$$

Dzięki zupełności przestrzeni $B(X)$ symbol $A = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$ określa ograniczony operator liniowy. Zauważmy, że

$$AT = TA = \sum_{n=0}^{\infty} T^{n+1} = A - I.$$

Zatem

$$A(I - T) = (I - T)A = I.$$

Stąd $A = (I - T)^{-1}$. □

Wniosek 1.8. *Niech X będzie przestrzenią Banacha oraz $T \in B(X)$. Jeśli $|\lambda| > \|T\|$, to operator $\lambda I - T$ jest odwracalny, tzn. $\lambda \in \varrho(T)$.*

Dowód. Mamy

$$\lambda I - T = \lambda(I - \lambda^{-1}T), \quad \|\lambda^{-1}T\| < 1.$$

Z poprzedniego twierdzenia operator $I - \lambda^{-1}T$ jest więc odwracalny. Zatem odwracalny jest też $\lambda I - T$. □

Uwaga 1.9. Z twierdzenia wynika, że dla $\|T\| < 1$ mamy

$$\|(I - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|T\|}.$$

Zatem przy założeniu $\|T\| < |\lambda|$ otrzymujemy

$$\|(\lambda I - T)^{-1}\| = |\lambda|^{-1} \|(I - \lambda^{-1}T)^{-1}\| \leq |\lambda|^{-1} \frac{1}{1 - |\lambda|^{-1}\|T\|} = \frac{1}{|\lambda| - \|T\|}.$$

Twierdzenie 1.10. Dla $T \in B(X)$, gdzie X jest przestrzenią Banacha, zbiór rezolwenty $\varrho(T)$ jest otwartym podzbiorem w $\mathbb{C}$. Ponadto funkcja

$$R_z(T) = (zI - T)^{-1}, \quad z \in \varrho(T)$$

jest analitycznym odwzorowaniem zbioru $\varrho(T)$ w $B(X)$, tzn. w otoczeniu każdego punktu z_0 funkcja $R_z(T)$ przedstawia się za pomocą bezwzględnie zbieżnego szeregu potęgowej postaci

$$R_z(T) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n A_n, \quad A_n \in B(X).$$

Zachodzi też wzór

$$R_z(T) - R_w(T) = -(z - w)R_z(T)R_w(T). \quad (1.2)$$

Uwaga 1.11. Wzór (1.2) można kojarzyć z tożsamością

$$\frac{1}{z - t} - \frac{1}{w - t} = -\frac{z - w}{(z - t)(w - t)}.$$

Dowód. Niech $z_0 \in \varrho(T)$. Pokażemy, że liczby z leżące blisko z_0 należą do $\varrho(T)$. Mamy

$$zI - T = (z_0I - T) - (z_0 - z)I = (z_0I - T)[I - (z_0 - z)(z_0I - T)^{-1}]. \quad (1.3)$$

Założmy, że

$$|z - z_0| < \frac{1}{\|(z_0I - T)^{-1}\|}.$$

Wtedy

$$\|(z - z_0)(z_0I - T)^{-1}\| < 1.$$

Z Twierdzenia 1.7 operator $I - (z_0 - z)(z_0I - T)^{-1}$ jest odwracalny. Zatem ze wzoru (1.3) operator $zI - T$ jest odwracalny jako złożenie dwu operatorów odwracalnych. Czyli $z \in \varrho(T)$, więc zbiór $\varrho(T)$ jest otwarty.

Ze wzoru (1.3) i Twierdzenia 1.7 otrzymujemy

$$\begin{aligned} R_z(T) &= (zI - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (z_0 - z)^n (z_0I - T)^{-n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n A_n, \quad A_n = (-1)^n (z_0I - T)^{-n-1}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Obliczamy

$$\begin{aligned} R_z(T) - R_w(T) &= (zI - T)^{-1} - (wI - T)^{-1} \\ &= (zI - T)^{-1}[(wI - T) - (zI - T)](wI - T)^{-1} \\ &= -(z - w)(zI - T)^{-1}(wI - T)^{-1} = -(z - w)R_z(T)R_w(T) \end{aligned}$$

□

Dla $z, z_0 \in \varrho(T)$ na podstawie (1.4) mamy

$$R_z(T) - R_{z_0}(T) = \sum_{n=0}^{\infty} (z_0 - z)^n (z_0 I - T)^{-n-1} - (z_0 I - T)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (z_0 - z)^n (z_0 I - T)^{-n-1}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} \|R_z(T) - R_{z_0}(T)\| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |z - z_0|^n \|(z_0 I - T)^{-1}\|^{n+1} \\ &= \frac{|z - z_0| \|R_{z_0}(T)\|^2}{1 - |z - z_0| \|R_{z_0}(T)\|} \end{aligned}$$

przy założeniu, że $|z - z_0| < \|R_{z_0}(T)\|^{-1}$. Z obliczeń wynika, że

$$\lim_{z \rightarrow z_0} R_z(T) = R_{z_0}(T).$$

Zatem, korzystając z (1.2), otrzymujemy

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{R_z(T) - R_{z_0}(T)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} (-1) R_{z_0}(T) R_z(T) = -R_{z_0}(T)^2.$$

To oznacza, że funkcja $z \mapsto R_z(T)$ posiada pochodną zespoloną jako funkcja z podzbioru $\varrho(T)$ w $B(X)$.

Twierdzenie 1.12. *Niech T będzie ograniczonym operatorem liniowym na przestrzeni Banacha X . Wtedy spektrum $\sigma(T)$ jest niepustym i domkniętym podzbiorem w $\mathbb{C}$.*

Dowód. Domkniętość zbioru wynika z otwartości zbioru rezolwenty. Załóżmy, że spektrum $\sigma(T)$ jest zbiorem pustym. Wtedy funkcja $R_z(T)$ jest określona na całej płaszczyźnie zespolonej. Dla ustalonego elementu $x \in X$ oraz funkcjonału $x^* \in X^*$ rozważamy funkcję

$$f(z) = x^*(R_z(T)x).$$

Funkcja $f(z)$ jest holomorficzna w całej płaszczyźnie zespolonej. Z zadania 18 mamy, że $\|R_z(T)\| \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 0$. Wtedy $f(z) \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 0$. Funkcja $f(z)$ jest zatem ograniczona w $\mathbb{C}$. Na podstawie twierdzenia Liouville'a funkcja f jest stała, czyli $f(z) \equiv 0$. Stąd $x^*(R_z(T)x) = 0$ dla dowolnego funkcyjonału x^* , czyli $R_z(T)x = 0$ dla dowolnego elementu $x \in X$. Zatem $R_z(T) = 0$, co stoi w sprzeczności z odwracalnością operatora $R_z(T)$. $\square$

Uwaga 1.13. Dla $X = \mathbb{C}^n$ operatory $T : X \rightarrow X$ utożsamiamy z macierzami wymiaru $n \times n$. Wtedy z zasadniczego twierdzenia algebry mamy $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(\lambda I - T) \neq 0\} \neq \emptyset$.

Definicja 1.14. *Promieniem spektralnym operatora $T \in B(X)$ nazywamy liczbę*

$$r(T) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Twierdzenie 1.15. *Dla $T \in B(X)$, gdzie X jest przestrzenią Banacha, istnieje granica $\lim_n \|T^n\|^{1/n}$ oraz granica ta jest równa $r(T)$. Ponadto, jeśli X jest przestrzenią Hilberta oraz $T^* = T$, to $r(T) = \|T\|$.*

Dowód. Jeśli $T^{n_0} = 0$ dla pewnej liczby n_0 , to $T^n = 0$ dla $n \geq n_0$. Wtedy $\lim_n \|T^n\|^{1/n} = 0$. Załóżmy zatem, że $T^n \neq 0$ dla wszystkich potęg n . Oznaczmy $a_n = \log \|T^n\|$. Zauważmy, że

$$a_{n+m} \leq a_n + a_m.$$

Rzeczywiście

$$\begin{aligned} a_{n+m} &= \log \|T^{n+m}\| = \log \|T^n T^m\| \leq \log \|T^n\| + \log \|T^m\| \\ &= \log \|T^n\| + \log \|T^m\| = a_n + a_m. \end{aligned}$$

Istnienie granicy ciągu a_n wynika z następnego lematu.

Lemat 1.16. *Jeśli ciąg liczb rzeczywistych a_n spełnia warunek $a_{n+m} \leq a_n + a_m$, to istnieje granica (być może $-\infty$) ciągu a_n/n oraz*

$$\lim_n \frac{a_n}{n} = \inf_n \frac{a_n}{n}.$$

Dowód. Mamy

$$a_{np+r} \leq a_{np} + a_r \leq na_p + a_r$$

dla dowolnych liczb naturalnych n , p i r . Ustalmy liczbę p . Każdą liczbę m można zapisać w postaci $m = np + r$, gdzie $0 \leq r \leq p - 1$. Zatem

$$\frac{a_m}{m} = \frac{a_{np+r}}{np+r} \leq \frac{n}{np+r} a_p + \frac{1}{np+r} a_r.$$

Gdy $m \rightarrow \infty$, to $n \rightarrow \infty$, więc

$$\limsup \frac{a_m}{m} \leq \frac{a_p}{p}.$$

Ponieważ p jest dowolną liczbą naturalną, to

$$\limsup \frac{a_m}{m} \leq \inf_p \frac{a_p}{p} \leq \liminf \frac{a_m}{m}.$$

Stąd granice górna i dolna muszą być sobie równe. $\square$

Z lematu wynika, że

$$\lim_n \|T^n\|^{1/n} = \inf_n \|T^n\|^{1/n}.$$

Założmy, że $|z| > \inf_n \|T^n\|^{1/n}$. Pokażemy, że wtedy operator $zI - T$ jest odwracalny. Istotnie, dla pewnej liczby n mamy $|z| > \|T^n\|^{1/n}$. Stąd $|z|^n > \|T^n\|$. Wtedy

$$z^n I - T^n = z^n \left(I - \frac{1}{z^n} T^n \right)$$

jest operatorem odwracalnym, bo $\|z^{-n} T^n\| < 1$. Z drugiej strony mamy

$$\begin{aligned} z^n I - T^n &= (zI - T)S = S(zI - T), \\ \text{dla } S &= z^{n-1}I + z^{n-2}T + \dots + zT^{n-2} + T^{n-1}. \end{aligned}$$

Odwracalność operatora $zI - T$ wynika z prostego algebraicznego faktu, którego dowód pozostawiamy czytelnikowi.

Fakt 1.17. *Założmy, że w półgrupie A z jednością, element a jest odwracalny oraz $a = bc = cb$ dla pewnych elementów b i c . Wtedy elementy b i c też są odwracalne.*

Zatem $z \notin \sigma(T)$. W konsekwencji otrzymujemy

$$\sigma(T) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \inf_n \|T^n\|^{1/n}\}.$$

To oznacza, że $r(T) \leq \inf_n \|T^n\|^{1/n}$.

Niech teraz $r > r(T)$. Tzn. operator $R_z(T)$ istnieje dla $|z| \geq r$. Ustalmy element $x \in X$ i funkcjonal $x^* \in X^*$. Funkcja

$$z \mapsto x^*(R_z(T)x)$$

jest holomorficzna dla $|z| > r(T)$. Zatem ta funkcja jest holomorficzna w pierścieniu $r \leq |z| \leq s$. Wtedy

$$I_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} x^*(R_z(T)x) z^n dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=s} x^*(R_z(T)x) z^n dz.$$

Rozważmy $s > \|T\|$. Wtedy dla $|z| = s$ możemy rozwinąć $R_z(T)$ w absolutnie zbieżny szereg

$$R_z(T) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-(k+1)} T^k,$$

Zatem

$$I_n = \sum_{k=0}^{\infty} x^*(T^k x) \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=s} z^{n-(k+1)} dz = x^*(T^n x),$$

bo tylko jeden składnik (dla $k = n$) jest niezerowy. Otrzymujemy zatem

$$x^*(T^n x) = I_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} x^*(R_z(T)x) z^n dz.$$

Dalej

$$|x^*(T^n x)| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi r r^n \max_{|z|=r} \|R_z(T)\| \|x\| \|x^*\| = r^{n+1} \max_{|z|=r} \|R_z(T)\| \|x\| \|x^*\|.$$

Ostatecznie

$$\|T^n\| = \sup_{\substack{\|x^*\| \leq 1 \\ \|x\| \leq 1}} |x^*(T^n x)| \leq r^{n+1} \max_{|z|=r} \|R_z(T)\|.$$

Stąd

$$\lim_n \|T^n\|^{1/n} \leq r.$$

Ponieważ r było dowolną liczbą większą do $r(T)$, to

$$\lim_n \|T^n\|^{1/n} \leq r(T).$$

Niech $T \in B(\mathcal{H})$. Dla $x \in \mathcal{H}$ mamy

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle T^*Tx, x \rangle \leq \|T^*Tx\| \|x\| \leq \|T^*T\| \|x\|^2.$$

Zatem

$$\|T\|^2 \leq \|T^*T\| \leq \|T^*\| \|T\| = \|T\|^2.$$

Stąd $\|T^*T\| = \|T\|^2$. Jeśli $T^* = T$, to $\|T^2\| = \|T\|^2$. Potęgi operatora T są również samosprężone, więc

$$\|T^{2^n}\| = \|T^{2^{n-1}}\|^2 = \|T^{2^{n-2}}\|^4 = \dots = \|T\|^{2^n}.$$

Czyli

$$\|T^{2^n}\|^{1/2^n} = \|T\|.$$

Przechodząc do granicy otrzymamy $r(T) = \|T\|$. □

Wniosek 1.18. *Jeśli $T \in B(\mathcal{H})$ jest operatorem normalnym, tzn. $T^*T = TT^*$, to $r(T) = \|T\|$.*

Dowód. Wykonujemy obliczenia

$$\|T^{2^n}\|^2 = \|(T^{2^n})^*T^{2^n}\| = \|(T^*)^{2^n}T^{2^n}\| = \|(T^*T)^{2^n}\| = \|T^*T\|^{2^n} = \|T\|^{2^{n+1}}$$

Zatem

$$\|T^{2^n}\|^{1/2^n} = \|T\|.$$

Przechodząc do granicy otrzymujemy tezę. □

Wniosek 1.19. *Jeśli $T \in B(\mathcal{H})$ jest operatorem normalnym, to $\|T^n\| = \|T\|^n$.*

Dowód. Mamy

$$\|T^n\| = r(T^n) = \lim_k \|T^{nk}\|^{1/k} = (\lim_k \|T^{nk}\|^{1/nk})^n = r(T)^n = \|T\|^n.$$

□

Przykład 1.20. Rozważmy operator $T : L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$ zadany wzorem

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(y) dy.$$

Obraz $\text{Im } T$ jest zawarty w $C[0, 1]$. Istotnie, z nierówności Schwarza mamy dla $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1$

$$\begin{aligned} |(Tf)(x_2) - (Tf)(x_1)| &= \left| \int_{x_1}^{x_2} f(y) dy \right| = \left| \int_0^1 f(y) \chi_{[x_1, x_2]}(y) dy \right| \\ &\leq \|f\|_2 \|\chi_{[x_1, x_2]}\|_2 = \sqrt{x_2 - x_1} \|f\|_2. \end{aligned}$$

Zatem T nie jest operatorem odwracalnym. Obliczmy T^2 .

$$\begin{aligned} (T^2f)(x) &= \int_0^x (Tf)(y) dy = \int_0^x \left(\int_0^y f(z) dz \right) dy \\ &= \int_0^x f(z) \left(\int_z^x dy \right) dz = \int_0^x (x - z) f(z) dz. \end{aligned}$$

Udowodnimy przez indukcję, że

$$(T^n f)(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-y)^{n-1} f(y) dy. \quad (1.5)$$

Zakładamy, że wzór jest prawdziwy i sprawdzamy następną potęgę.

$$\begin{aligned} (T^{n+1}f)(x) &= \int_0^x (T^n f)(y) dy = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x \left(\int_0^y (y-z)^{n-1} f(z) dz \right) dy \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x f(z) \left(\int_z^x (y-z)^{n-1} dy \right) dz = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-z)^n f(z) dz. \end{aligned}$$

Korzystając z (1.5) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \|T^{n+1}f\|_2^2 &= \int_0^1 |(T^{n+1}f)(x)|^2 dx = \frac{1}{(n!)^2} \int_0^1 \left| \int_0^x (x-y)^n f(y) dy \right|^2 dx \\ &\leq \frac{1}{(n!)^2} \int_0^1 \left(\int_0^x |f(y)|^2 dy \right) \left(\int_0^x (x-y)^{2n} dy \right) dx \leq \|f\|_2^2 \frac{1}{(n!)^2} \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{2n+1} dx \\ &= \frac{1}{(n!)^2 (2n+1)(2n+2)} \|f\|_2^2 \leq \frac{1}{((n+1)!)^2} \|f\|_2^2. \end{aligned}$$

Zatem $\|T^{n+1}\| \leq \frac{1}{(n+1)!}$. Stąd $\lim_n \|T^n\|^{1/n} = 0$. W rezultacie $\sigma(T) = \{0\}$.

Twierdzenie 1.21. *Niech $T : X \rightarrow X$ będzie operatorem ograniczonym na przestrzeni Banacha X . Dla wielomianu $p(z)$, o współczynnikach zespolonych, mamy*

$$\sigma(p(T)) = p(\sigma(T)),$$

tzn. każda liczba w spektrum operatora $p(T)$ ma postać $p(\lambda)$, gdzie $\lambda \in \sigma(T)$.

Dowód. Pominiemy przypadek $\deg p = 0$. Załóżmy, że $p(\lambda) \notin \sigma(p(T))$. Wtedy operator $p(T) - p(\lambda)I$ jest odwracalny. Niech $q(z) = \frac{p(z) - p(\lambda)}{z - \lambda}$. Wtedy $q(z)$ jest wielomianem oraz $p(z) - p(\lambda) = (z - \lambda)q(z)$. Zatem

$$p(T) - p(\lambda)I = q(T)(T - \lambda I) = (T - \lambda I)q(T).$$

To oznacza, że operator $T - \lambda I$ jest odwracalny, czyli $\lambda \notin \sigma(T)$. Zatem, jeśli $\lambda \in \sigma(T)$, to $p(\lambda) \in \sigma(p(T))$. Otrzymaliśmy $p(\sigma(T)) \subset \sigma(p(T))$.

Założmy, że $\alpha \in \sigma(p(T))$. Z zasadniczego twierdzenia algebry wielomian $p(z) - \alpha$ rozkłada się na czynniki liniowe

$$p(z) - \alpha = c(z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \dots (z - \lambda_n), \quad c \neq 0$$

oraz $p(\lambda_i) = \alpha$, dla $j = 1, 2, \dots, n$. Wtedy

$$p(T) - \alpha I = c(T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I) \dots (T - \lambda_n I).$$

Z założenia lewa strona jest operatorem nieodwracalnym. Zatem przynajmniej jeden z czynników po prawej stronie, np. $T - \lambda_j I$, jest operatorem nieodwracalnym. Stąd $\lambda_j \in \sigma(T)$. Ponieważ $p(\lambda_j) = \alpha$, to $\alpha \in p(\sigma(T))$. Otrzymaliśmy zawieranie $\sigma(p(T)) \subset p(\sigma(T))$. $\square$

Uwaga 1.22. Teza jest spełniona dla funkcji całkowitych $f(z)$, tzn. funkcji postaci

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

przy czym promień zbieżności szeregu wynosi $+\infty$, lub jest większy niż $r(T)$. Wtedy operator

$$f(T) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n$$

jest dobrze określony, bo szereg jest bezwzględnie zbieżny. Zawieranie $f(\sigma(T)) \subset \sigma(f(T))$ można udowodnić podobnie jak wyżej, korzystając z faktu, że $q(z) = \frac{f(z) - f(\lambda)}{z - \lambda}$ jest funkcją całkowitą.

Twierdzenie 1.23. Dla $T \in B(\mathcal{H})$ mamy

$$\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)} := \{\bar{z} : z \in \sigma(T)\}.$$

Dowód. Wiemy, że jeśli operator $A \in B(\mathcal{H})$ jest odwracalny, to A^* jest też odwracalny oraz $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$. Niech $z \notin \sigma(T)$. Tzn. $zI - T$ jest operatorem odwracalnym. Zatem $\bar{z}I - T^*$ jest też odwracalny, czyli $\bar{z} \notin \sigma(T^*)$. To daje

$$\sigma(T^*) \subseteq \overline{\sigma(T)}.$$

Stąd wynika, że

$$\sigma(T) = \sigma((T^*)^*) \subseteq \overline{\sigma(T^*)},$$

czyli

$$\overline{\sigma(T)} \subseteq \sigma(T^*).$$

□

Wniosek 1.24. Niech $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ będzie operatorem unitarnym, tzn. $U^*U = UU^* = I$, lub równoważnie $U^* = U^{-1}$. Wtedy $\sigma(U) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Dowód. Mamy

$$\|U\|^2 = \|U^*U\| = \|I\| = 1.$$

Zatem $\|U\| = 1$, skąd wynika $\sigma(U) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$. Niech $|z| < 1$. Chcemy pokazać, że $zI - U$ jest odwracalny. Zauważmy, że

$$zI - U = zU^*U - U = -(I - zU^*)U.$$

U jest odwracalny. Operator $I - zU^*$ jest również odwracalny, bo $\|zU^*\| = |z| < 1$. Stąd $zI - U$ jest odwracalny, co dowodzi tezy wniosku. □

Uwaga 1.25. Jeśli U jest unitarny, to $\|Ux\| = \|x\|$ dla $x \in \mathcal{H}$. Rzeczywiście

$$\|Ux\|^2 = \langle Ux, Ux \rangle = \langle U^*Ux, x \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2.$$

Podobnie $\|U^*x\| = \|x\|$.

Twierdzenie 1.26. Jeśli operator $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ jest normalny, to $\|Tx\| = \|T^*x\|$ dla $x \in \mathcal{H}$.

Dowód. Mamy

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle T^*Tx, x \rangle = \langle TT^*x, x \rangle = \langle T^*x, T^*x \rangle = \|T^*x\|^2.$$

□

Wniosek 1.27. *Jeśli T jest operatorem normalnym, to*

$$\|(\lambda I - T)x\| = \|(\bar{\lambda}I - T^*)x\|$$

dla $x \in \mathcal{H}$. Ponadto, jeśli λ jest wartością własną operatora T , to $\bar{\lambda}$ jest wartością własną operatora T^* , z tymi samymi wektorami własnymi.

Dowód. Z założenia wynika, że $\lambda I - T$ jest operatorem normalnym, więc możemy zastosować poprzednie twierdzenie. Druga część wniosku wynika z obserwacji, że $Tx = \lambda x$ oznacza $(\lambda I - T)x = 0$. $\square$

Twierdzenie 1.28. *Wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym operatora normalnego są ortogonalne.*

Dowód. Niech $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ będzie operatorem normalnym oraz $Tx = \lambda x$ i $Ty = \mu y$ dla $\lambda \neq \mu$ oraz pewnych niezerowych wektorów $x, y \in \mathcal{H}$. Obliczamy

$$\lambda \langle x, y \rangle = \langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle = \langle x, \bar{\mu}y \rangle = \bar{\mu} \langle x, y \rangle.$$

Zatem $\langle x, y \rangle = 0$. $\square$

Wniosek 1.29. *Niech T będzie operatorem normalnym na $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$. Wtedy istnieje baza ortonormalna $v_1, v_2, \dots, v_n$ w $\mathbb{C}^n$ złożona z wektorów własnych operatora T .*

Uwaga 1.30. Teza wniosku oznacza, że w bazie wektorów $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ macierz operatora T ma postać diagonalną z liczbami $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ na przekątnej.

Dowód. Utożsamimy operator T z macierzą w standardowej bazie przestrzeni $\mathbb{C}^n$. Rozwiązujemy równanie

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - T) = 0$$

ze względu na λ . Funkcja $p(z)$ jest wielomianem stopnia n , więc na podstawie Zasadniczego Twierdzenia Algebry istnieje rozwiązanie $\lambda_1 \in \mathbb{C}$. Wtedy λ_1 jest wartością własną odpowiadającą pewnemu wektorowi $v_1 \in \mathbb{C}^n$. Tzn. $Tv_1 = \lambda_1 v_1$. Rozkładamy przestrzeń na

$$\mathbb{C}^n = \mathbb{C}v_1 \oplus \mathcal{M}_1, \quad \text{gdzie } \mathcal{M}_1 = \{v_1\}^\perp.$$

Mamy $\mathcal{M}_1 \simeq \mathbb{C}^{n-1}$ oraz $T(\mathcal{M}_1) \subseteq \mathcal{M}_1$. Rzeczywiście, niech $v \in \mathcal{M}_1$. Chcemy sprawdzić, czy $Tv \in \mathcal{M}_1$. W tym celu obliczamy

$$\langle Tv, v_1 \rangle = \langle v, T^*v_1 \rangle = \langle v, \overline{\lambda_1}v_1 \rangle = \lambda_1 \langle v, v_1 \rangle = 0.$$

Traktujemy T jako operator na $\mathcal{M}_1 \simeq \mathbb{C}^{n-1}$. Powtarzamy całe wcześniejsze rozumowanie, aby znaleźć wartość własną λ_2 , wektor własny v_2 i następną podprzestrzeń $\mathcal{M}_2$. Itd. $\square$

Twierdzenie 1.31. *Dla ograniczonego operatora samosprzężonego w przestrzeni Hilberta spektrum jest zawarte w osi rzeczywistej.*

Dowód. Załóżmy, że $z = \lambda + \mu i$, gdzie $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, oraz $\mu \neq 0$. Pokażemy, że operator $zI - T$ jest odwracalny, tzn. $z \notin \sigma(T)$. Wykonujemy obliczenia

$$\begin{aligned} \|(zI - T)v\|^2 &= \langle (zI - T)v, (zI - T)v \rangle = \langle (\overline{z}I - T)(zI - T)v, v \rangle \\ &= \langle (\lambda^2 + \mu^2)I - 2\lambda T + T^2)v, v \rangle = \langle [(\lambda I - T)^2 + \mu^2 I]v, v \rangle \\ &= \langle (\lambda I - T)v, (\lambda I - T)v \rangle + \mu^2 \langle v, v \rangle \geq \mu^2 \|v\|^2. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy więc

$$\|(zI - T)v\| \geq |\mu| \|v\|. \quad (1.6)$$

To oznacza, że operator $zI - T$ jest różnowartościowy oraz, że obraz $\text{Im}(zI - T)$ jest domknięty. Korzystając z zadania 73 [5] mamy

$$\mathcal{H} = \ker(\overline{z}I - T) \oplus \text{Im}(zI - T).$$

Pierwsza podprzestrzeń jest zerowa, bo $\overline{z} \notin \mathbb{R}$. Zatem $\mathcal{H} = \text{Im}(zI - T)$, tzn. $zI - T$ jest operatorem „1-1” i „na”. Stąd $zI - T$ jest odwracalny algebraicznie. Ponadto z (1.6) wynika ograniczoność operatora odwrotnego. $\square$

2 Operatory dodatnie

Definicja 2.1. *Operator $A \in B(\mathcal{H})$ nazywamy dodatnim, jeśli $\langle Av, v \rangle \geq 0$ dla wszystkich wektorów $v \in \mathcal{H}$. Piszemy wtedy $A \geq 0$.*

Fakt 2.2. *Każdy operator dodatni jest samosprzężony.*

Dowód. Z założenia mamy w szczególności, że $\langle Av, v \rangle = \langle v, Av \rangle$. Na podstawie tożsamości polaryzacyjnej otrzymujemy

$$\begin{aligned}\langle Av, w \rangle &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^4 \langle A(v + i^k w), v + i^k w \rangle i^k \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^4 \langle v + i^k w, A(v + i^k w) \rangle i^k = \langle v, Aw \rangle = \langle A^* v, w \rangle.\end{aligned}$$

Stąd $A^* = A$. □

Uwaga 2.3. Warto zapamiętać, że z tożsamości polaryzacyjnej wynika, że jeśli dla dwu operatorów A i B z $B(\mathcal{H})$ mamy $\langle Av, v \rangle = \langle Bv, v \rangle$, to $A = B$.

Przykłady. (a) $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ oraz A jest macierzą postaci

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{bmatrix}$$

Wtedy $\langle Av, v \rangle = \sum_{k=1}^n k|v_k|^2 \geq 0$, dla $v = (v_k)_{k=1}^n$.

(b) Dla $\mathcal{H} = L^2(0, 1)$ określamy $(Af)(x) = xf(x)$. Wtedy

$$\langle Av, v \rangle = \int_0^1 x|f(x)|^2 dx \geq 0.$$

Lemat 2.4. Jeśli $A \geq 0$ oraz $C \in B(\mathcal{H})$, to $C^*AC \geq 0$.

Dowód.

$$\langle C^*ACv, v \rangle = \langle A(Cv), Cv \rangle \geq 0.$$

□

Lemat 2.5. Jeśli $A, B \geq 0$ oraz $A + B = 0$, to $A = B = 0$.

Dowód. Mamy

$$\langle Av, v \rangle + \langle Bv, v \rangle = \langle (A + B)v, v \rangle = 0.$$

Ponieważ oba składniki są nieujemne, to oba muszą się zerować dla dowolnego wektora v . Stąd $A = B = 0$. $\square$

Lemat 2.6. *Jeśli A jest operatorem samosprzężonym, to*

$$\|A\| = \sup_{\|v\| \leq 1} |\langle Av, v \rangle| = \sup_{\|v\|=1} |\langle Av, v \rangle|.$$

Dowód. Mamy

$$\|A\| = \sup_{\substack{\|u\| \leq 1 \\ \|v\| \leq 1}} |\langle Av, w \rangle| = \sup_{\substack{\|u\| \leq 1 \\ \|v\| \leq 1}} \operatorname{Re} \langle Av, w \rangle,$$

bo można dobrać liczbę zespoloną α o module 1 taką, że

$$|\langle Av, w \rangle| = \langle Av, \alpha w \rangle.$$

Z tożsamości polaryzacyjnej otrzymujemy

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \langle Av, w \rangle &= \frac{1}{4} \langle A(v+w), v+w \rangle - \frac{1}{4} \langle A(v-w), v-w \rangle \\ &= \frac{1}{4} [\|v+w\|^2 \langle Ay, y \rangle - \|v-w\|^2 \langle Az, z \rangle], \end{aligned}$$

gdzie

$$y = \frac{v+w}{\|v+w\|}, \quad z = \frac{v-w}{\|v-w\|},$$

o ile $v \pm w \neq 0$. Zatem

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \langle Av, w \rangle &\leq \frac{1}{4} [\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2] \sup_{\|y\|=1} |\langle Ay, y \rangle| \\ &= \frac{1}{4} [2\|v\|^2 + 2\|w\|^2] \sup_{\|y\|=1} |\langle Ay, y \rangle|. \end{aligned}$$

W rezultacie mamy

$$\|A\| \leq \sup_{\|y\|=1} |\langle Ay, y \rangle|.$$

Oczywiście nierówność przeciwna jest też spełniona, bo

$$\|A\| = \sup_{\substack{\|v\| \leq 1 \\ \|w\| \leq 1}} |\langle Av, w \rangle| \geq \sup_{\|v\| \leq 1} |\langle Av, v \rangle|$$

□

Lemat 2.7. *Mamy*

$$\sqrt{1-x} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2(2n-1)4^n} x^n, \quad |x| \leq 1,$$

oraz szereg jest zbieżny jednostajnie.

Dowód. Wzór jest znany z kursu Analiza 1. Wiemy, że

$$\sqrt{1-x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-x)^n, \quad |x| < 1. \quad (2.1)$$

Po przekształceniu mamy

$$\binom{1/2}{n} (-1)^{n+1} = \frac{(2n)!}{(n!)^2(2n-1)4^n} > 0.$$

Stąd równość w tezie jest spełniona dla $|x| < 1$. Zatem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2(2n-1)4^n} x^n = 1 - \sqrt{1-x} \leq 1, \quad |x| < 1.$$

Obliczamy kres górny lewej strony i uzyskujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2(2n-1)4^n} = 1.$$

W związku z tym szereg po prawej stronie (2.1) jest zbieżny jednostajnie dla $|x| \leq 1$ z kryterium Weierstrassa. Stąd wyrażenie po prawej stronie (2.1) reprezentuje funkcję ciągłą na przedziale $[-1, 1]$ równą $\sqrt{1-x}$ dla $|x| < 1$. Zatem równość (2.1) jest spełniona również dla $x = \pm 1$. □

Twierdzenie 2.8. *Dla dodatniego operatora $A \in B(\mathcal{H})$ istnieje jedyny operator dodatni B spełniający $B^2 = A$, nazywany pierwiastkiem z A i oznaczamy symbolem $A^{1/2}$.*

Dowód. Możemy założyć, że $\|A\| \leq 1$, dzieląc w razie potrzeby przez liczbę dodatnią. Oznaczmy $X = I - A$. Wtedy

$$\langle Xv, v \rangle = \langle v, v \rangle - \langle Av, v \rangle \geq \|v\|^2 - \|A\| \|v\|^2 \geq 0.$$

Ponadto

$$0 \leq \langle Xv, v \rangle = \langle v, v \rangle - \langle Av, v \rangle \leq \|v\|^2.$$

Z Lematu 2.6 otrzymujemy więc

$$\|X\| = \sup_{\|v\|=1} \langle Xv, v \rangle \leq 1.$$

Oznaczmy

$$c_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2 (2n-1) 4^n}.$$

Określmy

$$B = I - \sum_{n=1}^{\infty} c_n X^n,$$

przez analogię ze wzorem z Lematu 2.7, bo $A = I - X$. B jest dobrze określonym operatorem, bo szereg jest bezwzględnie zbieżny znowu z Lematu 2.7. Istotnie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|c_n X^n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} c_n \|X\|^n \leq \sum_{n=1}^{\infty} c_n = 1.$$

Uwaga 2.9. W przestrzeni $B(\mathcal{H})$ można pomnożyć metodą Cauchy'ego dwa szeregi bezwzględnie zbieżne i otrzymany szereg będzie bezwzględnie zbieżny. Dowód jest taki sam jak dla szeregów liczbowych, tylko symbol wartości bezwzględnej $|\cdot|$ trzeba zamienić symbolem normy operatorowej $\|\cdot\|$. Jedyna różnica polega na tym, że

$$|ab| = |a| |b|, \quad \|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

Sprawdzamy, czy $B^2 = A$.

$$B^2 = \left(I - \sum_{n=1}^{\infty} c_n X^n \right) \left(I - \sum_{n=1}^{\infty} c_n X^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n X^n,$$

gdzie prawa strona jest iloczynem Cauchy'ego szeregu $I - \sum_{n=1}^{\infty} c_n X^n$ przez siebie. Ale z Lematu 2.7 mamy

$$\left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n \right)^2 = (\sqrt{1-x})^2 = 1-x,$$

zatem $d_0 = 1$, $d_1 = -1$ oraz $d_n = 0$ dla $n \geq 2$. Czyli

$$B^2 = I - X = A.$$

Sprawdzimy nieujemność operatora B . Mamy

$$\begin{aligned} \langle Bv, v \rangle &= \langle v, v \rangle - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \langle X^n v, v \rangle \\ &\geq \|v\|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \|X^n\| \|v\|^2 \geq \|v\|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \|v\|^2 = 0. \end{aligned}$$

Skorzystaliśmy z faktu, że $\|X^n\| \leq \|X\|^n \leq 1$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = 1$, co wynika z Lematu 2.7.

Pozostaje sprawdzić jedyność. Załóżmy, że dla innego operatora $C \geq 0$ mamy $C^2 = A$. Wtedy $CA = C^3 = AC$, tzn. C i A są przemieszane ze sobą. Wtedy również C i B są przemieszane, co wynika z określenia operatora B . Wykonujemy obliczenie

$$\begin{aligned} (B - C)B(B - C) + (B - C)C(B - C) \\ = (B - C)(B + C)(B - C) = (B^2 - C^2)(B - C) = 0. \end{aligned}$$

Każdy z początkowych składników jest operatorem dodatnim z Lematu 2.5. Zatem

$$(B - C)B(B - C) = (B - C)C(B - C) = 0.$$

Odejmując te operatory otrzymujemy

$$0 = (B - C)B(B - C) - (B - C)C(B - C) = (B - C)^3.$$

Operator $B - C$ jest samosprężony, więc z Lematu 1.19 wynika, że

$$0 = \|(B - C)^3\| = \|B - C\|^3,$$

czyli $C = B$. □

Definicja 2.10. Dla $A \in B(\mathcal{H})$ określamy

$$|A| = (A^*A)^{1/2}.$$

Definicja 2.11. Operator $U \in B(\mathcal{H})$ nazywamy *częściową izometrią*, jeśli U jest izometrią po obcięciu do podprzestrzeni $(\ker U)^\perp$, tzn.

$$\|Uv\| = \|v\|, \quad \text{dla wszystkich } v \perp \ker U.$$

Uwaga 2.12. Zbiór $\text{Im } U$ jest domknięty jako izometryczny obraz przestrzeni domkniętej $(\ker U)^\perp$ przez operator U . Rzeczywiście, ponieważ

$$\mathcal{H} = \ker U \oplus (\ker U)^\perp,$$

to

$$\text{Im } U = U(\mathcal{H}) = U((\ker U)^\perp).$$

Lemat 2.13. Operator U jest częściową izometrią wtedy i tylko wtedy, gdy operator UU^* jest rzutem, tzn. $(UU^*)^2 = UU^*$.

Dowód.

($\Rightarrow$) Wiemy, że $(\ker U)^\perp = \overline{\text{Im } U^*}$. Ponadto $\|UU^*v\| = \|U^*v\|$. Zatem

$$\langle (UU^*)^2v, v \rangle = \langle UU^*v, UU^*v \rangle = \|UU^*v\|^2 = \|U^*v\|^2 = \langle UU^*v, v \rangle.$$

Stąd $(UU^*)^2 = UU^*$.

($\Leftarrow$) Jeśli $(UU^*)^2 = UU^*$, to korzystając z wcześniejszych obliczeń otrzymamy, że U jest izometrią na $\text{Im } U^*$. Zatem U jest izometrią na domknięciu $\overline{\text{Im } U^*}$, czyli na $(\ker U)^\perp$. $\square$

Dla częściowej izometrii U mamy dwa ortogonalne rozkłady przestrzeni

$$\mathcal{H} = \ker U \oplus (\ker U)^\perp, \quad \mathcal{H} = (\text{Im } U)^\perp \oplus \text{Im } U.$$

Operator U jest izometrią z $(\ker U)^\perp$ na $\text{Im } U$.

Lemat 2.14. Jeśli U jest częściową izometrią, to U^* jest też częściową izometrią.

Dowód. Wiemy, że $(UU^*)^2 = UU^*$. Z Lematu 2.13 wystarczy dowieść, że $(U^*U)^2 = U^*U$. Mamy $UU^*(UU^* - I) = 0$. Ponieważ U jest izometrią na $(\ker U)^\perp = \overline{\text{Im } U^*}$, to U jest „1-1” na $\text{Im } U^*$. Stąd $U^*(UU^* - I) = 0$, czyli

$$U^*UU^* = U^*. \tag{2.2}$$

Mnożymy z prawej strony przez U i uzyskujemy $(U^*U)^2 = U^*U$. $\square$

Jako częściowa izometria U^* jest izometrią z $(\ker U^*)^\perp$ na $\text{Im } U^*$, czyli z $\text{Im } U$ na $(\ker U)^\perp$ (odwrotnie niż U).

Ponadto UU^* jest rzutem na $\text{Im } U$. Istotnie, z (2.2) mamy $UU^*(Uv) = Uv$, tzn. UU^* jest identycznością na $\text{Im } U$. Co więcej UU^* zeruje się na $(\text{Im } U)^\perp = \ker U^*$. Po zamianie rolami U i U^* wnioskujemy, że U^*U jest rzutem ortogonalnym na $\text{Im } U^* = (\ker U)^\perp$.

Twierdzenie 2.15 (Rozkład polarny). *Dla operatora $A \in B(\mathcal{H})$ istnieje jedyna częściowa izometria U spełniająca $A = U|A|$ oraz $\ker A = \ker U$. Ponadto $\text{Im } U = \overline{\text{Im } A}$.*

Dowód. Mamy

$$\langle Av, Av \rangle = \langle A^*Av, v \rangle = \langle |A|^2v, v \rangle = \langle |A|v, |A|v \rangle$$

Zatem

$$\|Av\| = \||A|v\|.$$

Stąd wynika, że jeśli $|A|v_1 = |A|v_2$, to $Av_1 = Av_2$, bo

$$\||A|v_1 - |A|v_2\| = \||A|(v_1 - v_2)\| = \|A(v_1 - v_2)\| = \|Av_1 - Av_2\|.$$

Określamy odwzorowanie U najpierw na podprzestrzeni $\text{Im } |A|$ wzorem

$$U(|A|v) = Av.$$

Z poprzednich obliczeń operator U jest dobrze określony i jest izometrią z $\text{Im } |A|$ na $\text{Im } A$. Zatem U rozszerza się do izometrii z $\overline{\text{Im } |A|}$ na $\overline{\text{Im } A}$ w oparciu o znany fakt z topologii metrycznej. Połóżmy $Uv = 0$ dla $v \in (\text{Im } |A|)^\perp = \ker |A|$. Wtedy U staje się częściową izometrią oraz $\ker U = \ker |A| = \ker A$. Z definicji operatora U mamy $U|A| = A$.

Pozostaje sprawdzić jedyność. Załóżmy, że V jest również częściową izometrią spełniającą $A = V|A|$ oraz $\ker V = \ker A$. Zatem

$$V|A|v = Av = U|A|v,$$

tzn. V i U są równe na $\text{Im } |A|$. Stąd $V = U$ na $\overline{\text{Im } |A|}$, przez ciągłość. Z kolei na dopełnieniu ortogonalnym

$$\overline{\text{Im } |A|}^\perp = \ker |A| = \ker A = \ker V = \ker U$$

operatory U i V są równe, bo oba się tam zerują. To oznacza, że $U = V$. $\square$

Uwaga 2.16. Zauważmy U^*U jest rzutem na

$$(\ker U)^\perp = (\ker A)^\perp = (\ker |A|)^\perp = \overline{\operatorname{Im} |A|}.$$

Czyli

$$U^*A = U^*U|A| = |A|.$$

Uwaga 2.17. Jeśli A jest operatorem odwracalnym, to również A^* i iloczyn A^*A są odwracalne. W związku z tym $|A|$ jest odwracalny. Wtedy $U = A|A|^{-1}$. To oznacza, że U i U^* są odwracalne. Dalej

$$U^*U = |A|^{-1}A^*A|A|^{-1} = I,$$

zatem $U^* = U^{-1}$, co oznacza, że U jest operatorem unitarnym.

Przykłady.

- (a) Niech $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$. Wtedy operator normalny A jest dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wartości własne macierzy A są nieujemne. Rzeczywiście, niech $A \geq 0$. Wtedy jeśli $Av = \lambda v$, dla $v \neq 0$, to $0 \leq \langle Av, v \rangle = \lambda \langle v, v \rangle$. Zatem $\lambda \geq 0$. Odwrotnie, założmy, że wartości własne dla A są nieujemne. Wiemy, że A można przedstawić w postaci $A = CDC^{-1}$, gdzie D jest macierzą diagonalną oraz C jest macierzą unitarną. Tzn. $A = CDC^*$. Elementy na przekątnej macierzy D są nieujemne jako wartości własne macierzy A . Zatem D jest operatorem dodatnim, bo jeśli

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

to

$$\langle Dv, v \rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k |v_k|^2 \geq 0.$$

Zatem $A \geq 0$. Ponadto $A^{1/2} = CD^{1/2}C^{-1}$, gdzie

$$D^{1/2} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{1/2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{1/2} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \lambda_n^{1/2} \end{bmatrix},$$

(b) Niech $\mathcal{H} = L^2(0, 1)$ oraz $(Af)(x) = x f(x)$. Wtedy

$$\langle Af, f \rangle = \int_0^1 (Af)x \overline{f(x)} dx = \int_0^1 x |f(x)|^2 dx \geq 0.$$

Ponadto

$$(A^{1/2}f)(x) = \sqrt{x} f(x).$$

(b) Niech $\mathcal{H} = \ell^2$. Określmy

$$U(x_0, x_1, x_2, \dots) = (x_1, x_2, x_3, \dots).$$

U jest izometrią na $V = e_0^\perp$, gdzie $e_k = (0, \dots, 0, \underset{k}{1}, 0, \dots)$. Ponadto U zeruje się na $\mathbb{C}e_0$. Zatem U jest częściową izometrią. Mamy

$$U^*(x_0, x_1, x_2, \dots) = (0, x_0, x_1, \dots).$$

Rzeczywiście

$$\langle U^*x, y \rangle = \langle x, Uy \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \overline{y_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} x_{n-1} \overline{y_n}.$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} U^*U(x_0, x_1, x_2, \dots) &= U^*(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots), \\ UU^*(x_0, x_1, x_2, \dots) &= U(0, x_0, x_1, \dots) = (x_0, x_1, x_2, \dots). \end{aligned}$$

Tzn. $UU^* = I$ oraz U^*U jest rzutem na $e_0^\perp$.

3 Zbieżność operatorów

Niech X i Y będą przestrzeniami unormowanymi. Rozważmy $T_n, T \in B(X, Y)$.

Definicja 3.1. (a) Mówimy, że ciąg operatorów T_n jest zbieżny do operatora T w normie operatorowej, jeśli

$$\|T_n - T\|_{B(X, Y)} \xrightarrow{n} 0.$$

(b) Mówimy, że ciąg T_n jest zbieżny do T mocno, jeśli dla wszystkich elementów $x \in X$ mamy

$$\|T_n x - T x\|_Y \xrightarrow{n} 0.$$

(c) Mówimy, że ciąg T_n jest zbieżny do T słabo, jeśli dla wszystkich elementów $x \in X$ oraz wszystkich funkcjonalów $y^* \in Y^*$ mamy

$$|y^*(T_n x) - y^*(T x)| \xrightarrow{n} 0.$$

Z nierówności

$$\begin{aligned} |y^*(T_n x) - y^*(T x)| &= |y^*(T_n x - T x)| \leq \|y^*\|_{Y^*} \|T_n x - T x\|_Y \\ &= \|y^*\|_{Y^*} \|(T_n - T)x\|_Y \leq \|y^*\|_{Y^*} \|x\|_X \|T_n - T\|_{B(X, Y)} \end{aligned}$$

wynika, że (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c).

Przykład 3.2. Niech $X = Y = \ell^2$ oraz

$$U(x_0, x_1, x_2, \dots) = (x_1, x_2, x_3, \dots).$$

Dla $T_n = U^n$ mamy

$$T_n(x_0, x_1, x_2, \dots) = (x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots).$$

Zatem

$$\|T_n x\|^2 = \sum_{k=n}^{\infty} |x_k|^2 \xrightarrow{n} 0.$$

To oznacza, że ciąg T_n jest zbieżny mocno do zera. Ponieważ

$$\|T_n\| \geq \|T_n e_n\| = \|e_0\| = 1,$$

to ciąg T_n nie dąży do 0 w normie operatorowej.

Mamy

$$U^*(x_0, x_1, x_2, \dots) = (0, x_0, x_1, \dots).$$

Wtedy

$$(U^*)^n(x_0, x_1, x_2, \dots) = (\underbrace{0, \dots, 0}_n, x_0, x_1, \dots).$$

Zatem

$$\|(U^*)^n x\|_2 = \|x\|_2.$$

Dalej

$$\langle (U^*)^n x, y \rangle = \langle (U^n)^* x, y \rangle = \langle x, U^n y \rangle \xrightarrow{n} 0,$$

bo $U^n y \xrightarrow{n} 0$. To oznacza, że $(U^*)^n$ dąży do 0 słabo, ale nie dąży do 0 mocno.

Uwaga 3.3. Dla $T_n, T \in B(\mathcal{H})$ mamy $T_n \xrightarrow[\text{słabo}]{} T$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\langle T_n x, y \rangle \xrightarrow{n} \langle T x, y \rangle, \quad x, y \in \mathcal{H}.$$

Twierdzenie 3.4. Załóżmy, że X jest przestrzenią Banacha, a Y przestrzenią unormowaną. Wtedy każdy słabo zbieżny ciąg operatorów $T_n \in B(X, Y)$ jest ograniczony, tzn. $\sup_n \|T_n\| < \infty$.

Dowód. Załóżmy, że $T_n \xrightarrow{n} T$ słabo, tzn. dla dowolnego elementu $x \in X$ ciąg $T_n x$ jest słabo zbieżny w przestrzeni Y . Wtedy ciąg $T_n x$ jest ograniczony w Y , na podstawie wniosku z twierdzenia Banacha-Steinhaus'a. Zatem normy $\|T_n\|$ są wspólnie ograniczone, w oparciu o wspomniany wniosek. $\square$

Rozważmy przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}$. Dla $A, B \in B(\mathcal{H})$ piszemy $A \geq B$ jeśli $A^* = A$, $B^* = B$ oraz $A - B \geq 0$. Ta relacja jest przechodnia, bo jeśli $A \geq 0$ oraz $B \geq 0$, to $A + B \geq 0$.

Lemat 3.5. Dla $A \geq 0$ mamy

$$|\langle Au, v \rangle| \leq \langle Au, u \rangle^{1/2} \langle Av, v \rangle^{1/2}, \quad (3.1)$$

$$\|Au\| \leq \|A\|^{1/2} \langle Au, u \rangle^{1/2}. \quad (3.2)$$

Dowód. Dla $z \in \mathbb{C}$ i $u, v \in \mathcal{H}$ rozważamy wyrażenie

$$0 \leq \langle A(zu + v), zu + v \rangle = |z|^2 \langle Au, u \rangle + \langle Av, v \rangle + 2\operatorname{Re} \{z \langle Au, v \rangle\}.$$

Założmy, że $\langle Au, v \rangle \neq 0$. Niech $z = -\lambda \overline{\operatorname{sgn} \langle Au, v \rangle}$ dla $\lambda \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$0 \leq \langle A(zu + v), zu + v \rangle = \langle Au, u \rangle \lambda^2 - 2|\langle Au, v \rangle| \lambda + \langle Av, v \rangle.$$

Otrzymaliśmy nieujemny trójmian kwadratowy zmiennej λ . Zatem wyróżnik Δ trójmianu musi być niedodatni. Czyli

$$0 \geq \frac{\Delta}{4} = |\langle Au, v \rangle|^2 - \langle Au, u \rangle \langle Av, v \rangle.$$

To dowodzi (3.1). W (3.1) podstawmy $v = Au$. Wtedy

$$\begin{aligned} \|Au\|^2 &\leq \langle Au, u \rangle^{1/2} \langle A^2 u, Au \rangle^{1/2} \\ &\leq \langle Au, u \rangle^{1/2} \|A^2 u\|^{1/2} \|Au\|^{1/2} \leq \langle Au, u \rangle^{1/2} \|A\|^{1/2} \|Au\|. \end{aligned}$$

Przy założeniu $Au \neq 0$ otrzymujemy (3.1). $\square$

Uwaga 3.6. Dowód można również przeprowadzić przy użyciu $A^{1/2}$. Rzeczywiście

$$|\langle Au, v \rangle| = |\langle A^{1/2}u, A^{1/2}v \rangle| \leq \|A^{1/2}u\| \|A^{1/2}v\| = \langle Au, u \rangle^{1/2} \langle Av, v \rangle^{1/2},$$

$$\|Au\| \leq \|A^{1/2}\| \|A^{1/2}u\| = \|A^{1/2}\| \langle Au, u \rangle^{1/2} = \|A\|^{1/2} \langle Au, u \rangle^{1/2}.$$

Twierdzenie 3.7. Niech $T_n \in B(\mathcal{H})$ będzie rosnącym i ograniczonym ciągiem operatorów dodatnich, tzn. $T_n \leq T_{n+1}$, oraz $\sup_n \|T_n\| < \infty$. Wtedy ciąg T_n jest zbieżny mocno.

Dowód. Dla $v \in \mathcal{H}$ mamy

$$0 \leq \langle T_n v, v \rangle \leq \langle T_{n+1} v, v \rangle.$$

Ponadto

$$0 \leq \langle T_n v, v \rangle \leq \|T_n\| \|v\|^2 \leq c \|v\|^2,$$

gdzie $c = \sup_n \|T_n\|$. Zatem ciąg liczbowy $\langle T_n v, v \rangle$ jest rosnący i ograniczony, więc jest zbieżny dla dowolnego elementu v . Z tożsamości polaryzacyjnej wynika, że również ciąg $\langle T_n u, v \rangle$ jest zbieżny dla dowolnych elementów u i v . Oznaczmy

$$B(u, v) = \lim_n \langle T_n u, v \rangle.$$

Wtedy

$$|B(u, v)| \leq \sup_n |\langle T_n u, v \rangle| \leq c \|u\| \|v\|.$$

Zatem $B(u, v)$ jest ograniczoną formą hermitowską na $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$. Z Twierdzenia 3.24 i zadania 72 [[5]] istnieje operator samosprężony T taki, że $B(u, v) = \langle Tu, v \rangle$. Tzn.

$$\lim_n \langle T_n u, v \rangle = \langle Tu, v \rangle.$$

Zatem ciąg T_n jest zbieżny do T słabo. Operator T jest dodatni, bo

$$0 \leq \langle T_n u, u \rangle \nearrow \langle Tu, u \rangle.$$

Co więcej $T \geq T_n$. Stosujemy (3.2) do $A = T - T_n$ i otrzymujemy

$$\begin{aligned} \|Tu - T_n u\| &= \|(T - T_n)u\| \leq \|T - T_n\|^{1/2} \langle (T - T_n)u, u \rangle^{1/2} \\ &= \|T - T_n\|^{1/2} \langle Tu - T_n u, u \rangle^{1/2}. \end{aligned}$$

Ponieważ

$$\|T - T_n\| \leq \|T\| + \|T_n\| \leq \|T\| + c,$$

to

$$\|Tu - T_n u\| \leq (\|T\| + c)^{1/2} \langle Tu - T_n u, u \rangle^{1/2}.$$

Zatem $\|Tu - T_n u\| \xrightarrow{n} 0$. Czyli T_n dąży do T mocno. $\square$

4 Operatory zwarte

Definicja 4.1. *Ograniczony operator liniowy $T : X \rightarrow Y$, gdzie X i Y są przestrzeniami unormowanymi, nazywamy zwartym jeśli obraz dowolnego ograniczonego podzbioru w X jest warunkowo zwartym podzbiorem w Y , tzn. z każdego ciągu elementów tego obrazu można wybrać podciąg zbieżny.*

Uwaga 4.2. Aby operator $T : X \rightarrow Y$ był zwarty wystarczy, aby zbiór $T(B_1)$ był warunkowo zwarty, gdzie B_1 jest kulą jednostkową w X , tzn. $B_1 = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$. Rzeczywiście, każdy ograniczony zbiór jest zawarty w wielokrotności kuli jednostkowej. Więc obraz takiego zbioru jest zawarty w wielokrotności obrazu kuli jednostkowej.

Przykład 4.3. Niech $T : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ będzie określony wzorem

$$(Tf)(x) = \int_0^1 k(x, y) f(y) dy,$$

gdzie $k(x, y)$ jest funkcją ciągłą dwu zmiennych. Wtedy

$$\|Tf\|_\infty \leq \sup_{0 \leq x, y \leq 1} |k(x, y)| \|f\|_\infty.$$

Stąd

$$\|T\| \leq \|k\|_\infty := \sup_{0 \leq x, y \leq 1} |k(x, y)|.$$

Rozważmy zbiór $T(\{f \in C[0, 1] : \|f\|_\infty \leq 1\})$. Ten zbiór jest ograniczony, bo operator T jest ograniczony. Sprawdzamy jednakową ciągłość funkcji z tego

zbioru.

$$\begin{aligned}
|(Tf)(x) - (Tf)(x')| &= \left| \int_0^1 [k(x, y) - k(x', y)] f(y) dy \right| \\
&\leq \int_0^1 |k(x, y) - k(x', y)| |f(y)| dy \leq \|f\|_1 \sup_{0 \leq y \leq 1} |k(x, y) - k(x', y)| \\
&\leq \|f\|_\infty \sup_{0 \leq y \leq 1} |k(x, y) - k(x', y)|. \quad (4.1)
\end{aligned}$$

Funkcja $k(x, y)$ jest jednostajnie ciągła. Zatem dla ustalonej liczby dodatniej ε istnieje liczba dodatnia δ taka, że jeśli $|x - x'| < \delta$ oraz $|y - y'| < \delta$ to $|k(x, y) - k(x', y')| < \varepsilon$. Zatem jeśli $|x - x'| < \delta$, to

$$\sup_{0 \leq y \leq 1} |k(x, y) - k(x', y)| \leq \varepsilon.$$

Czyli $|(Tf)(x) - (Tf)(x')| \leq \varepsilon$. Reasumując obraz kuli jednostkowej przez operator T jest ograniczony i jednakowo ciągły. Zatem z twierdzenia Arzeli-Ascoliego ten obraz jest warunkowo zwarty, więc operator T jest zwarty.

Twierdzenie 4.4. *Niech X, Y, V , i W będą przestrzeniami unormowanymi, natomiast operatory $T : X \rightarrow Y$, $A : V \rightarrow X$ oraz $B : Y \rightarrow W$ będą ograniczonymi operatorami liniowymi. Jeśli operator T jest zwarty, to zwarty jest również operator $BT A : V \rightarrow W$.*

Uwaga 4.5. Aby pokazać operator $T : X \rightarrow Y$ jest zwarty, trzeba udowodnić, że dla każdego ograniczonego ciągu x_n w X ciąg Tx_n zawiera podciąg zbieżny w Y .

Dowód. Niech v_n będzie ograniczonym ciągiem w V . Wtedy ciąg Av_n jest ograniczony w X . Zatem ciąg $T(Av_n)$ zawiera podciąg $T(Av_{n_k})$ zbieżny. Z ciągłości operatora B mamy, że podciąg $BT Av_{n_k}$ jest też zbieżny. $\square$

Przykład 4.6. Rozważmy operator $T : L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$

$$(Tf)(x) = \int_0^1 k(x, y) f(y) dy,$$

gdzie $k(x, y)$ jest funkcją ciągłą dwu zmiennych. Określmy operatory $S_1 : C[0, 1] \rightarrow L^2(0, 1)$ oraz $S_2 : L^2(0, 1) \rightarrow C[0, 1]$ wzorami

$$S_1 f = f, \quad (S_2 f)(x) = \int_0^1 k(x, y) f(y) dy.$$

Oba operatory są ograniczone, bo

$$\|S_1 f\|_2 = \|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq \|f\|_\infty,$$

oraz

$$\begin{aligned} |(S_2 f)(x)| &\leq \int_0^1 |k(x, y)| |f(y)| dy \leq \|k\|_\infty \int_0^1 |f(y)| dy \\ &\leq \|k\|_\infty \left(\int_0^1 |f(y)|^2 dy \right)^{1/2} = \|k\|_\infty \|f\|_2, \end{aligned}$$

czyli $\|S_2 f\|_\infty \leq \|k\|_\infty \|f\|_2$. Mamy $T = S_1 S_2$. Pokażemy, że operator S_2 jest zwarty, zatem T też będzie zwarty z poprzedniego twierdzenia. Wykażemy, że obraz kuli w $L^2(0, 1)$ przez S_2 jest warunkowo zwarty w $C[0, 1]$. Oczywiście obraz kuli jest ograniczony, bo operator S_2 jest ograniczony. Sprawdzamy jednakową ciągłość funkcji z obrazu kuli. Niech $\|f\|_2 \leq 1$. Wtedy korzystając z (4.1) otrzymamy

$$\begin{aligned} |(S_2 f)(x) - (S_2 f)(x')| &\leq \sup_{0 \leq y \leq 1} |k(x, y) - k(x', y)| \|f\|_1 \\ &\leq \sup_{0 \leq y \leq 1} |k(x, y) - k(x', y)| \|f\|_2, \end{aligned}$$

więc

$$|(S_2 f)(x) - (S_2 f)(x')| \leq \sup_{0 \leq y \leq 1} |k(x, y) - k(x', y)|.$$

Ponieważ funkcja $k(x, y)$ jest jednostajnie ciągła, to funkcje $S_2 f$, dla $\|f\|_2 \leq 1$ są jednakowo ciągle.

Przykład 4.7. Operatory skończenie wymiarowe, tzn. $\dim \operatorname{Im} T < \infty$, są zwarte. Istotnie, niech $T : X \rightarrow Y$ będzie ograniczonym operatorem liniowym, dla którego $T(X)$ jest przestrzenią skończonego wymiaru m . Wtedy

przestrzeń $T(X)$ jest izomorficzna z $\mathbb{C}^m$ z normą euklidesową. W takiej przestrzeni każdy zbiór ograniczony jest warunkowo zwarty. W szczególności obraz kuli jednostkowej przez operator ograniczony T jest taki.

Twierdzenie 4.8. *Niech X będzie przestrzenią unormowaną, a Y przestrzenią Banacha. Załóżmy, że operatory $T_n \in B(X, Y)$ są zwarte oraz zbieżne do operatora $T \in B(X, Y)$ w normie operatorowej. Wtedy operator T też jest zwarty.*

Dowód. Rozważamy ciąg x_m elementów z kuli jednostkowej w X . Z założenia istnieje podciąg $x_m^{(1)}$ ciągu x_m taki, że ciąg $T_1 x_m^{(1)}$ jest zbieżny, np. do y_1 . Z kolei istnieje podciąg $x_m^{(2)}$ ciągu $x_m^{(1)}$ taki, że ciąg $T_2 x_m^{(2)}$ jest zbieżny, np. do y_2 . Postępując tak dalej znajdziemy podciąg $x_m^{(n)}$ ciągu $x_m^{(n-1)}$ taki, że ciąg $T_n x_m^{(n)}$ jest zbieżny, np. do y_n . Określmy nowy ciąg $\tilde{x}_m = x_m^{(m)}$. Dla $m \geq n$ wyrazy ciągu $\tilde{x}_m$ pochodzą z podciągu $x_m^{(n)}$, tzn. ciąg $\tilde{x}_m$, $m \geq n$ jest podciągiem ciągu $x_m^{(n)}$. Zatem $T_n \tilde{x}_m \xrightarrow{m} y_n$. Sprawdzimy, że ciąg y_n jest zbieżny. Mamy

$$\|y_l - y_k\| = \lim_m \|T_l \tilde{x}_m - T_k \tilde{x}_m\|.$$

Ale

$$\|T_l \tilde{x}_m - T_k \tilde{x}_m\| = \|(T_l - T_k) \tilde{x}_m\| \leq \|T_l - T_k\| \|\tilde{x}_m\| \leq \|T_l - T_k\|.$$

Zatem ciąg y_n spełnia warunek Cauchy'ego. Z zupełności przestrzeni Y ciąg y_n jest zbieżny do pewnego elementu y . Pokażemy, że $T \tilde{x}_m \xrightarrow{m} y$. Mamy

$$\begin{aligned} \|T \tilde{x}_m - y\| &\leq \|T \tilde{x}_m - T_n \tilde{x}_m\| + \|T_n \tilde{x}_m - y_n\| + \|y_n - y\| \\ &\leq \|T - T_n\| + \|T_n \tilde{x}_m - y_n\| + \|y_n - y\|. \end{aligned}$$

Dla liczby dodatniej ε wybieramy n odpowiednio duże tak, aby $\|T - T_n\| < \varepsilon/3$ oraz $\|y_n - y\| < \varepsilon/3$. Następnie dla ustalonej wartości n istnieje liczba m_0 tak, że dla $m \geq m_0$ zachodzi $\|T_n \tilde{x}_m - y_n\| < \varepsilon/3$. Wtedy dla $m \geq m_0$ otrzymujemy

$$\|T \tilde{x}_m - y\| < \varepsilon.$$

□

Przykład 4.9. Rozważmy ponownie operator $T : L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$ z Przykładu 4.6. Na podstawie twierdzenia Stone'a-Weierstrassa kombinacje liniowe funkcji postaci $a(x)b(y)$ leżą gęsto w przestrzeni $C([0, 1]^2)$. Zatem

istnieje ciąg funkcji $k_n(x, y)$ postaci $k_n(x, y) = \sum_{k=1}^N a_k(x)b_k(y)$ (przy czym N i funkcje a_k oraz b_k zależą od n) takich, że $k_n(x, y) \xrightarrow[n]{\Rightarrow} k(x, y)$. Określmy operatory

$$(T_n f)(x) = \int_0^1 k_n(x, y) f(y) dy = \sum_{k=1}^N a_k(x) \int_0^1 b_k(y) f(y) dy.$$

Zatem

$$\text{Im } T_n \subseteq \text{lin}\{a_1(x), a_2(x), \dots, a_N(x)\}.$$

To oznacza, że T_n jest operatorem skończonego wymiaru. W szczególności T_n jest operatorem zwartym. Ponadto

$$\begin{aligned} |(T_n - T)f|(x) &= \left| \int_0^1 [k_n(x, y) - k(x, y)] f(y) dy \right| \leq \int_0^1 |k_n(x, y) - k(x, y)| |f(y)| dy \\ &\leq \sup_{0 \leq x, y \leq 1} |k_n(x, y) - k(x, y)| \|f\|_1 \leq \sup_{0 \leq x, y \leq 1} |k_n(x, y) - k(x, y)| \|f\|_2. \end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy

$$\|(T_n - T)f\|_2 \leq \sup_{0 \leq x, y \leq 1} |k_n(x, y) - k(x, y)| \|f\|_2.$$

Zatem

$$\|T_n - T\| \leq \sup_{0 \leq x, y \leq 1} |k_n(x, y) - k(x, y)| \xrightarrow[n]{} 0.$$

Twierdzenie 4.10. *Niech T będzie ograniczonym operatorem liniowym na przestrzeni Hilberta. T jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy T^* jest zwarty.*

Dowód. Wiemy, że operator T można zapisać w postaci $T = U|T|$ oraz $U^*T = |T|$. Jeśli T jest zwarty, to zwarty jest też $|T|$. Wtedy również $T^* = |T|U$ jest zwarty. $\square$

Twierdzenie 4.11. *W ośrodkowej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ ograniczony operator liniowy T jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy przekształca ciągi słabo zbieżne do zera w ciągi zbieżne do zera w normie przestrzeni.*

Dowód.

($\Rightarrow$) Załóżmy, że ciąg elementów x_n przestrzeni $\mathcal{H}$ dąży słabo do zera.

Ten ciąg jest więc ograniczony. Zatem Tx_n zawiera podciąg zbieżny Tx_{n_k} . Oznaczmy $Tx_{n_k} \xrightarrow[k]{k} y$. Dla $z \in \mathcal{H}$ otrzymujemy

$$\langle y, z \rangle = \lim_k \langle Tx_{n_k}, z \rangle = \lim_k \langle x_{n_k}, T^*z \rangle = 0.$$

Zatem $\langle y, z \rangle = 0$ dla wszystkich $z \in \mathcal{H}$, czyli $y = 0$.

Z powyższego rozumowania wynika, że każdy podciąg ciągu Tx_n zawiera podciąg zbieżny do zera. Zatem ciąg Tx_n dąży do zera.

($\Leftarrow$) Niech x_n będzie ograniczonym ciągiem elementów z $\mathcal{H}$. Z twierdzenia Banacha-Alaoglu możemy wybrać podciąg x_{n_k} , który jest $*$ -słabo, czyli słabo, zbieżny. Niech $x_{n_k} \xrightarrow[k]{k} x$ słabo. Zatem $x_{n_k} - x \xrightarrow[k]{k} 0$ słabo. Z założenia ciąg $T(x_{n_k} - x)$ jest zbieżny do zera w normie. Czyli $\|Tx_{n_k} - Tx\| \xrightarrow[k]{k} 0$. $\square$

Lemat 4.12. *Niech X, Y i Z będą przestrzeniami unormowanymi. Załóżmy, że operator $T : X \rightarrow Y$ jest zwarty oraz, że ciąg ograniczonych operatorów $S_n : Y \rightarrow Z$ jest mocno zbieżny do operatora $S : Y \rightarrow Z$. Wtedy ciąg operatorów $S_n T$ jest zbieżny do ST w normie operatorowej.*

Dowód. Załóżmy, że $S_n T$ nie jest zbieżny do ST w normie operatorowej. Zatem dla pewnej dodatniej liczby ε można znaleźć rosnący ciąg liczb naturalnych n_k oraz ciąg elementów $x_k \in X$ takich, że

$$\|x_k\| = 1, \quad \|(S_{n_k} T - ST)x_k\| \geq \varepsilon.$$

Ze zwartości operatora T ciąg Tx_k zawiera podciąg zbieżny. Bez straty ogólności założymy, że Tx_k jest zbieżny do pewnego elementu $y \in Y$. Wtedy

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq \|(S_{n_k} T - ST)x_k\| \leq \|S_{n_k} Tx_k - S_{n_k} y\| + \|S_{n_k} y - Sy\| + \|Sy - STx_k\| \\ &\leq \|S_{n_k}\| \|Tx_k - y\| + \|S_{n_k} y - Sy\| + \|S\| \|y - Tx_k\| \xrightarrow[k]{k} 0. \end{aligned}$$

$\square$

Twierdzenie 4.13. *Każdy zwarty operator pomiędzy przestrzeniami Hilberta jest granicą w normie operatorowej ciągu operatorów skończenie wymiarowych.*

Dowód. Niech $T : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ będzie zwarty. Rozważmy przestrzeń $T(\mathcal{H}_1)$. Oznaczmy symbolem B kulę jednostkową w $\mathcal{H}_1$. Wtedy

$$T(\mathcal{H}_1) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(nB) = \bigcup_{n=1}^{\infty} nT(B) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} n\overline{T(B)}.$$

Zatem przestrzeń $T(\mathcal{H}_1)$ jest zawarta w przeliczalnej sumie zbiorów zwartych. Z kursu topologii metrycznej wiemy, że przestrzeń $T(\mathcal{H}_1)$ jest więc ośrodkowa. Zatem również domknięcie $\mathcal{H}_3 := \overline{T(\mathcal{H}_1)} \subset \mathcal{H}_2$ jest ośrodkową przestrzenią Hilberta. Możemy zastąpić $\mathcal{H}_2$ przez $\mathcal{H}_3$. Niech $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ oznacza bazę ortonormalną w przestrzeni $\mathcal{H}_3$. Wtedy dla dowolnego elementu $x \in \mathcal{H}_3$ mamy

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

Oznaczmy

$$I_n x = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k, \quad I_n : \mathcal{H}_3 \rightarrow \mathcal{H}_3.$$

Wtedy $I_n x \xrightarrow{n} x$, dla $x \in \mathcal{H}_3$, czyli $I_n \xrightarrow{n} I_{\mathcal{H}_3}$ mocno. Z Lematu 4.12 wynika, że $I_n T \xrightarrow{n} I_{\mathcal{H}_3} T = T$ w normie operatorowej. $\square$

Uwaga 4.14. Na podstawie twierdzenie można uzyskać inny dowód Twierdzenia 4.10. Rzeczywiście, jeśli $T_n \rightarrow T$ oraz operatory T_n są skończenie wymiarowe, to $T_n^* \rightarrow T^*$ oraz T_n^* są skończenie wymiarowe.

Twierdzenie 4.15 (Alternatywa Fredholma). *Niech T będzie operatorem zwartym w przestrzeni Hilberta. Wtedy dla liczby $\lambda \neq 0$ operator $\lambda I - T$ jest odwracalny albo liczba λ jest wartością własną operatora T .*

Dowód. ^a Mamy $\lambda I - T = \lambda(I - \lambda^{-1}T)$. Zamieniając operator T na $\lambda^{-1}T$, który też jest zwarty możemy ograniczyć się do przypadku $\lambda = 1$. Rozważamy więc operator $I - T$. Z poprzedniego lematu można znaleźć operator skończenie wymiarowy K_0 taki, że $\|T - K_0\| < 1$. Wtedy

$$I - T = I - (T - K_0) - K_0.$$

Operator $I - (T - K_0)$ jest odwracalny na podstawie Twierdzenia 1.7. Zatem

$$I - T = \left\{ I - K_0[I - (T - K_0)]^{-1} \right\} [I - (T - K_0)].$$

Oznaczmy

$$K_1 = K_0[I - (T - K_0)]^{-1}.$$

Wtedy

$$I - T = (I - K_1)(I - T + K_0). \quad (4.2)$$

^aDowód opracowany z Dominikiem Wachowskim

Operator K_1 jest skończenie wymiarowy, bo $\text{Im } K_1 \subseteq \text{Im } K_0$. Ze wzoru (4.2) wynika, że $I - T$ jest odwracalny wtedy i tylko wtedy, gdy $I - K_1$ jest odwracalny. Ponadto $I - T$ jest różnowartościowy wtedy i tylko wtedy, gdy $I - K_1$ jest różnowartościowy.

Pokażemy, że jeśli $I - K_1$ jest różnowartościowy, to $I - K_1$ jest odwracalny. Stąd będzie wynikać, że jeśli $I - T$ jest różnowartościowy, to $I - T$ jest odwracalny.

Zauważmy, że $x \perp \text{Im } K_1 + \text{Im } K_1^*$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in \ker K_1 \cap \ker K_1^*$. Przestrzeń $\text{Im } K_1 + \text{Im } K_1^*$ ma skończony wymiar, zatem jest domknięta. Stąd

$$\mathcal{H} = [\text{Im } K_1 + \text{Im } K_1^*] \oplus [\ker K_1 \cap \ker K_1^*].$$

Obie podprzestrzenie są niezmiennicze na działanie operatora K_1 , czyli również dla operatora $I - K_1$. Operator $I - K_1$ jest odwracalny wtedy i tylko wtedy, gdy $I - K_1$ jest odwracalny na każdej z dwu podprzestrzeni (zadanie). Operator $I - K_1$ jest identycznością na drugim składniku sumy prostej.

Założmy, że $I - K_1$ jest różnowartościowy. Zatem $I - K_1$ jest różnowartościowy na $\text{Im } K_1 + \text{Im } K_1^*$. Z kursu algebry liniowej wiemy, że operator $I - K_1$ jest wtedy odwracalny na $\text{Im } K_1 + \text{Im } K_1^*$, bo przestrzeń ta ma skończony wymiar.

□

Twierdzenie 4.16 (Riesz-Schauder). *Spektrum operatora zwartego na przestrzeni Hilberta składa się z co najwyżej przeliczalnego zbioru liczb zespolonych nie mających punktu skupienia poza być może punktem 0. Każda niezerowa liczba w spektrum jest wartością własną o skończonej krotności (tzn. przestrzeń wektorów własnych odpowiadająca tej liczbie ma skończony wymiar).*

Dowód. Niech $\lambda \neq 0$ oraz $\lambda \in \sigma(T)$ dla zwartego operatora T . Z alternatywy Fredholma wynika, że λ jest wartością własną operatora T . Niech $Tx = \lambda x$, oraz $x \neq 0$. Ustalmy liczbę $\varepsilon > 0$. Pokażemy, że przestrzeń wektorów własnych odpowiadających wartościom własnym λ , $|\lambda| \geq \varepsilon$, ma skończony wymiar. To zakończy dowód tezy twierdzenia.

Założmy nie wprost, że istnieje nieskończony układ liniowo niezależny $(x_n)_{n=1}^\infty$ taki, że $Tx_n = \lambda_n x_n$ oraz $|\lambda_n| \geq \varepsilon$. Zastosujemy proces ortogonalizacji Grama-Schmidta do tego ciągu i otrzymamy układ ortonormalny $(y_n)_{n=1}^\infty$ o własności

$$y_n \in E_n := \text{lin}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \quad y_n \perp E_{n-1}.$$

Niech

$$y_n = \sum_{k=1}^n \alpha_{k,n} x_k, \quad \alpha_{n,n} > 0.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} Ty_n &= \sum_{k=1}^n \alpha_{k,n} Tx_k = \sum_{k=1}^n \alpha_{k,n} \lambda_k x_k \\ &= \lambda_n \alpha_{n,n} x_n + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{k,n} \lambda_k x_k = \lambda_n y_n - \lambda_n \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{k,n} x_k + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{k,n} \lambda_k x_k. \end{aligned}$$

Tzn.

$$Ty_n = \lambda_n y_n + v_n, \quad v_n \in E_{n-1}.$$

Zatem

$$\langle Ty_n, y_n \rangle = \lambda_n \langle y_n, y_n \rangle = \lambda_n.$$

Ciąg y_n dąży słabo do zera co wynika z nierówności Bessela. Zatem

$$\|Ty_n\| \xrightarrow{n} 0.$$

Stąd $\lambda_n \xrightarrow{n} 0$, na podstawie Twierdzenia 4.11. □

Lemat 4.17. *Jeśli T jest zwartym operatorem liniowym na przestrzeni Hilberta, to obraz $\text{Im}(I - T)$ jest domkniętą podprzestrzenią liniową.*

Dowód. Wystarczy udowodnić nierówność $\|(I - T)x\| \geq c\|x\|$ dla pewnej stałej $c > 0$ oraz wszystkich $x \perp \ker(I - T)$. Rzeczywiście, dla

$$\mathcal{H}_0 = \ker(I - T)^\perp$$

rozważmy operator $I - T : \mathcal{H}_0 \longrightarrow \mathcal{H}$. Zauważmy, że

$$(I - T)(\mathcal{H}) = (I - T)(\mathcal{H}_0).$$

Wtedy z nierówności $\|(I - T)x\| \geq c\|x\|$ dla $x \in \mathcal{H}_0$ wynika, że $I - T$ jest operatorem różnowartościowym na $\mathcal{H}_0$ i jego obraz jest domknięty.

Założmy nie wprost, że nierówność nie jest spełniona dla żadnej stałej $c > 0$. Zatem istnieje ciąg elementów $x_n \perp \ker(I - T)$ spełniający $\|x_n\| = 1$ oraz $\|(I - T)x_n\| \xrightarrow{n} 0$. Z ciągu Tx_n można wybrać podciąg zbieżny Tx_{n_k} . Niech $Tx_{n_k} \xrightarrow{k} y$. Wtedy $\|x_{n_k} - Tx_{n_k}\| \xrightarrow{k} 0$. Zatem $x_{n_k} \xrightarrow{k} y$. Stąd

$$(I - T)y = \lim_k (I - T)x_{n_k} = 0,$$

czyli $y \in \ker(I - T)$. Z drugiej strony ponieważ $x_{n_k} \xrightarrow[k]{\rightarrow} y$, to $y \in \ker(I - T)^\perp$.
Zatem $y = 0$. Ale $\|y\| = \lim_k \|x_{n_k}\| = 1$. $\square$

Uwaga 4.18. Jeśli operator T jest zwarty, to również $\text{Im}(\lambda I - T)$ dla $\lambda \neq 0$ jest domkniętą podprzestrzenią liniową, bo

$$\text{Im}(\lambda I - T) = \text{Im}(I - \lambda^{-1}T).$$

Twierdzenie 4.19. Niech T będzie zwartym operatorem liniowym w $B(\mathcal{H})$. Równanie $(I - T)x = y$ ma rozwiązanie $x \in \mathcal{H}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $y \perp \ker(I - T^*)$.

Dowód. Mamy rozkład ortogonalny

$$\mathcal{H} = \ker(I - T^*) \oplus \overline{\text{Im}(I - T)} = \ker(I - T^*) \oplus \text{Im}(I - T).$$

Zatem $y \in \text{Im}(I - T)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $y \perp \ker(I - T^*)$. $\square$

Twierdzenie 4.20. Niech $T \in B(\mathcal{H})$ będzie zwartym operatorem samosprzężonym w ośrodkowej przestrzeni Hilberta. Wtedy istnieje baza ortonormalna złożona z wektorów własnych operatora T . Tzn. istnieje baza ortonormalna $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ taka, że $T\varphi_n = \mu_n\varphi_n$, gdzie $\mu_n \in \mathbb{R}$ oraz $\mu_n \xrightarrow[n]{\rightarrow} 0$. (gdy $\dim \mathcal{H} = \infty$, to $N = \infty$)

Dowód. Przeprowadzimy dowód w przypadku $\dim \mathcal{H} = \infty$. Operator T nie jest odwracalny, bo dla ciągu ortonormalnego e_n mamy $e_n \xrightarrow[\text{słabo}]{\rightarrow} 0$, zatem $\|Te_n\| \xrightarrow[n]{\rightarrow} 0$. Czyli $0 \in \sigma(T)$. Wiemy, że $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$. Ponadto

$$\sigma(T) = \{\mu_n\}_{n=1}^N \cup \{0\},$$

gdzie $\mu_n \neq 0$. Przestrzeń własna

$$E_n = \{x \in \mathcal{H} : Tx = \mu_n x\}$$

ma skończony wymiar. Wiemy też, że jeśli $T^* = T$, to wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym są ortogonalne. Niech $E_0 = \ker T$. Oznaczmy

$$\mathcal{H}_0 = \bigoplus_{n=1}^N E_n \oplus E_0.$$

Tzn. $\mathcal{H}_0$ jest najmniejszą domkniętą podprzestrzenią zawierającą podprzestrzenie E_n dla $n = 0, 1, 2, \dots, N$. Pokażemy, że $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$. Załóżmy nie wprost, że $\mathcal{H}_0 \subsetneq \mathcal{H}$. Zauważmy, że $T(\mathcal{H}_0) \subset \mathcal{H}_0$, bo $T(E_n) \subset E_n$ dla każdego $n = 0, 1, 2, \dots, N$.

Lemat 4.21. Niech $T \in B(\mathcal{H})$ oraz $T^* = T$. Jeśli dla pewnego podzbioru $M \subset \mathcal{H}$ mamy $T(M) \subset M$, to $T(M^\perp) \subset M^\perp$.

Dowód. Niech $x \in M^\perp$. Dla $y \in M$ mamy $Ty \in M$, więc

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle = 0.$$

To oznacza, że $Tx \in M^\perp$. □

Z lematu mamy $T(\mathcal{H}_0^\perp) \subset \mathcal{H}_0^\perp$. Niech $\tilde{T}$ oznacza operator T ograniczony do podprzestrzeni niezmienniczej $\mathcal{H}_0^\perp$. Operator $\tilde{T}$ jest nadal samosprężony. $\tilde{T}$ nie posiada wartości własnych, bo wszystkie wektory własne zostały uwzględnione w $\mathcal{H}_0$. Operator ten jest też zwarty. Zatem $\sigma(\tilde{T}) = \{0\}$. Tzn. promień spektralny $r(\tilde{T})$ jest zerowy. Ale z samosprężoności mamy

$$\|\tilde{T}\| = r(\tilde{T}) = 0.$$

Czyli $\tilde{T} = 0$. Otrzymujemy sprzeczność za wyjątkiem sytuacji $\mathcal{H}_0^\perp = \{0\}$. Zatem

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n=1}^N E_n \oplus E_0.$$

Wiemy, że $\dim E_n < \infty$. W każdej podprzestrzeni E_n wybieramy bazę ortonormalną. Połączenie tych zbiorów da nam bazę ortonormalną całej przestrzeni $\mathcal{H}$. Ustawmy elementy bazy w ciąg $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$. Wtedy $T\varphi_n = \mu_n\varphi_n$, dla pewnych liczb $\mu_n \in \sigma(T)$. Ponieważ elementy φ_n dążą słabo do zera, to $\mu_n \xrightarrow{n} 0$. □

Uwaga 4.22. Dla $x \in \mathcal{H}$ mamy

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, \varphi_n \rangle \varphi_n.$$

Zatem

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, \varphi_n \rangle T\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \langle x, \varphi_n \rangle \varphi_n.$$

Twierdzenie 4.23. Dla operatora zwartego $T \in B(\mathcal{H})$ istnieją układy ortonormalne $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$, $\{\psi_n\}_{n=1}^N$ oraz liczby dodatnie $\{\lambda_n\}_{n=1}^N$ takie, że

$$Tx = \sum_{n=1}^N \lambda_n \langle x, \varphi_n \rangle \psi_n.$$

Dowód. Stosujemy rozkład polarny $T = U|T|$. Wartości własne operatora $|T|$ są nieujemne. Rzeczywiście, jeśli $A \geq 0$ oraz $Ax = \lambda x$, dla $x \neq 0$, to

$$0 \leq \langle Ax, x \rangle = \lambda \|x\|^2.$$

Zatem $\lambda \geq 0$. Z poprzedniego twierdzenia istnieje baza ortonormalna $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ taka, że

$$|T|x = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \langle x, \varphi_n \rangle \varphi_n.$$

Zatem

$$Tx = U|T|x = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \langle x, \varphi_n \rangle U\varphi_n = \sum_{\substack{n=1 \\ \mu_n \neq 0}}^{\infty} \mu_n \langle x, \varphi_n \rangle U\varphi_n.$$

Dla $\mu_n \neq 0$ oznaczmy $U\varphi_n = \psi_n$. Mamy $|T|\varphi_n = \mu_n \varphi_n$. Stąd $\varphi_n \in \text{Im } |T|$. Wiemy, że U jest izometrią na $\text{Im } |T|$. Zatem

$$\langle \psi_n, \psi_m \rangle = \langle U\varphi_n, U\varphi_m \rangle = \langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m. \end{cases}$$

Stąd układ $\{\psi_n\}_{n=1, \mu_n \neq 0}^\infty$ jest ortonormalny. Niezerowe liczby μ_n ustawiamy w ciąg $\{\lambda_n\}_{n=1}^N$, aby uzyskać tezę twierdzenia. $\square$

Uwaga 4.24. Gdy $N = \infty$, to $\lambda_n \xrightarrow{n} 0$.

Definicja 4.25. Wielkości λ_n nazywamy liczbami singularnymi operatora zwartego T . Możemy założyć, że $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots$.

Twierdzenie 4.26 (Zasada minimaksu). Dla operatora zwartego T w przestrzeni Hilberta n -ta liczba singularna wyraża się wzorem

$$\lambda_n = \min_{\substack{V \subset \mathcal{H} \\ \dim V = n-1}} \max_{\substack{x \in V^\perp \\ \|x\|=1}} \|Tx\|.$$

Dowód. Niech

$$Tx = \sum_{n=1}^N \lambda_n \langle x, \varphi_n \rangle \psi_n, \quad \lambda_n \searrow 0.$$

Oznaczmy $V_n = \text{lin}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}\}$. Wtedy element $x \in V_n^\perp$ ma postać

$$x = \sum_{k=n}^N \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k + x_0, \quad \text{gdzie } x_0 \in \ker T = \ker |T|.$$

Zatem

$$Tx = \sum_{k=n}^N \lambda_k \langle x, \varphi_k \rangle \psi_k.$$

Z nierówności Bessela otrzymujemy

$$\|Tx\|^2 = \sum_{k=n}^N \lambda_k^2 |\langle x, \varphi_k \rangle|^2 \leq \lambda_n^2 \sum_{k=n}^N |\langle x, \varphi_k \rangle|^2 \leq \lambda_n^2 \|x\|^2.$$

W rezultacie

$$\|Tx\| \leq \lambda_n \|x\| \leq \lambda_n, \quad \text{dla } \|x\| \leq 1.$$

To daje nierówność „ $\geq$ ” we wzorze tezy twierdzenia.

Dla dowodu przeciwnej nierówności niech $V < \mathcal{H}$ będzie podprzestrzenią wymiaru $n - 1$. Wtedy istnieje wektor $x \in V_{n+1}$ taki, że $x \perp V$ oraz $\|x\| = 1$ (por. zadanie 33) Dalej

$$Tx = \sum_{k=1}^N \lambda_k \langle x, \varphi_k \rangle \psi_k = \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle x, \varphi_k \rangle \psi_k.$$

Zatem

$$\|Tx\|^2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 |\langle x, \varphi_k \rangle|^2 \geq \lambda_n^2 \sum_{k=1}^n |\langle x, \varphi_k \rangle|^2 = \lambda_n^2 \|x\|^2 = \lambda_n^2.$$

Stąd $\max_{\substack{x \in V^\perp \\ \|x\|=1}} \|Tx\| \geq \lambda_n$. Biorąc kres dolny względem V otrzymujemy

$$\min_{\substack{V < \mathcal{H} \\ \dim V = n-1}} \max_{\substack{x \in V^\perp \\ \|x\|=1}} \|Tx\| \geq \lambda_n.$$

□

Uwaga 4.27. Prawdziwy jest też inny wzór

$$\lambda_n = \max_{\substack{V < \mathcal{H} \\ \dim V = n}} \min_{\substack{x \in V \\ \|x\|=1}} \|Tx\|.$$

Rzeczywiście, niech $V = V_{n+1}$. Wtedy dla $x \in V$ mamy

$$Tx = \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle x, \varphi_k \rangle \psi_k.$$

Zatem

$$\|Tx\|^2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 |\langle x, \varphi_k \rangle|^2 \geq \lambda_n^2 \|x\|^2.$$

Stąd

$$\min_{\substack{x \in V_{n+1} \\ \|x\|=1}} \|Tx\| = \lambda_n,$$

bo dla $x = \varphi_n$ uzyskujemy równość. To dowodzi nierówności " $\geq$ ".

Niech $\dim(V) = n$. Na podstawie zadania 33 istnieje wektor $x \in V$ taki, że $x \perp V_n$ oraz $\|x\| = 1$. Wtedy

$$Tx = \sum_{k=n}^N \lambda_k \langle x, \varphi_k \rangle \psi_k.$$

Dalej

$$\|Tx\|^2 = \sum_{k=n}^N \lambda_k^2 |\langle x, \varphi_k \rangle|^2 \leq \lambda_n^2 \|x\|^2 = \lambda_n^2.$$

Stąd

$$\min_{\substack{x \in V \\ \|x\|=1}} \|Tx\| \leq \lambda_n,$$

czyli

$$\lambda_n \geq \max_{\substack{V \subset \mathcal{H} \\ \dim V = n}} \min_{\substack{x \in V \\ \|x\|=1}} \|Tx\|.$$

Wniosek 4.28. *Jeśli T jest operatorem zwartym, to $\|T\| = \|Tx_0\|$ dla pewnego elementu $x_0 \in \mathcal{H}$ takiego, że $\|x_0\| = 1$.*

Dowód. Istotnie, z zasady minimaksu wynika, że

$$\lambda_1 = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \|T\|.$$

Liczba λ_1 jest największą wartością własną operatora $|T|$. Niech $x_0 \in \mathcal{H}$ będzie odpowiadającym jednostkowym wektorem własnym. Wtedy

$$\|Tx_0\| = \||T|x_0\| = \lambda_1 \|x_0\| = \lambda_1 = \|T\|.$$

□

Uwaga 4.29. Wniosek można udowodnić bezpośrednio. Mamy $\|T\| = \lim_n \|Tx_n\|$ dla pewnego ciągu wektorów spełniających $\|x_n\| = 1$. Na podstawie Twierdzenia Banacha-Alaoglu z ciągu x_n można wybrać podciąg słabo zbieżny. Niech $x_n \xrightarrow{s} x_0$. Wtedy $\|x_0\| \leq 1$. Ponadto $x_n - x_0 \xrightarrow{s} 0$. Zatem $Tx_n - Tx_0 \rightarrow 0$ w normie przestrzeni $\mathcal{H}$. To oznacza, że $\|Tx_0\| = \lim_n \|Tx_n\| = \|T\|$. Ponieważ $\|T\| = \|Tx_0\| \leq \|T\|\|x_0\|$, to $\|x_0\| \geq 1$. Czyli $\|x_0\| = 1$.

Definicja 4.30. Operator $T \in B(\mathcal{H})$ nazywamy operatorem Hilberta-Schmidta jeśli dla pewnej bazy ortonormalnej $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ mamy $\sum_{n=1}^\infty \|Te_n\|^2 < \infty$. Klasę tych operatorów oznaczamy symbolem HS .

Przykład 4.31. Niech $T : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$ będzie odwzorowaniem liniowym z macierzą $a_{ij} = \langle Te_j, e_i \rangle$, gdzie $\{e_n\}_{n=1}^N$ oznacza standardową bazę w przestrzeni $\mathbb{C}^N$. Wtedy

$$\sum_{j=1}^N \|Te_j\|^2 = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N |\langle Te_j, e_i \rangle|^2 = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N |a_{ij}|^2,$$

tnz. otrzymujemy sumę kwadratów wartości bezwzględnych wszystkich wyrazów macierzy.

Przykład 4.32. Rozważmy odwzorowanie liniowe $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$. Oznaczmy $a_{ij} = \langle Te_j, e_i \rangle$, gdzie $\{e_j\}_{j=1}^\infty$ oznacza standardową bazę w przestrzeni ℓ^2 . Wtedy

$$\sum_{j=1}^\infty \|Te_j\|^2 = \sum_{j=1}^\infty \sum_{i=1}^\infty |\langle Te_j, e_i \rangle|^2 = \sum_{j=1}^\infty \sum_{i=1}^\infty |a_{ij}|^2.$$

Twierdzenie 4.33. Wielkość $\sum_{n=1}^\infty \|Te_n\|^2$ nie zależy od wyboru bazy ortonormalnej. Ponadto jeśli $T \in HS$, to $T^* \in HS$.

Dowód. Niech $\{f_m\}_{m=1}^\infty$ będzie dowolną bazą ortonormalną przestrzeni $\mathcal{H}$. Wtedy z równości Parsevala mamy

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^\infty \|Te_n\|^2 &= \sum_{n=1}^\infty \sum_{m=1}^\infty |\langle Te_n, f_m \rangle|^2 \\ &= \sum_{n=1}^\infty \sum_{m=1}^\infty |\langle e_n, T^* f_m \rangle|^2 = \sum_{m=1}^\infty \|T^* f_m\|^2. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Podstawiając $\{f_m\}_{m=1}^\infty = \{e_n\}_{n=1}^\infty$ otrzymamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|T^*e_n\|^2. \quad (4.4)$$

Dalej stosujemy (4.3) i (4.4) do operatora T^* , aby uzyskać

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|T^*e_n\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \|(T^*)^*f_m\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \|Tf_m\|^2.$$

□

Twierdzenie 4.34. *Każdy operator Hilberta-Schmidta jest zwarty. Ponadto liczby singularne operatora Hilberta-Schmidta są sumowalne z kwadratem.*

Dowód. Możemy założyć, że operator T jest nieskończenie wymiarowy, bo teza jest w oczywisty sposób spełniona dla operatora skończenie wymiarowego. Ustalmy bazę ortonormalną $\{e_n\}_{n=1}^\infty$. Dla operatora $T \in HS$ rozważmy operatory

$$T_N x = \sum_{n=1}^N \langle x, e_n \rangle T e_n = T \left(\sum_{n=1}^N \langle x, e_n \rangle e_n \right).$$

Tzn. $T_N = TP_N$, gdzie P_N jest rzutem ortogonalnym na podprzestrzeń $\text{lin}\{e_1, e_2, \dots, e_N\}$. Operator T_N jest skończenie wymiarowy, więc jest zwarty. Mamy

$$Tx = T \left(\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle T e_n.$$

Zatem z nierówności Schwarza mamy

$$\begin{aligned} \|Tx - T_N x\|^2 &= \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle T e_n \right\|^2 \leq \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle| \|T e_n\| \right)^2 \\ &\leq \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \right) \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \|T e_n\|^2 \right) \leq \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \|T e_n\|^2 \right) \|x\|^2. \end{aligned}$$

Stąd

$$\|T - T_N\| \leq \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \|T e_n\|^2 \right)^{1/2} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Zatem T jest zwarty jako granica w normie operatorowej operatorów skończenie wymiarowych.

Wiemy, że

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, \varphi_n \rangle \psi_n,$$

gdzie $\lambda_n \searrow 0$ oraz $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest bazą ortonormalną obrazu operatora $|T|$. Niech $\{f_k\}_{k=1}^K$ będzie bazą ortonormalną dla $\ker |T| = \ker T$. Wtedy układ $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{f_k\}_{k=1}^K$ jest bazą ortonormalną całej przestrzeni $\mathcal{H}$, bo $\mathcal{H} = \overline{\text{Im } |T|} \oplus \ker |T|$. Ponadto

$$\infty > \sum_{n=1}^{\infty} \|T\varphi_n\|^2 + \sum_{k=1}^K \|Tf_k\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|T\varphi_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2. \quad (4.5)$$

□

Wniosek 4.35. *Dla operatora Hilberta-Schmidta T i bazy ortonormalnej $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ mamy*

$$\|T\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2$$

Dowód. Teza wynika bezpośrednio ze wzoru (4.5) i faktu, że $\lambda_1 = \|T\|$. Dowód można też przeprowadzić bezpośrednio.

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle Te_n,$$

zatem

$$\begin{aligned} \|Tx\| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle| \|Te_n\| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 \right)^{1/2} \|x\| \end{aligned}$$

□

Twierdzenie 4.36. *Operatory Hilberta-Schmidta tworzą ideal.*

Dowód. Niech $T, S \in HS$. Dla bazy ortonormalnej $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ na podstawie nierówności trójkąta w ℓ^2 mamy

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|(T+S)e_n\|^2 \right)^{1/2} &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n + Se_n\|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} (\|Te_n\| + \|Se_n\|)^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|Se_n\|^2 \right)^{1/2} < \infty. \end{aligned}$$

Czyli $T+S \in HS$. Niech $T \in HS$ oraz $S \in B(\mathcal{H})$. Wtedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|STe_n\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|S\|^2 \|Te_n\|^2 = \|S\|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 < \infty,$$

co oznacza $ST \in HS$. Z Twierdzenia 4.33 mamy $T^* \in HS$. Zatem $S^*T^* \in HS$. Znowu z Twierdzenia 4.33 otrzymujemy $TS = (S^*T^*)^* \in HS$. $\square$

Uwaga 4.37. Operatory HS z normą

$$\|T\|_{HS} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 \right)^{1/2}$$

tworzą unormowaną przestrzeń liniową, w której norma pochodzi od iloczynu skalarnego

$$\langle T, S \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle Te_n, Se_n \rangle.$$

Ponadto z (4.5) i (4.4) otrzymujemy

$$\|T\|_{HS}^2 = \|T^*\|_{HS} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2,$$

gdzie λ_n są liczbami singularnymi operatora T . Prawdziwe są nierówności

$$\|ST\|_{HS} \leq \|S\| \|T\|_{HS}, \quad \|TS\|_{HS} \leq \|S\| \|T\|_{HS}$$

Twierdzenie 4.38. *Przestrzeń HS jest zupełna, czyli jest przestrzenią Hilberta.*

Dowód. Załóżmy, że ciąg operatorów T_n spełnia warunek Cauchy'go względem normy Hilberta-Schmidta. W szczególności normy $\|T_n\|_{HS}$ są wspólnie ograniczone, czyli $C = \sup \|T_n\|_{HS} < \infty$. Z Wniosku 4.35 wynika, że operatory T_n tworzą ciąg Cauchy'ego względem normy operatorowej. Zatem ciąg T_n jest zbieżny do operatora $T \in B(\mathcal{H})$. Stąd, dla ustalonej liczby K otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^K \|Te_k\|^2 = \lim_n \sum_{k=1}^K \|T_n e_k\|^2 \leq C$$

Ponieważ K jest dowolną liczbą naturalną, to

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|Te_k\|^2 \leq C,$$

czyli $T \in HS$. Pozostaje udowodnić, że $\|T_n - T\|_{HS} \rightarrow 0$. Dla liczby $\varepsilon > 0$ wybierzmy N takie, że dla $n, m > N$ spełniona jest nierówność $\|T_n - T_m\|_{HS} < \varepsilon$. Wtedy dla $n > N$ mamy

$$\sum_{k=1}^K \|(T_n - T)e_k\|^2 = \lim_m \sum_{k=1}^K \|(T_n - T_m)e_k\|^2 \leq \varepsilon^2.$$

Ponieważ K jest dowolne, to

$$\|T_n - T\|_{HS}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|(T_n - T)e_k\|^2 \leq \varepsilon^2.$$

□

5 Nierówność Löwnera

Lemat 5.1. *Dla operatorów $A, B \in B(X)$ spełniona jest równość*

$$\sigma(AB) \cup \{0\} = \sigma(BA) \cup \{0\},$$

ozn. niezerowe elementy spektrów AB i BA są takie same, czyli promienie spektralne operatorów AB i BA są równe.

Dowód. Wystarczy pokazać zawieranie " $\subset$ ". Załóżmy, że $|\lambda| > \|AB\|$ oraz $|\lambda| > \|BA\|$. Wtedy operatory AB i BA są odwracalne oraz

$$\begin{aligned} (\lambda I - AB)^{-1} &= \lambda^{-1}(I - \lambda^{-1}AB)^{-1} = \lambda^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n}(AB)^n \\ &= \lambda^{-1}I + \lambda^{-2}A \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-(n-1)}(BA)^{n-1} \right) B \\ &= \lambda^{-1}I + \lambda^{-2}A(I - \lambda^{-1}BA)^{-1}B = \lambda^{-1}I + \lambda^{-1}A(\lambda I - BA)^{-1}B \end{aligned}$$

Założmy, że $0 \neq \lambda \notin \sigma(BA)$. Bezpośrednim rachunkiem można wtedy pokazać, że operator

$$\lambda^{-1}I + \lambda^{-1}A(\lambda I - BA)^{-1}B$$

jest odwrotny od AB , czyli $\lambda \notin \sigma(AB)$. Np.

$$\begin{aligned} &[\lambda^{-1}I + \lambda^{-1}A(\lambda I - BA)^{-1}B](\lambda I - AB) \\ &= I - \lambda^{-1}AB + \lambda^{-1}A(\lambda I - BA)^{-1}(\lambda I - BA)B \\ &= I - \lambda^{-1}AB + \lambda^{-1}AB = I \end{aligned}$$

□

Uwaga 5.2. Dowód jest łatwiejszy, jeśli jeden z operatorów A lub B jest odwracalny. Załóżmy, że A jest odwracalny. Wtedy

$$\lambda I - AB = A(\lambda A^{-1} - B), \quad \lambda I - BA = (\lambda A^{-1} - B)A$$

Stąd widać, że operatory $\lambda I - AB$ i $\lambda I - BA$ są jednocześnie odwracalne lub jednocześnie nieodwracalne oraz

$$(\lambda I - BA)^{-1} = A^{-1}(\lambda I - AB)^{-1}A$$

Twierdzenie 5.3 (nierówność Löwnera). *Dla operatorów dodatnich $A, B \in B(\mathcal{H})$ z nierówności $A \geq B$ wynika $A^{1/2} \geq B^{1/2}$.*

Dowód. Dla odwracalnego operatora C nierówność $A^{1/2} \geq B^{1/2} \geq 0$ jest równoważna z nierównością $C^*A^{1/2}C - C^*B^{1/2}C \geq 0$ (por. Lemat 2.4).

Założmy, że operator A jest odwracalny. Wtedy operator $A^{1/2}$ jest odwracalny oraz $A^{-1/2}$ jest operatorem dodatnim, bo operator odwrotny do operatora dodatniego jest też dodatni. Rzeczywiście

$$\langle A^{-1/2}x, x \rangle = \langle A^{-1/2}A^{1/2}y, A^{1/2}y \rangle = \langle y, A^{1/2}y \rangle \geq 0, \quad y = A^{-1/2}x$$

Podobnie operator $A^{1/4}$ jest odwracalny. Nierówność w tezie twierdzenia jest więc równoważna z nierównością

$$I - A^{-1/4}B^{1/2}A^{-1/4} \geq 0, \quad C = A^{-1/4}.$$

Z kolei ostatnia nierówność jest równoważna z warunkiem

$$\|A^{-1/4}B^{1/2}A^{-1/4}\| \leq 1 \quad (5.1)$$

(por. Lemat 2.6). Dalej, korzystając z Lematu 5.1, dostajemy

$$\|A^{-1/4}B^{1/2}A^{-1/4}\| = r(A^{-1/4}B^{1/2}A^{-1/4}) = r(B^{1/2}A^{-1/2})$$

Z założenia $\|A^{-1/2}BA^{-1/2}\| \leq 1$. Stąd, na podstawie równości $\|T\|^2 = \|T^*T\|$, otrzymujemy

$$[r(B^{1/2}A^{-1/2})]^2 \leq \|B^{1/2}A^{-1/2}\|^2 = \|A^{-1/2}BA^{-1/2}\| \leq 1.$$

Zatem nierówność (5.1) jest spełniona.

Z założenia $A \geq B$. Zatem

$$(\varepsilon I + A^{1/2})^2 = \varepsilon^2 I + 2\varepsilon A^{1/2} + A \geq B, \quad \varepsilon > 0$$

Operator $\varepsilon I + A^{1/2}$ jest dodatni i odwracalny. Z pierwszej części dowodu wynika, że

$$\varepsilon I + A^{1/2} \geq B^{1/2}.$$

Przechodząc do granicy $\varepsilon \rightarrow 0^+$ otrzymamy $A^{1/2} \geq B^{1/2}$. □

Uwaga 5.4. Z warunku $A \geq B \geq 0$ nie wynika nierówność $A^2 \geq B^2$. Np. dla macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \geq B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mamy $A^2 \geq B$ oraz

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \not\geq B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bo $\det(A^2 - B^2) = -1$.

Twierdzenie 5.5. *Ciąg operatorów dodatnich A_n jest zbieżny w normie przestrzeni $B(\mathcal{H})$ do operatora A . Wtedy A jest dodatni oraz $A_n^{1/2}$ jest zbieżny w normie operatorowej do $A^{1/2}$.*

Dowód. Operator A jest dodatni, bo

$$0 \leq \lim_n \langle A_n x, x \rangle = \langle Ax, x \rangle, \quad x \in \mathcal{H}$$

Dla $\varepsilon > 0$ istnieje N takie, że dla $n \geq N$ spełniony jest warunek $\|A_n - A\| \leq 2\varepsilon$.
Zatem

$$-2\varepsilon I \leq A_n - A \leq 2\varepsilon I$$

Otrzymujemy wtedy

$$\begin{aligned} 0 \leq A_n &\leq A + 2\varepsilon I \leq (A^{1/2} + \sqrt{\varepsilon}I)^2 \\ 0 \leq A &\leq A_n + 2\varepsilon I \leq (A_n^{1/2} + \sqrt{\varepsilon}I)^2 \end{aligned}$$

Z nierówności Löwnera wynikają nierówności

$$A_n^{1/2} \leq A^{1/2} + \sqrt{\varepsilon}I, \quad A^{1/2} \leq A_n^{1/2} + \sqrt{\varepsilon}I$$

Zatem

$$-\sqrt{\varepsilon}I \leq A_n^{1/2} - A^{1/2} \leq \sqrt{\varepsilon}I$$

Z ostatniej nierówności wynika

$$\|A_n^{1/2} - A^{1/2}\| \leq \sqrt{\varepsilon}$$

□

Uwaga 5.6. Dowód można przeprowadzić korzystając z jawnego wzoru na pierwiastek z operatora dodatniego A , poprzez absolutnie zbieżny szereg potęg operatora $I - a^{-1}A$ dla $0 < a \leq \frac{1}{2}\|A\|$.

Wniosek 5.7. *Ciąg operatorów A_n jest zbieżny w normie przestrzeni $B(\mathcal{H})$ do operatora A . Wtedy $|A_n|$ dąży od $|A|$ w normie operatorowej.*

Dowód. Z założenia wynika, że $|A_n|^2 = A_n^* A_n \rightarrow A^* A = |A|^2$ w normie w $B(\mathcal{H})$. Z poprzedniego twierdzenia otrzymujemy, że $|A_n| \rightarrow |A|$ w normie operatorowej. □

6 Operatory unitarne

Operator $U \in B(\mathcal{H})$ nazywamy unitarnym, jeśli $UU^* = U^*U = I$, tzn. $U^* = U^{-1}$. Mamy $\|U\|^2 = \|U^*U\| = \|I\| = 1$. Zatem $\sigma(U) \subseteq \{z : |z| \leq 1\}$. Ale dla $|z| < 1$ mamy

$$zI - U = zUU^* - U = -U(I - zU^*).$$

To oznacza, że operator $zI - U$ jest odwracalny. Ostatecznie otrzymujemy

$$\sigma(U) \subseteq \{z : |z| = 1\} = \mathbb{T}.$$

Definicja 6.1. *Wielomianem trygonometrycznym nazywamy wyrażenie postaci*

$$p(z) = \sum_{k=-m}^n a_k z^k,$$

gdzie $a_k \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{T}$. Wielomian sprzężony $\bar{p}(z)$ określamy wzorem

$$\bar{p}(z) = \overline{p(z)} = \sum_{k=-m}^n \bar{a}_k z^{-k}$$

(Uwaga: $\bar{z} = z^{-1}$ dla $z \in \mathbb{T}$).

Dla operatora unitarnego U oraz wielomianu trygonometrycznego $p(z)$ określamy

$$p(U) = \sum_{k=-m}^n a_k U^k, \quad \text{gdzie } U^0 = I.$$

Lemat 6.2.

- (i) $(p + q)(U) = p(U) + q(U)$.
- (ii) $p(U)^* = \bar{p}(U)$.
- (iii) $(pq)(U) = p(U)q(U)$.
- (iv) $p(U)$ jest operatorem normalnym.

Dowód.

(ii) Mamy $p(U)^* = \sum_{k=-m}^n \bar{a}_k U^{-k} = \bar{p}(U)$.

(iii) Niech $q(U) = \sum_{l=-m'}^{n'} b_l z^l$. Wtedy

$$(pq)(U) = \left(\sum_{k=-m}^n \sum_{l=-m'}^{n'} a_k b_l z^{k+l} \right) (U) = \sum_{k=-m}^n \sum_{l=-m'}^{n'} a_k b_l U^{k+l} = p(U)q(U).$$

Ponieważ $p(z)q(z) = q(z)p(z)$, to $p(U)q(U) = q(U)p(U)$.

(iv) Mamy

$$p(U)p(U)^* = p(U)\bar{p}(U) = |p|^2(U) = \bar{p}(U)p(U) = p(U)^*p(U).$$

□

Twierdzenie 6.3. *Mamy $\sigma(p(U)) = p(\sigma(U))$.*

Dowód. Załóżmy, że $\mu \in \sigma(p(U))$. Wtedy z zasadniczego twierdzenia algebry otrzymujemy

$$\mu I - p(z) = z^{-m} [z^m \mu - z^m p(z)] = cz^{-m} (z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \dots (z - \lambda_N). \quad (6.1)$$

Zatem

$$\mu I - p(U) = cU^{-m}(U - \lambda_1 I)(U - \lambda_2 I) \dots (U - \lambda_N I).$$

Lewa strona jest operatorem nieodwracalnym. Zatem przynajmniej jeden z operatorów $U - \lambda_j I$ jest nieodwracalny. Wtedy $\lambda_j \in \sigma(U)$. W szczególności $\lambda_j \neq 0$. Podstawiając $z = \lambda_j$ w (6.1) otrzymamy $\mu = p(\lambda_j) \in p(\sigma(U))$. Udowodniliśmy więc zawieranie $\sigma(p(U)) \subseteq p(\sigma(U))$.

Niech teraz $\mu \in p(\sigma(U))$, tzn. $\mu = p(\lambda)$ dla pewnej liczby $\lambda \in \sigma(U)$. Wtedy

$$\begin{aligned} p(\lambda)I - p(U) &= \sum_{k=-m}^n a_k (\lambda^k I - U^k) = \sum_{k=1}^n a_k (\lambda^k I - U^k) \\ &+ \sum_{k=1}^m a_{-k} \lambda^{-k} U^{-k} (U^k - \lambda^k I) = (\lambda I - U)V = V(\lambda I - U), \end{aligned} \quad (6.2)$$

dla pewnego operatora V . Operator $\lambda I - U$ jest nieodwracalny. Zatem operator $p(\lambda)I - p(U)$ jest nieodwracalny.^b Zatem $p(\lambda) \in \sigma(p(U))$.

W rezultacie udowodniliśmy, że $p(\sigma(U)) \subseteq \sigma(p(U))$. $\square$

Wniosek 6.4. $\|p(U)\| = \max\{|p(z)| : z \in \sigma(U)\} = \|p\|_{C(\sigma(U))}$.

Dowód. Ponieważ operator $p(U)$ jest normalny, to

$$\begin{aligned} \|p(U)\| &= r(p(U)) = \max\{|\mu| : \mu \in \sigma(p(U))\} \\ &= \max\{|\mu| : \mu \in p(\sigma(U))\} = \max\{|p(z)| : z \in \sigma(U)\} \end{aligned}$$

$\square$

Wniosek 6.5. *Jeśli $p(z) \geq 0$ dla $z \in \mathbb{T}$, to $p(U) \geq 0$.*

Dowód. Załóżmy, że $0 \leq p(z) \leq 1$. Określmy $q(z) = 2p(z) - 1$. Wtedy $q(z)$ jest wielomianem rzeczywistym oraz $|q(z)| \leq 1$. Z poprzedniego wniosku mamy $\|q(U)\| \leq 1$. Ponadto $q(U)^* = \bar{q}(U) = q(U)$, tzn. $q(U)$ jest operatorem samosprzężonym. Z Lematu 2.6 wynika, że $-I \leq q(U) \leq I$. W szczególności $2p(U) - I \geq -I$, czyli $p(U) \geq 0$. $\square$

Wniosek wynika też z następnego lematu.

Lemat 6.6 (Riesz-Fejér). *Założmy, że wielomian trygonometryczny $p(z)$ jest nieujemny dla $z \in \mathbb{T}$. Wtedy istnieje wielomian trygonometryczny $h(z)$ taki, że $p(z) = |h(z)|^2$.*

Dowód. Najpierw rozpatrzmy przypadek, gdy $p(z) > 0$ dla $|z| = 1$. Niech $p(z) = \sum_{k=-n}^n c_k z^k$. Z dodatniości otrzymujemy

$$p(z) = \overline{p(z)} = \sum_{k=-n}^n \bar{c}_k z^{-k} = \sum_{k=-n}^n \bar{c}_{-k} z^k.$$

Zatem $c_k = \bar{c}_{-k}$ dla dowolnego wskaźnika k . Zauważmy, że stąd wynika $c_n \neq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $c_{-n} \neq 0$.

^bSkorzystaliśmy z faktu, że jeśli $AB = BA$ jest operatorem odwracalnym, to A i B są odwracalne

Założmy, że $c_{-n} \neq 0$. Określmy $G(z) = z^n p(z)$. Wtedy $G(z)$ jest zwykłym wielomianem stopnia $2n$. Ponadto $G(0) = c_{-n} = \bar{c}_n \neq 0$. Wielomian $G(z)$ nie zeruje się na okręgu $|z| = 1$. Pokażemy, że

$$G(z) = z^{2n} \overline{G(\bar{z}^{-1})}, \quad \text{dla } z \neq 0, z \in \mathbb{C}. \quad (6.3)$$

Nietrudno zauważyć, że obie strony są wielomianami zmiennej z . Wystarczy zatem sprawdzić równość dla $|z| = 1$. Dla $|z| = 1$ mamy $p(z) = \overline{p(\bar{z})}$. Zatem $z^{-n} G(z) = \bar{z}^{-n} \overline{G(\bar{z})}$. Ponieważ $z = \bar{z}^{-1}$, to po przekształceniu otrzymujemy (6.3).

Rozkładamy wielomian $G(z)$ na czynniki liniowe

$$G(z) = c_n \prod_{j=1}^r (z - \alpha_j) \prod_{k=1}^s (z - \beta_k),$$

gdzie $|\alpha_j| < 1$ i $|\beta_k| > 1$, oraz $r + s = 2n$. Ze wzoru (6.3) wynika, że jeśli λ jest pierwiastkiem wielomianu $G(z)$, to również $\bar{\lambda}^{-1}$ jest pierwiastkiem i to tej samej krotności. To oznacza, że pierwiastki α_j i β_k można połączyć w pary, czyli

$$G(z) = c_n \prod_{j=1}^n (z - \alpha_j) \prod_{j=1}^n (z - \bar{\alpha}_j^{-1}),$$

Zatem

$$\begin{aligned} p(z) = z^{-n} G(z) &= c_n \prod_{j=1}^n (z - \alpha_j) \prod_{j=1}^n (1 - \bar{\alpha}_j^{-1} \bar{z}) \\ &= d_n \prod_{j=1}^n (z - \alpha_j) \prod_{j=1}^n (\bar{z} - \bar{\alpha}_j) = d_n \left| \prod_{j=1}^n (z - \alpha_j) \right|^2, \end{aligned}$$

gdzie

$$d_n = c_n (-1)^n \prod_{j=1}^n \bar{\alpha}_j^{-1}.$$

W szczególności $d_n > 0$. Teza jest spełniona dla $h(z) = \sqrt{d_n} \prod_{j=1}^n (z - \alpha_j)$.

Założmy, że $p(z) \geq 0$ dla $|z| = 1$. Wtedy $p_N(z) = p(z) + \frac{1}{N} > 0$ dla $|z| = 1$. Z pierwszej części dowodu istnieją wielomiany $h_N(z)$, których stopień jest wspólnie ograniczony, takie, że $p_N(z) = |h_N(z)|^2$. Współczynniki wielomianów h_N są również wspólnie ograniczone, bo

$$|h_N(z)|^2 \leq |p(z)| + 1.$$

Zatem z ciągu $h_N(z)$ można wybrać zbieżny podciąg do wielomianu $h(z)$, który spełnia $p(z) = |h(z)|^2$ dla $|z| = 1$. $\square$

Powracamy do alternatywnego dowodu Wniosku 6.5 Mamy

$$p(U) = |h|^2(U) = (\bar{h}h)(U) = \bar{h}(U)h(U) = h(U)^*h(U) \geq 0.$$

Dotychczas potrafilismy określić $p(U)$, gdzie p jest wielomianem trygonometrycznym. Naszym celem jest zdefiniowanie $f(U)$, gdzie f jest funkcją ciągłą określoną na zbiorze $\sigma(U) \subset \mathbb{T}$. Z twierdzenia Tietzego funkcję f możemy rozszerzyć do funkcji ciągłej $F : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ tak, że

$$\max_{|z|=1} |F(z)| = \max_{z \in \sigma(U)} |f(z)|.$$

Z twierdzenia Weierstrassa można znaleźć ciąg wielomianów trygonometrycznych $p_n(z)$ zbieżny jednostajnie do funkcji $F(z)$ dla $|z| = 1$.

Uwaga. Pokażemy, że faktycznie poprzednie stwierdzenie można wyprowadzić bezpośrednio z twierdzenia Weierstrassa.

Rozważamy funkcję $f(z)$ o wartościach zespolonych określoną na okręgu jednostkowym. Wtedy $f(z) = \operatorname{Re} f(z) + i \operatorname{Im} f(z)$. Możemy zatem przyjąć, że $f(z)$ przyjmuje wartości rzeczywiste.

Odwzorowanie $u(t) = f(e^{it}) - f(e^{-it})$ jest funkcją nieparzystą na przedziale $-\pi \leq t \leq \pi$ zatem $u(0) = u(\pi) = u(-\pi) = 0$. Funkcję $u(t)$ możemy jednostajnie przybliżyć funkcjami nieparzystymi zerującymi się w pobliżu 0 i π , tzn. spełniającymi

$$u(t) = 0 \quad \text{dla } |t| \leq \delta, \quad \pi - \delta \leq |t| \leq \pi, \quad -\pi \leq t \leq \pi$$

Dla $0 \leq t \leq \pi$ określimy funkcje

$$g(\cos t) = \frac{1}{2}[f(e^{it}) + f(e^{-it})], \quad h(\cos t) = \frac{1}{2} \frac{u(t)}{\sin t}$$

Otrzymujemy

$$f(e^{it}) = \frac{1}{2}[f(e^{it}) + f(e^{-it})] + \frac{1}{2}[f(e^{it}) - f(e^{-it})] \approx g(\cos t) + \sin t h(\cos t)$$

Funkcje $g(x)$ i $h(x)$ są ciągłe jako złożenia funkcji po prawej stronie z funkcją $x \mapsto \arccos x$. Z twierdzenia Weierstrassa istnieją ciągi wielomianów $p_n(x)$ i $q_n(x)$ zbieżne jednostajnie do $g(x)$ i $h(x)$, odpowiednio. Wtedy

$$p_n(\cos t) \pm \sin t q_n(\cos t) \Rightarrow g(\cos t) \pm \sin t h(\cos t), \quad 0 \leq t \leq \pi$$

To oznacza, że

$$p_n(\cos t) + \sin t q_n(\cos t) \Rightarrow g(\cos t) + \sin t h(\cos t) = f(e^{it}), \quad -\pi \leq t \leq \pi$$

Wyrażenie

$$p_n(\cos t) + \sin t q_n(\cos t)$$

jest wielomianem trygonometrycznym, bo $2 \cos t = e^{it} + e^{-it}$ oraz $2i \sin t = e^{it} - e^{-it}$.

Inne dowód można przeprowadzić używając elementów teorii szeregów Fouriera: jądra Fejéra lub jądra Poissona.

Pokażemy, że

- (1) Ciąg operatorów $p_n(U)$ jest zbieżny w normie operatorowej.
- (2) Granica ciągu $p_n(U)$ nie zależy od wyboru wielomianów p_n .
- (3) Granica ciągu $p_n(U)$ nie zależy od wyboru rozszerzenia F .

Dowód. Mamy

$$\begin{aligned} \|p_n(U) - p_m(U)\| &= \|(p_n - p_m)(U)\| \\ &= \max_{z \in \sigma(U)} |p_n(z) - p_m(z)| \leq \max_{|z|=1} |p_n(z) - p_m(z)| \\ &\leq \max_{|z|=1} |p_n(z) - F(z)| + \max_{|z|=1} |F(z) - p_m(z)| \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Ciąg operatorów $p_n(U)$ spełnia warunek Cauchy'ego. Zatem jest zbieżny. Załóżmy, że również inny ciąg wielomianów q_n jest zbieżny jednostajnie do F . Wtedy ciąg naprzemienny

$$p_1, q_1, p_2, q_2, \dots, p_n, q_n, \dots$$

jest też zbieżny jednostajnie do funkcji F . Z pierwszej części dowodu wynika, że ciąg operatorów

$$p_1(U), q_1(U), p_2(U), q_2(U), \dots, p_n(U), q_n(U), \dots$$

jest zbieżny. To oznacza, że ciągi $p_n(U)$ i $q_n(U)$ są zbieżne do tego samego operatora.

Oznaczmy symbolem $\tilde{F}$ inne ciągle rozszerzenie funkcji f do okręgu $|z| = 1$. Niech q_n będzie ciągiem wielomianów zbieżnym jednostajnie do $\tilde{F}$ na okręgu $\mathbb{T}$. Z pierwszej części dowodu wiemy, że ciąg operatorów $q_n(U)$ jest zbieżny. Ponadto mamy

$$\begin{aligned} \|p_n(U) - q_n(U)\| &= \|(p_n - q_n)(U)\| = \max_{z \in \sigma(U)} |p_n(z) - q_n(z)| \\ &\leq \max_{z \in \sigma(U)} |p_n(z) - f(z)| + \max_{z \in \sigma(U)} |q_n(z) - f(z)| \\ &\leq \max_{|z|=1} |p_n(z) - F(z)| + \max_{|z|=1} |q_n(z) - \tilde{F}(z)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

□

Wcześniejsze rozumowanie pokazuje, że granica $p_n(U)$ zależy jedynie od funkcji ciągłej f na spektrum operatora unitarnego U . Przyjmujemy oznaczenie

$$f(U) = \lim_n p_n(U).$$

Uwaga 6.7. Jeśli f jest wielomianem trygonometrycznym, np. $f(z) = z^k$, to $f(U) = U^k$.

Twierdzenie 6.8. Niech $f, g \in C(\sigma(U))$. Wtedy

- (i) $(f + g)(U) = f(U) + g(U)$.
- (ii) $(fg)(U) = f(U)g(U) = g(U)f(U)$.
- (iii) $f(U)^* = \overline{f}(U)$.
- (iv) $\|f(U)\| = \max_{z \in \sigma(U)} |f(z)|$.
- (v) $\sigma(f(U)) = f(\sigma(U))$.

Uwaga 6.9. Twierdzenie mówi, że rodzina operatorów $\{f(U) : f \in C(\sigma(U))\}$ tworzy algebrę ze sprzężeniem i normą operatorową. Tę algebrę można utożsamić z algebrą $C(\sigma(U))$.

Dowód.

(i) Niech p_n i q_n będą jednostajnie zbieżnymi ciągami wielomianów trygonometrycznych na $\mathbb{T}$ takimi, że $p_n(z) \xrightarrow{n} f(z)$ oraz $q_n(z) \xrightarrow{n} g(z)$ dla $z \in \sigma(U)$. Wtedy

$$\begin{aligned} f(U) + g(U) &= \lim_n p_n(U) + \lim_n q_n(U) = \lim_n [p_n(U) + q_n(U)] \\ &= \lim_n (p_n + q_n)(U) = (f + g)(U), \end{aligned}$$

bo ciąg wielomianów $p_n + q_n$ jest jednostajnie zbieżny na $\mathbb{T}$ oraz $p_n(z) + q_n(z) \xrightarrow{n} f(z) + g(z)$ dla $z \in \sigma(U)$.

(ii) Przy oznaczeniach jak w (i) mamy

$$f(U)g(U) = \lim_n p_n(U) \lim_n q_n(U) = \lim_n p_n(U)q_n(U) = \lim_n (p_n q_n)(U) = (fg)(U),$$

bo ciąg wielomianów $p_n q_n$ jest zbieżny jednostajnie na $\mathbb{T}$ oraz $p_n(z)q_n(z) \xrightarrow{n} f(z)g(z)$ dla $z \in \sigma(U)$. Dalej $g(U)f(U) = (gf)(U) = (fg)(U) = f(U)g(U)$.

(iii) Jeśli p_n jest zbieżny jednostajnie na $\mathbb{T}$ oraz $p_n(z) \xrightarrow{n} f(z)$ dla $z \in \sigma(U)$, to ciąg $\overline{p_n}$ jest też zbieżny jednostajnie na $\mathbb{T}$ oraz $\overline{p_n}(z) \rightarrow \overline{f}(z)$ dla $z \in \sigma(U)$. Zatem z Lematu 6.2(ii) mamy

$$\overline{f}(U) = \lim_n \overline{p_n}(U) = \lim_n p_n(U)^* = f(U)^*.$$

(iv) Przy oznaczeniach jak w (i), na podstawie Wniosku 6.4 otrzymujemy

$$\|f(U)\| = \lim_n \|p_n(U)\| = \lim_n \max_{z \in \sigma(U)} |p_n(z)| = \max_{z \in \sigma(U)} |f(z)|.$$

(v) Niech $\mu \notin f(\sigma(U))$. Rozważmy funkcję $g(z) = [\mu - f(z)]^{-1}$. Mamy $g \in C(\sigma(U))$. Z własności (ii) otrzymujemy

$$g(U)(\mu - f)(U) = (\mu - f)(U)g(U) = [(\mu - f)g](U) = 1(U) = I.$$

To oznacza, że operator $(\mu - f)(U) = \mu I - f(U)$ jest odwracalny. Czyli $\mu \notin \sigma(f(U))$. Zatem $\sigma(f(U)) \subseteq f(\sigma(U))$. Niech teraz $\mu \in f(\sigma(U))$. Tzn. $\mu = f(\lambda)$ dla pewnej liczby $\lambda \in \sigma(U)$. Wybierzmy ciąg wielomianów trygonometrycznych p_n , jednostajnie zbieżny na $\mathbb{T}$, taki, że $p_n(z) \xrightarrow{n} f(z)$ dla $z \in \sigma(U)$. Wiemy, że operator $p_n(\lambda)I - p_n(U)$ nie jest odwracalny dla $\lambda \in \sigma(U)$ (por. Twierdzenie 6.3). Ale

$$p_n(\lambda)I - p_n(U) \xrightarrow{n} f(\lambda)I - f(U)$$

w normie operatorowej. Zbiór operatorów odwracalnych jest otwarty w $B(\mathcal{H})$, więc zbiór operatorów nieodwracalnych jest domknięty. Zatem operator $f(\lambda)I - f(U)$ nie jest odwracalny. To oznacza, że $\mu = f(\lambda) \in \sigma(f(U))$. Czyli $f(\sigma(U)) \subseteq \sigma(f(U))$. $\square$

Twierdzenie 6.10. *Jeśli funkcja $f \in C(\sigma(U))$ jest nieujemna, to $f(U) \geq 0$.*

Dowód. Załóżmy, że $0 \leq f(z) \leq 2$ dla $z \in \sigma(U)$. Wtedy funkcja $g(z) = f(z) - 1$ spełnia $|g(z)| \leq 1$. Z Twierdzenia 6.8(iii), (iv) mamy $\|g(U)\| \leq 1$ oraz $g(U)^* = g(U)$. Zatem $-I \leq g(U) \leq I$. Wtedy

$$f(U) = g(U) + I \geq 0.$$

$\square$

Naszym kolejnym celem jest określenie operatora $f(U)$ dla pewnych funkcji nieciągłych f określonych na $\sigma(U)$. Na przykład niech $f(z)$ przyjmuje wartość jeden na otwartym łuku okręgu jednostkowego oraz wartość zero w pozostałych punktach okręgu. Funkcję f można uzyskać jako granicę rosnącego ciągu funkcji nieujemnych i ciągłych $f_n \in C(\mathbb{T})$. Ta własność umożliwia określenie operatora $f(U)$.

Niech f_n będzie ciągiem nieujemnych funkcji ciągłych takim, że $f_n(z) \nearrow f(z)$ dla $z \in \sigma(U)$. Załóżmy, że funkcje $f_n(z)$ są wspólnie ograniczone na $\sigma(U)$, np. przez stałą $c > 0$. Mamy $0 \leq f_n(z) \leq f_{n+1}(z) \leq c$. Zatem $0 \leq f_n(U) \leq f_{n+1}(U) \leq cI$. Ciąg operatorów $f_n(U)$ jest wtedy rosnący i ograniczony. Zatem ciąg $f_n(U)$ jest mocno (punktowo) zbieżny. Oznaczmy mocną granicę symbolem A , tzn. niech

$$Av = \lim_N f_n(U)v, \quad v \in \mathcal{H}.$$

Mocna granica A zależy tylko od funkcji f , a nie od wyboru ciągu f_n . Rzeczywiście, niech $g_n \in C(\sigma(U))$ oraz $g_n(z) \nearrow f(z)$ dla $z \in \sigma(U)$. Mamy $g_n(z) \leq c$, bo $f(z) \leq c$ dla $z \in \sigma(U)$. Zatem ciąg operatorów $g_n(U)$ jest też mocno zbieżny na podstawie wcześniejszego rozumowania dla ciągu $f_n(U)$. Niech

$$Bv = \lim_n g_n(U)v, \quad v \in \mathcal{H}.$$

Chcemy pokazać, że $A = B$. Dla liczby naturalnej k określmy funkcje

$$h_n(z) = \min\{f_n(z), g_k(z)\}, \quad z \in \sigma(U).$$

Mamy $h_n \in C(\sigma(U))$. Ponadto

$$0 \leq h_n(z) \nearrow g_k(z), \quad z \in \sigma(U).$$

Ponieważ funkcja g_k jest ciągła na zbiorze $\sigma(U)$, to z twierdzenia Diniego wnioskujemy, że $h_n \rightrightarrows g_k$, gdy $n \rightarrow \infty$. Zatem $h_n(U) \xrightarrow{n} g_k(U)$ w normie operatorowej na podstawie Twierdzenia 6.8(iv). Dalej mamy $h_n(z) \leq f_n(z)$, więc $h_n(U) \leq f_n(U)$ z Twierdzenia 6.10. Przechodząc do mocnej granicy, gdy $n \rightarrow \infty$, otrzymujemy $g_k(U) \leq A$. Następnie przechodzimy do mocnej granicy, gdy $k \rightarrow \infty$, aby otrzymać $B \leq A$.

Uwaga 6.11. *z faktu, że jeśli $0 \leq C_n \leq D_n$ oraz operatory C_n i D_n są słabo zbieżne do C i D odpowiednio, to $0 \leq C \leq D$. Rzeczywiście*

$$\langle Dv, v \rangle - \langle Cv, v \rangle = \lim_n \langle D_n v, v \rangle - \lim_n \langle C_n v, v \rangle = \lim_n \langle (D_n - C_n)v, v \rangle \geq 0.$$

Twierdzenie 6.12. *Niech f i g będą ograniczonymi funkcjami określonymi na $\sigma(U)$ będącymi granicami punktowymi rosnących ciągów nieujemnych funkcji ciągłych określonych na $\sigma(U)$. Wtedy*

- (i) $(f + g)(U) = f(U) + g(U)$.
- (ii) $(fg)(U) = f(U)g(U) = g(U)f(U)$.
- (iii) $f(U) \geq 0$.
- (iv) $\|f(U)\| = \sup_{z \in \sigma(U)} f(z)$.
- (v) *Jeśli $f \leq g$, to $f(U) \leq g(U)$.*

Dowód.

(i) Niech f_n i g_n będą ciągami nieujemnych funkcji ciągłych takimi, że $f_n(z) \nearrow f(z)$ i $g_n(z) \nearrow g(z)$ dla $z \in \sigma(U)$. Wtedy $f_n(z) + g_n(z) \nearrow f(z) + g(z)$. Zatem ciągi operatorów $f_n(U)$, $g_n(U)$ oraz $(f_n + g_n)(U)$ są zbieżne mocno do operatorów $f(U)$, $g(U)$ i $(f + g)(U)$, odpowiednio. Ponadto z Twierdzenia 6.8(i) mamy

$$\begin{aligned} (f + g)(U) &= \lim_n (f_n + g_n)(U) = \lim_n [f_n(U) + g_n(U)] \\ &= \lim_n f_n(U) + \lim_n g_n(U) = f(U) + g(U). \end{aligned}$$

(ii) Przy oznaczeniach z (i) mamy $f_n(z)g_n(z) \nearrow f(z)g(z)$. Zatem ciąg operatorów $(f_n g_n)(U)$ jest mocno zbieżny do $(fg)(U)$. Zatem z Twierdzenia 6.8(ii) otrzymujemy

$$\begin{aligned} (fg)(U) &= \lim_n (f_n g_n)(U) = \lim_b f_n(U) g_n(U) \\ &= \lim_n f_n(U) \lim_n g_n(U) = f(U)g(U). \end{aligned}$$

(iii) Przy oznaczeniach z (i) mamy $f_n(U) \geq 0$, na podstawie Twierdzenia 6.10. Zatem $f(U) \geq 0$, jako mocna granica operatorów nieujemnych $f_n(U)$.

(iv) Oznaczmy $c = \sup_{z \in \sigma(U)} f(z)$. Jeśli f_n jest ciągiem nieujemnych funkcji ciągłych na $\sigma(U)$ takim, że $f_n(z) \nearrow f(z)$ dla $z \in \sigma(U)$, to $0 \leq f_n(z) \leq c$ dla $z \in \sigma(U)$. Wtedy z Twierdzenia 6.8(iv) mamy $\|f_n(U)\| \leq c$. Stąd $\|f(U)\| \leq c$. Otrzymaliśmy $\|f(U)\| \leq \sup_{z \in \sigma(U)} f(z)$.

Ponieważ $0 \leq f_n(U) \leq f(U)$, to $\|f_n(U)\| \leq \|f(U)\|$. Zatem z Twierdzenia 6.8(iv) mamy

$$\|f(U)\| \geq \sup_{z \in \sigma(U)} f_n(z), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zatem

$$\|f(U)\| \geq \sup_n \sup_{z \in \sigma(U)} f_n(z) = \sup_{z \in \sigma(U)} f(z).$$

(v) Załóżmy, że $f \leq g$ oraz $0 \leq f_n \nearrow f$, $0 \leq h_n \nearrow g$, gdzie $f_n, h_n \in C(\sigma(U))$. Określmy $g_n = \max\{f_n, h_n\}$. Ciąg g_n jest rosnący, zbieżny punktowo do $\max\{f, g\} = g$ oraz $g_n \in C(\sigma(U))$. Zatem $g_n(U) \nearrow g(U)$ oraz $f_n(U) \nearrow f(U)$, mocno. Ponadto $f_n(U) \leq g_n(U)$, bo $f_n \leq g_n$. Nierówność przenosi się na słabe granice, czyli $f(U) \leq g(U)$. $\square$

7 Operatory śladowe

Definicja 7.1. Operator $A \in B(\mathcal{H})$ nazywamy śladowym, jeśli $\text{tr } |A| < \infty$. Rodzinę operatorów śladowych oznaczamy symbolem C_1 .

Twierdzenie 7.2. Każdy operator śladowy jest zwarty. Ponadto operator zwarty jest śladowy wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty,$$

gdzie λ_n są liczbami singularnymi operatora A . Ponadto

$$\operatorname{tr} |A| = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$$

Dowód. Dla bazy ortonormalnej $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\operatorname{tr} |A| = \sum_{n=1}^{\infty} \langle |A| \varphi_n, \varphi_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \| |A|^{1/2} \varphi_n \|^2$$

Zatem $|A|^{1/2}$ jest operatorem Hilberta-Schmidta, skąd wynika, że $|A|^{1/2}$ jest operatorem zwartym. Wtedy operator $A = U|A| = U|A|^{1/2}|A|^{1/2}$ jest też zwarty

Założmy, że operator zwarty A jest śladowy. Z twierdzenia 4.20 wiemy, że $|A|$ ma postać

$$|A|x = \sum_{n=1}^N \lambda_n \langle x, \varphi_n \rangle \varphi_n$$

dla pewnego układu ortonormalnego $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$. Niech $\{\psi_k\}_{k=1}^K$ będzie uzupełnieniem układu $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ do bazy ortonormalnej przestrzeni $\mathcal{H}$. Wtedy $|A|\varphi_n = \lambda_n \varphi_n$ oraz $|A|\psi_k = 0$, zatem

$$\operatorname{tr} |A| = \sum_{n=1}^N \langle |A| \varphi_n, \varphi_n \rangle + \sum_{k=1}^K \langle |A| \psi_k, \psi_k \rangle = \sum_{n=1}^N \lambda_n \quad (7.1)$$

Założmy, że liczby singularne operatora A spełniają $\sum \lambda_n < \infty$. Wtedy $\lambda_n \rightarrow 0$. Z zasady minimaksu wynika, że $|A|$ jest operatorem zwartym. Ze wzoru (7.1) otrzymujemy wtedy $A \in C_1$. $\square$

Twierdzenie 7.3.

- (a) Jeśli $A \in C_1$, to $\lambda A \in C_1$.
- (b) Jeśli $A \in C_1$, to $A^* \in C_1$.
- (c) Jeśli $A \in C_1$ i $B \in B(\mathcal{H})$, to $AB \in C_1$ oraz $BA \in C_1$.
- (d) Jeśli $A, B \in C_1$, to $A + B \in C_1$.

Dowód. Punkt (a) wynika, ze wzoru $|\lambda A| = |\lambda| |A|$.

Z twierdzenia 4.23

$$Ax = \sum_{n=1}^N \langle x, \varphi_n \rangle \psi_n$$

Wtedy

$$\langle x, A^*y \rangle = \langle Ax, y \rangle = \sum_{n=1}^N \langle x, \varphi_n \rangle \langle \psi_n, y \rangle = \left\langle x, \sum_{n=1}^N \lambda_n \langle y, \varphi_n \rangle \psi_n \right\rangle$$

Zatem

$$A^*y = \sum_{n=1}^N \lambda_n \langle y, \varphi_n \rangle \psi_n$$

Dalej

$$(AA^*)y = \sum_{n=1}^N \lambda_n \langle A^*y, \varphi_n \rangle \psi_n = \sum_{n=1}^N \lambda_n \langle y, A\varphi_n \rangle \psi_n = \sum_{n=1}^N \lambda_n^2 \langle y, \psi_n \rangle \psi_n$$

Otrzymujemy więc

$$|A^*|y = \sum_{n=1}^N \lambda_n \langle y, \psi_n \rangle \psi_n$$

To oznacza, że liczby singularne operatorów A i A^* są takie same. Zatem

$$\operatorname{tr} |A^*| = \operatorname{tr} |A|$$

To kończy dowód (b).

Założmy, że $B \in B(\mathcal{H})$ i $A \in C_1$. Z zasady minimaksu wynika

$$\lambda_n(BA) = \min_{\dim V=n-1} \max_{\substack{x \in V^\perp \\ \|x\|=1}} \|BAx\| \leq \|B\| \min_{\dim V=n-1} \max_{\substack{x \in V^\perp \\ \|x\|=1}} \|Ax\| = \|B\| \lambda_n(A)$$

Zatem

$$\operatorname{tr} |BA| \leq \|B\| \operatorname{tr} |A|,$$

czyli $BA \in C_1$. Dalej

$$\operatorname{tr} |AB| = \operatorname{tr} |B^*A^*| \leq \|B^*\| \operatorname{tr} |A^*| = \|B\| \operatorname{tr} |A|$$

czyli $AB \in C_1$.

Założmy, że $A, B \in C_1$. Mamy $A = U_1|A|$, $B = U_2|B|$ oraz $A + B = U_3|A + B|$. Zatem

$$|A + B| = U_3^*(A + B) = U_3^*U_1|A| + U_3^*U_2|B|$$

Stąd przy oznaczeniach $V_1 = U_3^*U_1$ i $V_2 = U_3^*U_2$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} |A + B| &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle |A + B| e_n, e_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle V_1 |A| e_n, e_n \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \langle V_2 |B| e_n, e_n \rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle |A|^{1/2} e_n, |A|^{1/2} V_1^* e_n \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \langle |B|^{1/2} e_n, |B|^{1/2} V_2^* e_n \rangle \\ &= \langle |A|^{1/2}, |A|^{1/2} V_1^* \rangle_{HS} + \langle |B|^{1/2}, |B|^{1/2} V_2^* \rangle_{HS} \\ &\leq \| |A|^{1/2} \|_{HS} \| |A|^{1/2} V_1^* \|_{HS} + \| |B|^{1/2} \|_{HS} \| |B|^{1/2} V_2^* \|_{HS} \\ &\leq \| |A|^{1/2} \|_{HS}^2 + \| |B|^{1/2} \|_{HS}^2 = \operatorname{tr} |A| + \operatorname{tr} |B| \end{aligned}$$

□

Z twierdzenia wynika, że operatory śladowe C_1 tworzą *-ideał w przestrzeni $B(\mathcal{H})$. Określmy

$$\|A\|_1 = \operatorname{tr} |A|$$

Z dowodu twierdzenia wynika, że C_1 z normą $\|\cdot\|_1$ jest przestrzenią unormowaną. Ponadto $\|A\|_1 \geq \|A\|$, bo $\lambda_1(A) = \|A\|$.

Twierdzenie 7.4. *Przestrzeń C_1 z normą $\|\cdot\|_1$ jest zupełna.*

Dowód. Niech A_k będzie ciągiem Cauchy'ego w C_1 . Wtedy

$$\sup_k \|A_k\|_1 =: M < \infty$$

Operatory A_k tworzą ciąg Cauchy'ego w $B(\mathcal{H})$. Oznaczmy $A = \lim A_k$. Wtedy A jest operatorem zwartym. Pokażemy, że

$$\lambda_n(A) = \lim_k \lambda_n(A_k)$$

Rzeczywiście, dla $\varepsilon > 0$ istnieje K takie, że dla $k > K$ i $\|x\| = 1$ mamy

$$\|Ax\| - \varepsilon < \|A_k x\| < \|Ax\| + \varepsilon$$

Z zasady minimaksu wynika, że dla $k > K$ mamy

$$\lambda_n(A_k) = \min_{\dim V=n-1} \max_{\substack{x \in V^\perp \\ \|x\|=1}} \|A_k x\| \leq \min_{\dim V=n-1} \max_{\substack{x \in V^\perp \\ \|x\|=1}} \|Ax\| + \varepsilon = \lambda_n(A) + \varepsilon$$

Podobnie

$$\lambda_n(A_k) \geq \lambda_n(A) - \varepsilon, \quad k > K$$

Zatem dla dowolnej liczby N

$$\sum_{n=1}^N \lambda_n(A) = \lim_k \sum_{n=1}^N \lambda_n(A_k) \leq \lim_k \|A_k\|_1 \leq M$$

Ponieważ N było dowolną liczbą, to

$$\|A\|_1 \leq M,$$

czyli $A \in C_1$.

Pozostaje wykazać, że $\|A_k - A\|_1 \rightarrow 0$. Dla liczby $\varepsilon > 0$ istnieje K takie, że dla $k, l > K$ zachodzi $\|A_k - A_l\| < \varepsilon$. Niech $l > K$. Wtedy

$$\lambda_n(A - A_l) = \lim_k \lambda_n(A_k - A_l)$$

Zatem

$$\sum_{n=1}^N \lambda_n(A - A_l) = \sum_{n=1}^N \lim_k \lambda_n(A_k - A_l) \leq \lim_k \|A_k - A_l\|_1 \leq \varepsilon$$

Ponieważ N jest dowolną liczbą naturalną, to

$$\|A - A_l\| \leq \varepsilon, \quad l > K$$

□

Twierdzenie 7.5. *Jeśli A i B są operatorami Hilberta-Schmidta, to AB jest operatorem śladowym. Każdy operator śladowy jest iloczynem dwu operatorów Hilberta-Schmidta.*

Dowód. Niech $A \in C_1$. Wtedy $A = U|A| = U|A|^{1/2}|A|^{1/2}$. Operator $|A|^{1/2}$ jest Hilberta-Schmidta, zatem $U|A|^{1/2}$ jest również operatorem Hilberta-Schmidta.

Założmy, że A i B są operatorami Hilberta-Schmidta. Pokażemy, że B^*A jest operatorem śladowym. Z twierdzenia 4.23 mamy

$$B^*Ax = \sum_{n=1}^N \lambda_n \langle x, \varphi_n \rangle \psi_n$$

Wtedy

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \lambda_k &= \sum_{k=1}^N \langle B^*A\varphi_k, \psi_k \rangle = \sum_{k=1}^N \langle A\varphi_k, B\psi_k \rangle \\ &\leq \sum_{k=1}^N \|A\varphi_k\| \|B\psi_k\| \leq \left(\sum_{k=1}^N \|A\varphi_k\|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^N \|B\psi_k\|^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Zatem

$$\|B^*A\|_1 \leq \|A\|_{HS} \|B\|_{HS}$$

□

Twierdzenie 7.6. Dla $A \in C_1$ oraz dowolnej bazy ortonormalnej $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ szereg

$$\sum_{n=1}^\infty \langle Ae_n, e_n \rangle$$

jest bezwzględnie zbieżny oraz suma nie zależy od wyboru bazy.

Dowód. Operator A możemy przedstawić w postaci $A = C^*B$, gdzie B i C są operatorami Hilberta-Schmidta. Wtedy

$$|\langle C^*Be_n, e_n \rangle| = |\langle Be_n, Ce_n \rangle| \leq \|Be_n\| \|Ce_n\|$$

Zatem

$$\sum_{n=1}^\infty |\langle Ae_n, e_n \rangle| \leq \sum_{n=1}^\infty \|Be_n\| \|Ce_n\| \leq \|B\|_{HS} \|C\|_{HS}$$

Ponadto

$$\sum_{n=1}^\infty \langle Ae_n, e_n \rangle = \sum_{n=1}^\infty \langle Be_n, Ce_n \rangle = \langle B, C \rangle_{HS}$$

i suma nie zależy od wyboru bazy na podstawie równości polaryzacyjnej. □

Dla operatora $A \in C_1$ określamy

$$\operatorname{tr} A = \sum_{n=1}^\infty \langle Ae_n, e_n \rangle$$

Twierdzenie 7.7. Dla $A \in C_1$ oraz $B \in B(\mathcal{H})$ lub dla $A, B \in HS$ prawdziwy jest wzór

$$\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$$

Dowód. Załóżmy, że $A, B \in HS$. Z równości

$$\langle T, T \rangle = \|T\|_{HS}^2 = \|T^*\|_{HS}^2 = \langle T^*, T^* \rangle$$

i tożsamości polaryzacyjnej wynika, że

$$\langle A, B \rangle = \langle B^*, A^* \rangle$$

Stąd

$$\operatorname{tr} B^* A = \operatorname{tr} AB^*$$

Operator $A \in C_1$ ma postać $A = A_1 A_2$, gdzie $A_1, A_2 \in HS$. Wtedy dla $B \in B(\mathcal{H})$ otrzymujemy

$$\operatorname{tr} BA = \operatorname{tr} (BA_1)A_2 = \operatorname{tr} A_2 BA_1 = \operatorname{tr} A_1 A_2 B = \operatorname{tr} AB$$

□

Wniosek 7.8. Załóżmy, że $A \geq B \geq 0$ oraz A jest operatorem Hilberta-Schmidta. Wtedy B jest operatorem Hilberta-Schmidta.

Dowód. Dla bazy ortonormalnej $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ określmy $A_n = P_n A P_n$ oraz $B_n = P_n B P_n$, gdzie P_n jest rzutem ortogonalnym na przestrzeń rozpiętą przez $\{e_k\}_{k=1}^n$. Wtedy $0 \leq B_n \leq A_n$ oraz

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \|B e_k\|^2 &= \sum_{k=1}^\infty \|B_n e_k\|^2 = \operatorname{tr} B_n^2 = \operatorname{tr} B_n^{1/2} B_n B_n^{1/2} \\ &\leq \operatorname{tr} B_n^{1/2} A_n B_n^{1/2} = \operatorname{tr} A_n B_n = \operatorname{tr} A_n^{1/2} B_n A_n^{1/2} \\ &\leq \operatorname{tr} A_n^{1/2} A_n A_n^{1/2} = \sum_{k=1}^\infty \|A_n e_k\|^2 = \sum_{k=1}^n \|A e_k\|^2 \leq \sum_{k=1}^\infty \|A e_k\|^2 \end{aligned}$$

□

Lemat 7.9. Dla operatora samosprzężonego A operatory $|A| \pm A$ są dodatnie.

Dowód. Operatory A i $|A|$ są przemienne. Operator $|A| - A$ jest samosprzężony. Zatem

$$0 \leqslant (|A| - A)^2 = 2|A|^2 - 2|A|A = 2(|A| - A)|A|$$

To oznacza, że

$$\langle (|A| - A)v, v \rangle \geqslant 0, \quad v \in \operatorname{Im} |A|$$

Ostatnia nierówność, poprzez przejście graniczne, spełniona jest dla $v \in \overline{\operatorname{Im} |A|}$. Operator $|A| - A$ zeruje się na $\ker A = \ker |A|$. Każdy element $u \in \mathcal{H}$ ma postać $u = v + w$, gdzie $w \in \ker |A|$, $v \in \overline{\operatorname{Im} |A|}$ i $v \perp w$. Zatem

$$\langle (|A| - A)u, u \rangle = \langle (|A| - A)v, v \rangle \geqslant 0$$

□

Wniosek 7.10. *Każdy operator samosprzężony A jest różnicą dwu operatorów dodatnich A_+ i A_- takich, że $A_-A_+ = 0$. Ponadto $\operatorname{Im} A_+ \perp \operatorname{Im} A_-$ oraz $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} A_+ \oplus \operatorname{Im} A_-$.*

Dowód. Określmy

$$A_+ = \frac{1}{2}(|A| + A), \quad A_- = \frac{1}{2}(|A| - A)$$

Operatory A_+ i A_- są dodatnie oraz $A = A_+ - A_-$. Dalej

$$4A_+A_- = 4A_-A_+ = (|A| + A)(|A| - A) = |A|^2 - A^2 = 0$$

Zatem

$$\operatorname{Im} A_- \subset \ker A_+ = \operatorname{Im} A_+^\perp, \quad \operatorname{Im} A_+ \subset \ker A_- = \operatorname{Im} A_-^\perp$$

Dla $x \perp \ker A_+$ otrzymujemy $x \perp \operatorname{Im} A_-$, czyli $x \in \ker A_-$. Zatem $Ax = A_+x$, czyli $\operatorname{Im} A_+ \subset \operatorname{Im} A$. Podobnie dla $x \perp \ker A_-$ mamy $x \perp \operatorname{Im} A_+$, czyli $x \in \ker A_+$ oraz $Ax = -A_-x$. Tzn. $\operatorname{Im} A_- \subset \operatorname{Im} A$.

Z rozkładu $A = A_+ - A_-$ wynika przeciwna inkluzja $\operatorname{Im} A \subset \operatorname{Im} A_- \oplus \operatorname{Im} A_+$.

□

Twierdzenie 7.11. *Jeśli dla dowolnej bazy ortonormalnej $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ operator A spełnia*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle Ae_n, e_n \rangle| < \infty$$

to A jest operatorem śladowym.

Dowód. Niech

$$A_1 = \frac{1}{2}(A + A^*), \quad A_2 = \frac{1}{2i}(A - A^*)$$

Operatory A_1 i A_2 są samosprężone oraz $A = A_1 + iA_2$. Ponadto

$$|\langle Ae_n, e_n \rangle|^2 = \langle A_1 e_n, e_n \rangle^2 + \langle A_2 e_n, e_n \rangle^2$$

Z założenia

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle A_k e_n, e_n \rangle| < \infty, \quad k = 1, 2$$

Wystarczy więc udowodnić tezę dla operatora samosprężonego A . Z Wniosku 7.10 dostajemy $A = A_+ - A_-$, gdzie $\text{Im } A_- \perp \text{Im } A_+$. Wybierzmy bazy ortonormalne $\{e_n\}$ i $\{f_n\}$ przestrzeni $\text{Im } A_-$ oraz $\text{Im } A_+$, odpowiednio. Układy te spełniają $e_k \perp f_l$. Niech $\{g_n\}$ będzie bazą przestrzeni $(\text{Im } A_-)^\perp \cap (\text{Im } A_+)^\perp = (\text{Im } A)^\perp$. Suma trzech układów ortonormalnych $\{\varphi_n\}$ jest bazą ortonormalną $\mathcal{H}$. Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \langle A_- \varphi_n, \varphi_n \rangle &= \sum \langle A_- e_n, e_n \rangle = \sum |\langle A e_n, e_n \rangle| < \infty \\ \sum_{n=1}^{\infty} \langle A_+ \varphi_n, \varphi_n \rangle &= \sum \langle A_+ f_n, f_n \rangle = \sum |\langle A f_n, f_n \rangle| < \infty \end{aligned}$$

To oznacza, że operatory $A_\pm$ są śladowe. Stąd A jest również operatorem śladowym. $\square$

Twierdzenie 7.12. *Jeśli dla pewnej bazy ortonormalnej e_n operator $A \in B(\mathcal{H})$ spełnia*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\| < \infty$$

to $A \in C_1$.

Dowód. Mamy

$$\|Ae_n\| = \| |A| e_n \| \geq \langle |A| e_n, e_n \rangle$$

Zatem $|A|$ jest śladowy, skąd wynika, że $A \in C_1$. $\square$

8 Zadania

1. Pokazać, że jeśli operator liniowy T z przestrzeni Banacha X w przestrzeń Banacha Y jest ograniczony, to T przekształca ciągi słabo zbieżne do zera w X w ciągi słabo zbieżne do zera w Y . Pokazać, że implikacja odwrotna też jest prawdziwa. W dowodzie skorzystać z twierdzenia o wykresie domkniętym.

2. Określić funkcjonały δ_n na przestrzeni ℓ^∞ wzorem

$$\delta_n(\{c_k\}_{k=1}^\infty) = c_n.$$

Pokazać, że $\{\delta_n\}$ nie zawiera podciągu zbieżnego $*$ -słabo.

3. $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ jest gęstym podzbiorem kuli jednostkowej w przestrzeni unormowanej X . W przestrzeni X^* wprowadzamy metrykę

$$d(x^*, y^*) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} |x^*(x_n) - y^*(x_n)|$$

Pokazać, że $d(\cdot, \cdot)$ jest istotnie metryką. Pokazać, że $*$ -słaba topologia w kuli jednostkowej jest równoważna topologii wyznaczonej przez metrykę $d(\cdot, \cdot)$. * Czy topologie te są równoważne na całej przestrzeni X^* ?

4. Pokazać, że jeśli ciąg elementów x_n przestrzeni Hilberta jest słabo zbieżny do x oraz $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$, to $\|x_n - x\| \rightarrow 0$. Czy można to uogólnić na przestrzenie ℓ^p dla $p > 1$?
5. $p > 1$. Pokazać, że ciąg x_n w przestrzeni ℓ^p jest słabo zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy liczby $\|x_n\|_p$ są wspólnie ograniczone oraz dla każdego m ciąg $x_n(m)$ jest zbieżny.
6. W przestrzeni ℓ^p , $p > 1$ znaleźć ciąg słabo zbieżny, ale nie zbieżny w normie przestrzeni. * Pokazać, że w ℓ^1 każdy ciąg słabo zbieżny jest też zbieżny w normie.
7. Ciąg $\{x_n\}$ elementów przestrzeni unormowanej X jest słabo zbieżny do x . Pokazać, że istnieje ciąg postaci $\{\sum_{i=1}^{m_n} \lambda_{i,n} x_i\}$ (gdzie $\lambda_{i,n} \in \mathbb{C}$) zbieżny do x w normie. **Wskazówka:** Rozważyć najmniejszą domkniętą podprzestrzeń liniową Y zawierającą $\{x_n\}$. Zauważyć, że teza zadania jest równoważna $x \in Y$. Skorzystać z faktu, że jeśli $x \notin Y$ to istnieje funkcjonal ograniczony x^* taki, że $x^*(x) = 1$ oraz $x^*(y) = 0$ dla $y \in Y$.

8. Pokazać, że jeśli ciąg x_n jest słabo zbieżny do x , to $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.
9. Pokazać, że ciąg funkcji f_n jest słabo zbieżny do f w $L^p(0, 1)$ jeśli normy $\|f_n\|_p$ są wspólnie ograniczone oraz f_n jest zbieżny do f według miary, tzn.

$$\lim_n |\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}| = 0,$$

dla dowolnego $\varepsilon > 0$. Pokazać, że odwrotna implikacja jest fałszywa.

10. Funkcja rzeczywista f na $[0, 1]$ spełnia warunek Höldera z wykładnikiem α , jeśli istnieje stała C taka, że $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha$. Określmy

$$\|f\|_\alpha = \max |f(x)| + \sup \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

Pokazać, że dla $0 < \alpha \leq 1$, zbiór funkcji spełniających $\|f\|_\alpha \leq 1$ jest zwartym podzbiorem w $C[0, 1]$.

11. Funkcje g_n są ciągłe na $[0, 1]$. Czy z ciągu funkcji

$$f_n(x) = \int_0^1 \sqrt{1 + x - y} \sin\{g_n(y^2)\} dy$$

można wybrać podciąg zbieżny ?

12. Niech $K(x, y)$ będzie funkcją ciągłą na $\mathbb{R}^2$ taką, że

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |K(x, y)|^2 dx dy < \infty.$$

Niech $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$. Rozważmy równanie całkowe

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} K(x, y)u(y)dy,$$

gdzie λ jest liczbą zespoloną. Pokazać, że równanie ma jednoznaczne rozwiązanie $u(x) \in L^2(\mathbb{R})$, jeśli λ ma odpowiednio małą wartość bezwzględną. **Wskazówka:** Do operatora

$$Tu(x) = f(x) + \lambda \int K(x, y)u(y) dy$$

na $L^2(\mathbb{R})$ zastosować twierdzenie o odwzorowaniach zwężających.

13. Podprzestrzeń Y przestrzeni unormowanej X nazywamy niezmienniczą dla operatora liniowego $T : X \rightarrow X$ jeśli $T(Y) \subset Y$. Podać przykłady podprzestrzeni niezmienniczych operatora przesunięcia S określonego na ℓ^2 wzorem

$$S(x_0, x_1, x_2, \dots) = (0, x_0, x_1, x_2, \dots).$$

14. Dla $X = C[0, 1]$ i $g \in X$ określamy operator $T : X \rightarrow X$ wzorem $Tf = gf$ (mnożenie punktowe przez funkcję g). Pokazać, że operator T jest ograniczony. Znaleźć $\sigma(T)$.
15. Rozwiązać poprzednie zadanie w przypadku, gdy $X = L^2(0, 1)$ oraz $g \in C[0, 1]$.
16. Operator $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ jest określony wzorem

$$(Tx)_n = \lambda_n x_n,$$

gdzie λ_n jest ustalonym ciągiem ograniczonym. Znaleźć $\sigma(T)$ oraz $\sigma_p(T)$.

17. Korzystając z poprzedniego zadania pokazać, że istnieje operator $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$, którego spektrum jest z góry zadany zwartym podzbiorem $K \subset \mathbb{C}$.
18. Niech $T \in B(X)$. Pokazać, że $\|R_\lambda(T)\| \rightarrow 0$, gdy $|\lambda| \rightarrow \infty$.
19. Niech $T : \ell^p \rightarrow \ell^p$, $1 \leq p \leq \infty$, będzie określony wzorem

$$T(x_0, x_1, x_2, \dots) = (x_1, x_2, x_3, \dots).$$

Znaleźć spektrum T .

20. Dla $T \in B(\mathcal{H})$ pokazać, że $\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)}$.
21. T jest ograniczonym operatorem na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Pokazać, że
- (a) T jest różnowartościowy wtedy i tylko wtedy, gdy obraz T^* jest gęsty;
 - (b) T^* jest różnowartościowy wtedy i tylko wtedy, gdy obraz T jest gęsty;

- (c) Jeśli T jest "na", to istnieje operator ograniczony $S : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ taki, że $TS = I$. Czy operator S jest jedyny? Pokazać, że istnieje operator $S_{\min}$ taki, że $TS_{\min} = I$ oraz $\|S_{\min}v\| \leq \|Sv\|$, $v \in \mathcal{H}$, dla każdego ograniczonego operatora S spełniającego $TS = I$.
- (d) T ma domknięty obraz wtedy i tylko wtedy T^* ma domknięty obraz.

22. Dla $T, S \in B(X)$ oraz $\lambda \in \varrho(S) \cap \varrho(T)$ wyprowadzić wzór

$$R_\lambda(T) - R_\lambda(S) = R_\lambda(S)(T - S)R_\lambda(T).$$

23. Obliczyć normę operatora T określonego wzorem

$$Tf(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(y) dy$$

w przestrzeni $L^2(0, 1)$. Znaleźć operator sprzężony. Pokazać, że istnieje ciąg funkcji $f_n \in L^2$ taki, że $f_n \rightarrow 0$ słabo, ale $\|Tf_n\|_2$ nie dąży do 0.
Wskazówka. Zauważyć, że

$$Tf(x) = \int_0^1 f(xy) dy.$$

Skorzystać z nierówności

$$\left(\int_0^1 \left(\int_0^1 g(x, y) dy \right)^2 dx \right)^{1/2} \leq \int_0^1 \left(\int_0^1 g(x, y)^2 dx \right)^{1/2} dy.$$

Zbadać jak zachowuje się iloraz $\|f\|_2^{-1} \|Tf\|_2$ dla $f(x) = x^a$, gdy $a \rightarrow -1/2^+$.

24. T jest operatorem na $L^2(0, +\infty)$ określonym przez

$$Tf(x) = \int_0^\infty e^{-xy} f(y) dy.$$

Dowieść, że T jest ograniczonym operatorem na L^2 i znaleźć jego normę. Obliczyć T^* i pokazać, że operator TT^* zadany jest wzorem

$$(TT^*f)(x) = \int_0^{+\infty} f(y)(x+y)^{-1} dy.$$

Wskazówka. Zauważyć, że

$$Tf(x) = \frac{1}{x} \int_0^\infty e^{-y} f\left(\frac{y}{x}\right) dy.$$

Skorzystać z nierówności

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty g(x, y) dy \right)^2 dx \right)^{1/2} \leq \int_0^\infty \left(\int_0^\infty g(x, y)^2 dx \right)^{1/2} dy.$$

Zbadać zachowanie się ilorazu $\|f\|_2^{-1} \|Tf\|_2$ dla $f(x) = x^{-1/2+\delta} e^{-\varepsilon x}$, gdy $\delta, \varepsilon \rightarrow 0^+$.

25. T jest operatorem na $L^2(0, 1)$ takim, że $\dim \operatorname{Im} T < +\infty$. Pokazać, że istnieje funkcja $K(x, y)$ z $L^2((0, 1) \times (0, 1))$ taka, że

$$Tf(x) = \int_0^1 K(x, y) f(y) dy.$$

Wskazówka. Niech $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ oraz będzie bazą ortonormalną dla $\operatorname{Im} T^*$. Pokazać, że

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^n (T\varphi_i)(x) \varphi_i(y).$$

26. Pokazać, że jeśli A nie jest samosprężony na $\mathcal{H}$, to równość

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle Ax, x \rangle|$$

nie musi zachodzić.

27. Operator T jest określony na $L^2(0, 1)$ wzorem

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(y) dy.$$

Znaleźć jawny wzór całkowy dla operatorów $(zI - T)^{-1}$, gdzie $z \neq 0$. Skorzystać z faktu, że $(zI - T)^{-1} = \sum_{n=0}^\infty z^{-(n+1)} T^n$ i ze wzoru całkowego na T^n podanego na wykładzie. Znaleźć wzór dla operatora sprzężonego T^* .

28. Ograniczony operator T na przestrzeni Banacha X spełnia warunek $p(T) = 0$, dla pewnego wielomianu $p(z) = a_n z^n + \dots + a_0$. Pokazać, że spektrum operatora T jest zawarte w zbiorze pierwiastków wielomianu $p(z)$.

29. Dla funkcji zespolonej $k(x, y)$ dwu zmiennych na $[0, 1] \times [0, 1]$ określamy operator całkowy na $L^2(0, 1)$ wzorem

$$(Kf)(x) = \int_0^1 k(x, y)f(y) dy.$$

Znaleźć wzór dla K^* .

30. Ograniczony operator P na przestrzeni Banacha X nazywamy rzutem jeśli $P^2 = P$. Pokazać, że $\text{Im} P$ jest domknięty. Znaleźć spektrum dla P . Znaleźć wzór na operatory rezolwenty $(zI - P)^{-1}$.
31. Rzut P na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ nazywamy ortogonalnym jeśli $Px \perp x - Px$ dla dowolnego $x \in \mathcal{H}$. Pokazać, że następujące trzy warunki są równoważne:

- (a) P jest ortogonalny.
- (b) $\|P\| \leq 1$.
- (c) $P^* = P$.

32. P i Q są rzutami ortogonalnymi w przestrzeni Hilberta takimi, że $PQ = QP$. Pokazać, że każdy z operatorów $I - P$, $I - Q$, PQ , $P + Q - PQ$ i $P + Q - 2PQ$ jest rzutem ortogonalnym. Opisać obrazy tych rzutów za pomocą podprzestrzeni $M = \text{Im} P$ i $N = \text{Im} Q$.
33. Podprzestrzenie V i W w przestrzeni Hilberta mają skończony wymiar oraz $\dim(W) < \dim(V)$. Pokazać, że podprzestrzeń V posiada niezerowy wektor v ortogonalny do W .
34. Dla ograniczonego ciągu liczb zespolonych $\{\lambda_n\}$ określamy operator T na przestrzeni ℓ^2 wzorem

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \lambda_3 x_3, \dots).$$

Znaleźć T^* oraz $(zI - T)^{-1}$.

35. Dla ograniczonej zespolonej funkcji ciągłej $g(x)$ na prostej określamy operator T na $L^2(\mathbb{R})$ wzorem $(Tf)(x) = g(x)f(x)$. Znaleźć spektrum operatora T i jego normę. Pokazać, że T jest operatorem normalnym. Przy jakich warunkach T jest samosprężony?

36. Pokazać, że jeśli T jest operatorem normalnym w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$, to T jest odwracalny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\|Tv\| \geq c\|v\|, \quad v \in \mathcal{H},$$

dla pewnej stałej $c > 0$.

37. Pokazać, że jeśli liczba z leży w spektrum operatora normalnego T , to liczba $|z|^2$ leży w spektrum operatora T^*T .
38. Niech $p(x, y)$ będzie wielomianem dwu zmiennych. Pokazać, że jeśli liczba z leży w spektrum operatora normalnego T , to liczba $p(z, \bar{z})$ leży w spektrum operatora $p(T, T^*)$.
39. U jest ograniczonym i odwracalnym odwzorowaniem liniowym z przestrzeni Banacha X na przestrzeń Banacha Y . T i S są operatorami ograniczonymi na przestrzeni X i Y odpowiednio, spełniającymi związek $S = UTU^{-1}$. Pokazać, że spektra operatorów S i T są równe.
40. Dla funkcji ciągłej $g(x)$ o okresie 2π określmy operator T na przestrzeni $L^2(0, 2\pi)$ wzorem

$$Tf(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x-y)f(y)dy.$$

Pokazać, że T jest operatorem ograniczonym i $\|T\| \leq (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} |g(x)|dx$.

* Znaleźć spektrum operatora T . **Wskazówka:** Rozważyć odwzorowanie $U : L^2(0, 2\pi) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$

$$(Uf)(n) = \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx.$$

Pokazać, że $(UTf)(n) = \hat{g}(n)\hat{f}(n) = \hat{g}(n)(Uf)(n)$. Wywnioskować, że UTU^{-1} jest operatorem mnożenia przez ciąg $\{\hat{g}(n)\}_{-\infty}^{\infty}$ określonym na $\ell^2(\mathbb{Z})$. Skorzystać z zadań 7 i 9.

41. Niech T będzie operatorem samosprężonym w przestrzeni Hilberta. Pokazać, że:

- (a) $\|T\| \leq 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sigma(T) \subset [-1, 1]$.
- (b) $\sigma(T) \subset [0, +\infty)$ wtedy i tylko wtedy, gdy T jest operatorem dodatnim.

Wskazówka: W (a) skorzystać z faktu, że $r(T) = \|T\|$. W (b) można założyć, że $\|T\| \leq 1$. Wtedy $\sigma(T) \subset [0, 1]$. Zatem $\sigma(2T - I) \subset [-1, 1]$. Z (a) mamy, że $\|I - 2T\| \leq 1$. To pociąga $\langle x - 2Tx, x \rangle \leq \langle x, x \rangle$, dla $x \in \mathcal{H}$.

42. Dla operatora samosprężonego T określamy

$$m = \inf\{\langle Tx, x \rangle : \|x\| = 1\} \quad M = \sup\{\langle Tx, x \rangle : \|x\| = 1\}.$$

Pokazać, że $\sigma(T) \subset [m, M]$ oraz $m, M \in \sigma(T)$. **Wskazówka:** Zauważyć, że operatory $T - mI$ oraz $MI - T$ są dodatnie.

43. Udowodnić, że jeśli ciąg $A_n \in B(\mathcal{H})$ jest słabo zbieżny, to również ciąg A_n^* jest słabo zbieżny. Pokazać, że stwierdzenie nie jest prawdziwe dla mocnej zbieżności.
44. (a) Niech $A_n, A \in B(\mathcal{H})$. Pokazać, że jeśli $A_n \geq 0$ oraz A_n jest zbieżny do A w normie operatorowej, to $A \geq 0$ oraz $\sqrt{A_n} \rightarrow \sqrt{A}$ w normie operatorowej.
- (b) Pokazać, że jeśli $A_n \geq 0$ oraz $A_n \rightarrow A$ mocno, to również $\sqrt{A_n} \rightarrow \sqrt{A}$ mocno.
- (c) Pokazać, że jeśli $A_n \rightarrow A$ w normie operatorowej, to $|A_n| \rightarrow |A|$ w normie operatorowej.
- (d) Pokazać, że jeśli $A_n \rightarrow A$ oraz $A_n^* \rightarrow A^*$ mocno, to również $|A_n| \rightarrow |A|$ mocno.
- (e) Pokazać na przykładzie, że poprzednie stwierdzenie nie jest prawdziwe dla słabej zbieżności operatorowej.
45. (a) Niech X i Y będą przestrzeniami Banacha. Pokazać, że jeśli dla $T_n \in B(X, Y)$ oraz $\{T_n x\}$ jest ciągiem Cauchy'ego dla każdego $x \in X$, to istnieje $T \in B(X, Y)$ taki, że $T_n \rightarrow T$ mocno.
- (b) Czy poprzednie stwierdzenie jest prawdziwe dla ciągów uogólnionych T_α ?
46. Niech $T_t : f(x) \mapsto f(x+t)$ będzie operatorem na $L^2(\mathbb{R})$. Znaleźć normę T_t . Do czego są zbieżne operatory T_t , gdy $t \rightarrow \infty$, i w jaki sposób? Odpowiedzieć na te same pytania dla $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2} dx)$.
47. Niech $\mathcal{H}$ będzie nieskończenie wymiarową przestrzenią Hilberta.

- (a) Pokazać, że jeśli $A_n, B_n \in B(\mathcal{H})$ są mocno zbieżne do A i B odpowiednio to $A_n B_n$ jest mocno zbieżny do AB .
- (b) Pokazać na przykładzie, że jeśli $A_n, B_n \in B(\mathcal{H})$ są słabo zbieżne do A i B odpowiednio to $A_n B_n$ nie musi być słabo zbieżny do AB .

48. Niech T będzie operatorem określonym na ℓ^p , $1 \leq p < \infty$, wzorem

$$(Tx)_n = \lambda_n x_n, \quad x \in \ell^p.$$

Pokazać, że T jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy $\lambda_n \xrightarrow{n} 0$.

49. Dla funkcji g ciągłej na $[0, 1]$ określamy operator $T : L^p(0, 1) \rightarrow L^p(0, 1)$ przez $(Tf)(x) = g(x)f(x)$. Pokazać, że T jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy $g = 0$.
50. Niech $K(x, y)$ będzie funkcją całkowalną z kwadratem na $[0, 1] \times [0, 1]$. Pokazać, że operator T określony na $L^2(0, 1)$ wzorem

$$(Tf)(x) = \int_0^1 K(x, y)f(y) dy$$

jest ograniczony i zwarty. **Wskazówka:** Wskazać bazę ortonormalną w $L^2([0, 1] \times [0, 1])$ i rozwinąć $K(x, y)$ względem tej bazy.

51. Pokazać, że jeśli $T : X \rightarrow Y$ jest zwartym operatorem liniowym pomiędzy przestrzeniami Banacha X i Y , to T nie może być "na" chyba, że przestrzeń Y ma skończony wymiar.
52. Pokazać, że rodzina zwartych operatorów liniowych z przestrzeni Banacha X w przestrzeń Banacha Y tworzy domkniętą podprzestrzeń liniową w $B(X, Y)$.
53. T jest zwartym operatorem z przestrzeni Banacha X w przestrzeń Banacha Y . Pokazać, że jeśli obraz operatora zwartego $T(X)$ jest przestrzenią nieskończonego wymiaru, to obraz ten nie jest domknięty w Y .
54. Pokazać, że obraz operatora zwartego $T : X \rightarrow Y$ jest przestrzenią ośrodkową. **Wskazówka:** W zupełnej przestrzeni metrycznej podzbiór jest warunkowo zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest całkowicie ograniczony.

55. W przestrzeni ℓ^2 określamy operator T wzorem

$$(Tx)(n) = \begin{cases} 0, & \text{dla } n = 0, \\ \frac{1}{n} x_{n-1}, & \text{dla } n \geq 1. \end{cases}$$

Pokazać, że T jest zwarty. Obliczyć $\|T^n\|$ oraz promień spektralny.

56. Niech a_i, b_i będą elementami przestrzeni $L^2(0, 1)$ dla $i = 1, 2, \dots, n$. Niech $K(x, y) = \sum_{i=1}^n a_i(x)b_i(y)$. Określmy operator T na $L^2(0, 1)$ wzorem

$$(Tf)(x) = \int_0^1 K(x, y)f(y) dy.$$

Niech $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$. Pokazać, że dla dowolnej ustalonej funkcji $g \in L^2(0, 1)$ równanie $Tf - \lambda f = g$ ma jednoznaczne rozwiązanie $f \in L^2(0, 1)$, albo dla niektórych g równanie ma nieskończenie rozwiązań, a dla pozostałych g , nie ma ich wcale.

57. Niech

$$K(x, y) = \begin{cases} (1-x)y & \text{dla } 0 \leq y \leq x \leq 1, \\ (1-y)x & \text{dla } 0 \leq x \leq y \leq 1. \end{cases}$$

Określamy operator T na $L^2(0, 1)$ wzorem

$$(Tf)(x) = \int_0^1 K(x, y)f(y) dy.$$

Pokazać, że wartościami własnymi T są liczby $(n\pi)^{-2}$, $n = 1, 2, \dots$, przy czym odpowiadająca podprzestrzeń własna jest jednowymiarowa. **Wskazówka:** Pokazać, że jeśli funkcja f spełnia $Tf = \lambda f$ dla $\lambda \neq 0$, to f jest klasy C^∞ i spełnia równanie $\lambda f'' + f = 0$ z warunkami $f(0) = f(1) = 0$. Przypadek $\lambda = 0$ rozpatrzeć oddzielnie. Zbadać rozwiązalność względem f równania $Tf - \lambda f = g$ dla $g(x) = \sum_{n=1}^\infty c_n \sin \pi x$.

*58. Niech A, B będą operatorami ograniczonymi na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ oraz $\text{Im } A \subset \text{Im } B$. Pokazać, że jeśli B jest zwarty, to A też jest zwarty.

59. Niech $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ będzie bazą ortonormalną w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Pokazać, że operator T jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\limsup_n \{\|Tx\| : \|x\| = 1, x \perp e_1, e_2, \dots, e_n\} = 0.$$

60. Pokazać, że jeśli T jest zwartym operatorem w przestrzeni Hilberta, to równanie $Tx = x$ ma niezerowe rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy równanie $T^*x = x$ ma niezerowe rozwiązanie. Pokazać, że obie przestrzenie rozwiązań mają ten sam wymiar.
61. Niech T będzie zwartym operatorem na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Pokazać, że dla dowolnej niezerowej wartości własnej λ operatora T każda z podprzestrzeni $\ker(\lambda I - T)^n$ ma skończony wymiar, oraz wymiary te są wspólnie ograniczone przez liczbę zależną tylko od λ .
62. Operator $A \geq 0$ jest zwarty. Pokazać, że $A^{1/2}$ też jest zwarty. Pokazać, że jeśli $0 \leq B \leq A$, to również B jest zwarty.
63. $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ jest bazą ortonormalną w $\mathcal{H}$. Dla operatora dodatniego $A \in B(\mathcal{H})$ określamy ślad wzorem

$$\operatorname{tr} A = \sum_{n=1}^{\infty} \langle A\varphi_n, \varphi_n \rangle.$$

Pokazać, że $\operatorname{tr} A$ nie zależy od wyboru bazy ortonormalnej. Udowodnić, że

- (a) $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$.
 - (b) $\operatorname{tr}(\lambda A) = \lambda \operatorname{tr} A$, $\lambda \geq 0$.
 - (c) $\operatorname{tr}(UAU^{-1}) = \operatorname{tr} A$ dla dowolnego operatora unitarnego U .
 - (d) Jeśli $0 \leq A \leq B$, to $\operatorname{tr} A \leq \operatorname{tr} B$.
64. Operator $A \in B(\mathcal{H})$ nazywamy operatorem śladowym jeśli $\operatorname{tr} |A| < \infty$. Rodzinę operatorów śladowych oznaczamy symbolem C_1 . Pokazać, że
- (a) Jeśli $A \in C_1$, to $\lambda A \in C_1$.
 - (b) Jeśli $A \in C_1$, to $A^* \in C_1$.
 - (c) Jeśli $A \in C_1$ i $B \in B(\mathcal{H})$, to $AB \in C_1$ oraz $BA \in C_1$. Wskazówka: Wykorzystać zasadę minimaksu.
 - (d) Jeśli $A, B \in C_1$, to $A + B \in C_1$. Wskazówka: Użyć rozkładu polarnego dla operatorów A , B i $A + B$.

65. Pokazać, że każdy operator śladowy jest zwarty. Wykazać, że operator zwarty A jest śladowy wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum \lambda_n < \infty$, gdzie λ_n jest ciągiem liczb singularnych operatora A .
66. Pokazać, że funkcja $\|A\|_1 = \operatorname{tr}|A|$ jest normą na C_1 . Pokazać, że C_1 z normą $\|\cdot\|_1$ jest przestrzenią Banacha.
67. Niech C_2 oznacza rodzinę operatorów Hilberta-Schmidta. Pokazać, że jeśli $A, B \in C_2$, to $AB \in C_1$. Pokazać, że każdy operator śladowy jest iloczynem dwu operatorów Hilberta-Schmidta.
68. Pokazać, że dla $A \in C_1$ i dowolnej bazy ortonormalnej $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ szereg $\sum_{n=1}^\infty \langle A\varphi_n, \varphi_n \rangle$ jest zbieżny i jego suma nie zależy od wyboru bazy. Określmy $\operatorname{tr} A = \sum_{n=1}^\infty \langle A\varphi_n, \varphi_n \rangle$. Pokazać, że $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$, gdzie $A \in C_1$ i $B \in B(\mathcal{H})$ lub $A, B \in C_2$.
69. Pokazać, że jeśli $A \in C_1$, to $\sum_{n=1}^\infty |\langle A\varphi_n, \varphi_n \rangle| < \infty$ dla dowolnej bazy ortonormalnej. Czy prawdziwa jest implikacja odwrotna? Pokazać, że jeśli $\sum_{n=1}^\infty \|A\varphi_n\|$ dla pewnej bazy ortonormalnej, to $A \in C_1$.
- *70. P i Q są rzutami ortogonalnymi w przestrzeni Hilberta takimi, że $P - Q$ jest operatorem śladowym. Pokazać, że $\operatorname{tr}(P - Q)$ jest liczbą całkowitą. Wskazówka: P i Q są przemienne z $(P - Q)^2$.

Literatura

- [1] N. I. Akhiezer, I. M. Glazman, *Teoriia lineinykh operatorov v gilbertovom prostranstve I*, Kharkov, Vyshcha shkola, 1977-78 (ros.); *Theory of Linear Operators in Hilbert Space*, New York, Dover, 1993 (ang.).
- [2] N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear Operators, Spectral Theory, Self Adjoint Operators in Hilbert Space, Part 2*, New York, Wiley, 1988.
- [3] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, New York, Wiley 1989.

- [4] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics: Functional Analysis*, New York, Academic Press 1972.
- [5] R. Szwarc, *Analiza funkcjonalna I*,
<http://www.math.uni.wroc.pl/~szwarc/pdf/anfun2007/analiza-funkcjonalna1.pdf>.