0. Zadania z analizy funkcjonalnej

1. Pokazać, że dla macierzy T mamy $p(T) = 0$, jeśli $p(x)$ jest wielomianem charakterystycznym macierzy T.[1]

2. Dla macierzy T wielomianem minimalnym nazywamy wielomian najniższego stopnia $q(x)$, którego współczynnik przy najwyższej potędze jest równy 1 oraz $q(T) = 0$. Pokazać, że wielomian charakterystyczny jest podzielny przez wielomian minimalny. Pokazać, że jeśli $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ są wszystkimi wartościami własnymi macierzy T, to wielomian minimalny jest podzielny przez

$$(x - \lambda_1) \ldots (x - \lambda_k). \tag{$\star$}$$

3. Pokazać, że wartości własne macierzy hermitowskiej są rzeczywiste.

4. Udowodnić, że dla macierzy hermitowskiej T wielomian minimalny ma postać $(\star)$. Pokazać, że macierz $q_i(T)$, gdzie

$$q_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}$$

jest rzutem na podprzestrzeń wektorów własnych odpowiadających wartości własnej λ_i.

5. Niech T będzie macierzą hermitowską. Pokazać, że jeśli macierz S jest przemienna ze wszystkimi macierzami przemiennymi z T, to S jest postaci $p(T)$ dla pewnego wielomianu $p(x)$.

6. Dla liczb rzeczywistych $b_1,\ b_2, \ldots$ i liczb dodatnich $a_1,\ a_2, \ldots$ rozważamy macierze

$$A_n = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & b_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & b_3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b_{n-1} & a_{n-1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{n-1} & b_n \end{pmatrix}.$$

[1] Można wykorzystać postać Jordana macierzy T.

Pokazać, że macierz A_n ma n różnych rzeczywistych wartości własnych. Pokazać, że pomiędzy dwoma kolejnymi wartościami własnymi macierzy A_n znajduje się jedna wartość własna macierzy A_{n-1}.