

10. Zadania z analizy funkcjonalnej
do wykładu R. Szwarca

1. T jest ograniczonym operatorem na przestrzeni Hilberta. Pokazać, że

$$(\ker T)^\perp = \operatorname{im} T^*, \quad (\operatorname{im} T)^\perp = \ker T^*.$$

2. T jest ograniczonym operatorem na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Pokazać, że

- (a) T jest różnowartościowy wtedy i tylko wtedy, gdy obraz T^* jest gęsty;
- (b) T^* jest różnowartościowy wtedy i tylko wtedy, gdy obraz T jest gęsty;
- (c) Jeśli T jest "na", to istnieje $S : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ taki, że $TS = I$.
- (d) T ma domknięty obraz wtedy i tylko wtedy T^* ma domknięty obraz.

3. Pokazać, że jeśli $A^* = A$, to

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|.$$

Wskazówka. Skorzystać z

$$(Ax, y) = \frac{1}{4}[(A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y)].$$

4. Obliczyć normę operatora T określonego wzorem

$$Tf(x) = \frac{1}{x} \int_0^1 f(y) dy$$

w przestrzeni $L^2(0, 1)$. Znaleźć operator sprzężony. Pokazać, że istnieje ciąg funkcji $f_n \in L^2$ taki, że $f_n \rightarrow 0$ słabo, ale $\|Tf_n\|_2$ nie dąży do 0. Wskazówka. Zauważyć, że

$$Tf(x) = \int_0^1 f(xy) dy.$$

Skorzystać z nierówności

$$\left(\int_0^1 \left(\int_0^1 g(x, y) dy \right)^2 dx \right)^{1/2} \leq \left(\int_0^1 \int_0^1 g(x, y)^2 dx dy \right)^{1/2}.$$

Zbadać jak zachowuje się gdy $a \rightarrow -1/2^+$.

5. T jest operatorem na L^2

$$Tf(x) =$$

Dowieść, że T jest ograniczony i obliczyć jego normę. Obliczyć T^* i podać wzór jest wzorem

$$(TT^*f)(x) =$$

Wskazówka. Zauważyć, że

$$Tf(x) =$$

Skorzystać z nierówności

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty g(x, y) dy \right)^2 dx \right)^{1/2} \leq \left(\int_0^\infty \int_0^\infty g(x, y)^2 dx dy \right)^{1/2}.$$

Zbadać zachowanie się $x^{-1/2+\delta}e^{-\varepsilon x}$, gdy $\delta, \varepsilon \rightarrow 0$

6. T jest operatorem na L^2 . Pokazać, że istnieje funkcja g taka, że

$$Tf(x) =$$

Wskazówka. Niech $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ oraz będzie bazą ortonormalną dla $(\operatorname{im} T^*)$. Pokazać, że

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^n (T\varphi_i)(x) \varphi_i(y).$$