

Analiza funkcjonalna III

Ryszard Szwarc*

Spis treści

1	Algebry Banacha	1
2	Teoria Gelfanda	10
3	Rachunek symboliczny w algebrze Banacha	18
4	C*-algebry	27
5	Operatory nieograniczone na przestrzeni Hilberta	31
6	Rozkład spektralny operatora unitarnego	40

1 Algebry Banacha

Definicja 1.1. *Algebrą nazywamy przestrzeń liniową nad $\mathbb{C}$ z mnożeniem. Mnożenie jest rozdzielne względem dodawania (obustronnie) oraz*

$$\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y), \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

Definicja 1.2. *Algebrą unormowaną nazywamy algebrę z normą spełniającą warunek **podmultiplikatywności***

$$\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$$

*Jeśli algebra jest zupełna, to nazywamy ją **algebrą Banacha**.*

*Wykład opracowany na podstawie notatek Wiktora Malinowskiego

Przykłady(a) $C[0, 1]$

$$\|f\|_\infty = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|, \quad (fg)(x) = f(x)g(x)$$

tzn. mnożenie jest punktowe. Przedział $[0, 1]$ można zastąpić zwartą przestrzenią topologiczną.

(b)

$$C_0(\mathbb{R}) = \{f \in C(\mathbb{R}) : \lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0\}, \quad \|f\|_\infty = \max |f(x)|$$

(c) $B(\mathcal{H})$ przestrzeń operatorów ograniczonych na przestrzeni Hilberta z normą operatorową: $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$

Definicja 1.3. Algebrę nazywamy przemienne, jeśli mnożenie jest przemienne. Element e w algebrze A nazywamy jednością, jeśli

$$ea = ae = a, \quad a \in A$$

Twierdzenie 1.4. Każdą algebrę unormowaną (algebrę Banacha) można rozszerzyć do algebry unormowanej (algebry Banacha) z jednością.

Dowód. Niech A będzie algebrą Banacha bez jedności. Określmy mnożenie w przestrzeni liniowej $\tilde{A} = A \oplus \mathbb{C}$ wzorem

$$(a \oplus \lambda)(b \oplus \mu) = (ab + \lambda b + \mu a) \oplus \lambda\mu$$

Określamy normę $\|a \oplus \lambda\| = \|a\| + |\lambda|$. Wtedy element $0 \oplus 1$ jest jednością w $\tilde{A}$, bo

$$(0 \oplus 1)(a \oplus \lambda) = a \oplus \lambda = (a \oplus \lambda)(0 \oplus 1)$$

Norma jest podmultiplikatywna, bo

$$\begin{aligned} \|(a \oplus \lambda)(b \oplus \mu)\| &= \|ab + \lambda b + \mu a\| + |\lambda\mu| \\ &\leq \|a\| \|b\| + |\lambda| \|b\| + |\mu| \|a\| + |\lambda| |\mu| \\ &= (\|a\| + |\lambda|)(\|b\| + |\mu|) = \|a \oplus \lambda\| \|b \oplus \mu\| \end{aligned}$$

Jeśli A jest zupełna, to również $\tilde{A}$ jest zupełna. □

Przykłady

- (a) c_0 - przestrzeń ciągów o wyrazach zespolonych zbieżnych do 0, z normą $\|x\| = \sup_n |x_n|$. Wtedy

$$\tilde{c}_0 = c = \{x : \lim_n x_n \text{ istnieje}\}$$

- (b) $C_0(\mathbb{R})$. Wtedy

$$\widetilde{C_0(\mathbb{R})} = \{f \in C(\mathbb{R}) : \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)\}$$

W obu przykładach normy w $\tilde{A}$ są równoważne normom $\|\cdot\|_\infty$.

Jeśli $A \neq \{0\}$ jest algebrą Banacha z jednością e , to $e \neq 0$ oraz

$$\|e\| = \|e \cdot e\| \leq \|e\| \|e\|$$

zatem $\|e\| \geq 1$.

Odtąd nie będziemy rozważać algebr zerowych $A = \{0\}$.

Twierdzenie 1.5. *Dla algebry Banacha z jednością istnieje norma na A równoważna normie wyjściowej, dla której norma jedności wynosi 1.*

Dowód. Dla $x \in A$ rozważamy odwzorowanie $L_x : A \rightarrow A$ określone wzorem $L_x y = xy$. Wtedy L_x jest operatorem liniowym na A oraz

$$\|L_x y\| = \|xy\| \leq \|x\| \|y\|$$

Zatem L_x jest operatorem ograniczonym. Mamy

$$\|x\| = \|L_x e\| \leq \|L_x\| \|e\|$$

Zatem $\|L_x\| \geq \|e\|^{-1} \|x\|$. Tzn.

$$\|e\|^{-1} \|x\| \leq \|L_x\| \leq \|x\| \quad (1.1)$$

Określmy $\|x\|' := \|L_x\|$. Wzór określa normę. Sprawdzimy podaddytywność i podmultiplikatywność.

$$\begin{aligned} \|x + y\|' &= \|L_{x+y}\| = \|L_x + L_y\| \leq \|L_x\| + \|L_y\| = \|x\|' + \|y\|' \\ \|xy\|' &= \|L_{xy}\| = \|L_x L_y\| \leq \|L_x\| \|L_y\| = \|x\|' \|y\|' \end{aligned}$$

Ponadto $\|e\|' = \|L_e\| = \|I\| = 1$. Na podstawie (1.1) normy $\|\cdot\|'$ oraz $\|\cdot\|$ są równoważne. $\square$

Przykłady

- (a)
- $A = \{f \in C(\mathbb{D}) : f \text{ – holomorficzna w } \text{int } D\},$

$$\|f\| = \max\{|f(z)| : |z| = 1\}$$

A nazywamy algebrą dyskową. Funkcja stała równa 1 jest jednością.

- (b)
- $A = \ell^1(\mathbb{Z})$
- . Dla
- $a = \{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$
- mamy
- $\|a\| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|$
- . Określamy mnożenie (splot) wzorem

$$c = a * b, \quad c_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k b_{n-k}$$

Współczynniki c_n są dobrze określone bo ciąg b_n jest ograniczony. Mnożenie jest przemienne. Reguła mnożenia powstała poprzez analogię z mnożeniem szeregów Laurenta w 0.

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n \right) = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n \right), \quad c_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k b_{n-k}$$

Sprawdzamy podmultiplikatywność normy.

$$\begin{aligned} \|c\| &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k b_{n-k} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k| |b_{n-k}| \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k| \sum_{n=-\infty}^{\infty} |b_{n-k}| = \|a\| \|b\| \end{aligned}$$

czyli $\|a * b\| \leq \|a\| \|b\|$. Ciąg $e = \delta_0(n)$ jest jednością.

Definicja 1.6. W algebrze A z jednością e element x nazywamy odwracalnym jeśli istnieje element $y \in A$ spełniający $xy = yx = e$. Element y nazywamy odwrotnym do x i oznaczamy symbolem x^{-1} .

Element odwrotny do x , o ile istnieje, jest jedyny.

Symbolem $\mathcal{G}(A)$ oznaczamy grupę elementów odwracalnych w algebrze Banacha A .

Twierdzenie 1.7. Dla algebry Banacha z jednością $\mathcal{G}(A)$ jest otwartym podzbiorem w A . Ponadto odwzorowanie $x \mapsto x^{-1}$ z $\mathcal{G}(A)$ w siebie jest ciągle.

Dowód. Dla $y \neq 0$ określamy $y^0 = e$. Jeśli $\|y\| < 1$, to element $e - y$ jest odwracalny, bo

$$(e - y) \sum_{n=0}^{\infty} y^n = \sum_{n=0}^{\infty} y^n (e - y) = \sum_{n=0}^{\infty} y^n - \sum_{n=1}^{\infty} y^n = e$$

Zatem jeśli $\|e - x\| < 1$ to element x jest odwracalny, bo $x = e - y$ dla $y = e - x$.

$$\|x^{-1}\| = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} y^n \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|y\|^n = \frac{1}{1 - \|y\|} = \frac{1}{1 - \|e - x\|}$$

Założmy, że $x_0 \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$. Dla $x \in A$ mamy $x = x_0(x_0^{-1}x)$. Wystarczy pokazać, że $x_0^{-1}x$ jest odwracalny jeśli x jest dostatecznie blisko x_0 . Mamy

$$\|e - x_0^{-1}x\| = \|x_0^{-1}(x_0 - x)\| \leq \|x_0^{-1}\| \|x - x_0\|$$

Jeśli $\|x - x_0\| < \|x_0^{-1}\|^{-1}$, to element $x_0^{-1}x$ jest odwracalny, co kończy dowód otwartości. Ponadto $x^{-1} = (x_0^{-1}x)^{-1}x_0^{-1}$. Przy założeniu $\|x - x_0\| < \|x_0^{-1}\|^{-1}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \|x^{-1}\| &= \|(x_0^{-1}x)^{-1}x_0^{-1}\| \leq \|x_0^{-1}\| \|(x_0^{-1}x)^{-1}\| \\ &\leq \frac{\|x_0^{-1}\|}{1 - \|e - x_0^{-1}x\|} \leq \frac{\|x_0^{-1}\|}{1 - \|x_0^{-1}\| \|x - x_0\|} \end{aligned}$$

Sprawdzamy ciągłość. Niech $x, x_0 \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$. Wtedy

$$\begin{aligned} \|x^{-1} - x_0^{-1}\| &= \|x^{-1}(x_0 - x)x_0^{-1}\| \leq \|x^{-1}\| \|x_0^{-1}\| \|x - x_0\| \\ &\leq \frac{\|x_0^{-1}\|^2}{1 - \|x_0^{-1}\| \|x - x_0\|} \|x - x_0\| \end{aligned}$$

□

Definicja 1.8. Dla elementu $x \in A$ określamy spektrum

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda e - x \text{ jest nieodwracalny}\}$$

Zbiorem rezolwenty dla x oznaczamy $\varrho(x) = \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$, czyli

$$\varrho(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda e - x \text{ jest odwracalny}\}$$

Przykłady

- (a) $A = M_n(\mathbb{C})$ - macierze kwadratowe wymiaru $n \times n$ z normą operatorową na $\mathbb{C}^n$, z normą euklidesową. Wtedy

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(\lambda I - A) = 0\}$$

czyli $\sigma(A)$ jest zbiorem wartości własnych.

- (b) $A = C[0, 1]$. Dla $f \in C[0, 1]$ mamy

$$\varrho(f) = \{\lambda \in \mathbb{C} : f(x) \neq \lambda, 0 \leq x \leq 1\} = \mathbb{C} \setminus f([0, 1])$$

- (c) Algebra dyskowa $A(\mathbb{D})$. Dla $f \in A(\mathbb{D})$ zachodzi $\sigma(f) = f(\mathbb{D})$.

Twierdzenie 1.9.

- (a) Dla elementu x algebry Banacha z jednością istnieje granica $\lim_n \|x^n\|^{1/n}$ oraz

$$\inf_n \|x^n\|^{1/n} = \lim_n \|x^n\|^{1/n} = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}$$

- (b) $\sigma(x)$ jest zwartym i niepustym podzbiorem w $\mathbb{C}$.

Dowód. Dowód można przeprowadzić podobnie jak dla przestrzeni $B(X)$, gdzie X jest przestrzenią Banacha. $\square$

Zauważmy, że $\sigma(x) \subset \{\lambda : |\lambda| \leq \|x\|\}$. Istotnie dla $|\lambda| > \|x\|$ mamy $|\lambda^{-1}x| < 1$, więc element

$$\lambda e - x = \lambda(e - \lambda^{-1}x)$$

jest odwracalny.

Twierdzenie 1.10. Dla dowolnych elementów x, y algebry Banacha z jednością mamy

$$\sigma(xy) \cup \{0\} = \sigma(yx) \cup \{0\}$$

Uwaga. Wzór $\sigma(xy) = \sigma(yx)$ nie musi być spełniony. Na przykład rozważmy operator $S : \ell^2(\mathbb{N}_0) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N}_0)$ określony wzorem

$$S(x_0, x_1, \dots) = (x_1, x_2, \dots)$$

Wtedy

$$S^*(x_0, x_1, \dots) = (0, x_0, x_1, \dots)$$

Mamy $SS^* = I$ ale S^*S jest rzutem na $\delta_0^\perp$. Zatem $\sigma(SS^*) = \{1\}$, $\sigma(S^*S) = \{0, 1\}$.

Dowód. Rozważmy liczbę niezerową $\lambda \notin \sigma(xy)$. Chcemy pokazać, że $\lambda \notin \sigma(yx)$. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $\lambda = 1$. Chcemy znaleźć wzór na $(e - yx)^{-1}$ za pomocą $(e - xy)^{-1}$. Nieformalnie mamy

$$(e - yx)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (yx)^n = e + y \left[\sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n \right] x = e + y(e - xy)^{-1}x$$

Sprawdźmy, że faktycznie element $e + y(e - xy)^{-1}x$ jest odwrotny do $e - yx$.

$$\begin{aligned} (e - yx)[e + y(e - xy)^{-1}x] &= e - yx + y(e - xy)^{-1}x - yxy(e - xy)^{-1}x \\ &= e - yx + y[(e - xy)^{-1} - xy(e - xy)^{-1}]x = e - yx + x(e - xy)(e - xy)^{-1}x = e \end{aligned}$$

□

Wniosek 1.11. *Nie istnieją elementy $x, y \in A$ spełniające $xy - yx = e$.*

Dowód. Załóżmy, że $xy - yx = e$. Wtedy

$$\sigma(xy) = \sigma(yx + e) = \sigma(yx) + 1$$

Stąd

$$[\sigma(yx) + 1] \cup \{0\} = \sigma(xy) \cup \{0\} = \sigma(yx) \cup \{0\}$$

Oznaczmy $C = \sigma(yx)$. Zbiór C jest niepusty, ograniczony i spełnia $(C + 1) \cup \{0\} = C \cup \{0\}$. Otrzymujemy sprzeczność. Rzeczywiście jeśli C zawiera liczbę niecałkowitą c lub nieujemną liczbę całkowitą, to $c + n \in C$ dla wszystkich n . Zatem C jest skończonym podzbiorem ujemnych liczb całkowitych. Niech c oznacza najmniejszą z nich. Wtedy najmniejszą liczbą w $C + 1$ jest liczba $c + 1$, co prowadzi do sprzeczności. □

Przykład Dla przestrzeni funkcji różniczkowalnych w przedziale $[0, 1]$ mamy

$$\frac{d}{dt}(tf) - t\frac{d}{dt}f = f$$

Zatem operatory $(Mf)(t) = tf(t)$ oraz $Df = df/dt$ spełniają $DM - MD = I$.

Twierdzenie 1.12 (Gelfand-Mazur). *Jeśli algebra Banacha A jest pierścieniem z dzieleniem, tzn. każdy niezerowy element jest odwracalny, to A jest izomorficzna z $\mathbb{C}$.*

Dowód. Załóżmy, że A jest ciałem. Dla $a \in A$ mamy $\sigma(a) \neq \emptyset$. Niech $\lambda \in \sigma(a)$. Tzn. element $\lambda e - a$ jest nieodwracalny. Stąd $\lambda e - a = 0$, czyli $a = \lambda e$. Zatem $A = \mathbb{C}e$. $\square$

Uwaga Rozważmy algebrę A , która jest przestrzenią nad ciałem liczb rzeczywistych. Rozważamy kompleksyfikację $\tilde{A} = A \oplus A$ zadaną poprzez mnożenie

$$(x + yi)(x' + y'i) = (xx' - yy') \oplus (xy' + x'y)i$$

Wtedy $\tilde{A}$ jest algebrą zespoloną, poprzez określenie

$$(0 \oplus i)(x' \oplus y'i) = (-y') \oplus xi$$

Dla każdego element $x \in A$ jego spektrum w $\tilde{A}$ jest niepuste, tzn. element $x - (a + bi)e$ jest nieodwracalny dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$. Wtedy element

$$(x - a)^2 + b^2 e = [x - (a + bi)e][x + (a + bi)e]$$

jest nieodwracalny. Zatem

$$(x - a)^2 + b^2 e = 0$$

Jeśli $b = 0$, to $x = a$. W przeciwnym wypadku

$$\frac{x - ae^2}{b} + e = 0$$

Równanie $x^2 + e = 0$ ma dwa rozwiązania. Rzeczywiście, jeśli $x^2 + e = y^2 + e = 0$, to

$$(x - y)(x + y) = 0$$

W ostatnim wzorze wykorzystaliśmy przemienność algebry. Uzyskujemy $x = y$ lub $x = -y$. Oznaczmy symbolem f jedno z tych rozwiązań. Wtedy

$$\frac{x - ae}{b} = \pm f$$

stąd $x = ae \pm bf$. Zatem $A \cong \mathbb{C}$, albo $A \equiv \mathbb{R}$, o ile $b = 0$ dla każdego elementu $x \in A$.

Definicja 1.13. Podprzestrzeń I w algebrze A nazywamy prawostronnym (odpowiednio lewostronnym) ideałem, jeśli $ab \in I$ (odpowiednio $ba \in I$) dla wszystkich $a \in A$ oraz $b \in I$. Podprzestrzeń nazywamy ideałem dwustronnym, jeśli jest ideałem zarówno prawo jak i lewostronnym.

Przykłady

- (a) Dla algebry dyskowej podprzestrzeń

$$I = \{f \in A(D) : f(0) = 0\}$$

jest ideałem dwustronnym.

- (b) W algebrze
- $B(\mathcal{H})$
- operatory zwarte, operatory Hilberta-Schmidta oraz operatory śladowe są ideałami dwustronnymi.

- (c) Dla algebry
- $A = \ell^1(\mathbb{Z})$
- podprzestrzeń

$$I = \left\{ (a_n) : \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n = 0 \right\}$$

jest ideałem dwustronnym. Rzeczywiście, teza wynika ze wzoru

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (a * b)_n = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \right)$$

Twierdzenie 1.14. *Niech A będzie algebrą Banacha (niekoniecznie z jednością) oraz I domkniętym ideałem dwustronnym w A . Wtedy algebra ilorazowa A/I jest algebrą Banacha z normą*

$$\|[a]\| = \inf_{u \in I} \|a + u\|$$

Jeśli A posiada jedność e oraz $I \subsetneq A$, to $[e]$ jest jednością w A/I oraz $\|[e]\| = 1$ o ile $\|e\| = 1$.

Dowód. Z kursu Analizy Funkcjonalnej 1 wiemy, że A/I jest przestrzenią Banacha z normą określoną w treści twierdzenia. Z kursy z algebry wiadomo, że A jest algebrą z działaniami

$$[a] + [b] = [a + b], \quad [a] \cdot [b] = [a \cdot b], \quad \lambda[a] = [\lambda a]$$

Pozostaje sprawdzić podmultiplikatywność normy. Mamy

$$\begin{aligned} \|[a][b]\| &= \|[ab]\| = \inf_{u \in I} \|ab + u\| \leq \inf_{v, w \in I} \|ab + av + bv + vw\| \\ &= \inf_{v, w \in I} \|(a + v)(b + w)\| \leq \inf_{v, w \in I} \|a + v\| \|b + w\| = \|[a]\| \|[b]\| \end{aligned}$$

Z kursu algebry wiadomo, że jeśli e jest jednością w A , $I \subsetneq A$, to $[e]$ jest jednością w A/I oraz $[e] \neq 0$. Mamy $\|[e]\| = \inf_{u \in I} \|e + u\| \leq \|e\| = 1$. Ale $\|[e]\| \geq 1$, zatem $\|[e]\| = 1$. $\square$

2 Teoria Gelfanda

Definicja 2.1. *Ideal I (lewo, prawo-, dwustronny) nazywamy maksymalnym, jeśli I jest właściwym podzbiorem A oraz nie istnieje ideal J (lewo, prawo-, dwustronny) taki, że $I \subsetneq J \subsetneq A$.*

Twierdzenie 2.2. *Każdy ideal maksymalny w algebrze Banacha z jednością jest domknięty.*

Dowód. Załóżmy, że I jest ideałem maksymalnym. Wtedy $I \cap \mathcal{G}(A) = \emptyset$, czyli $I \subset A \setminus \mathcal{G}(A)$. Ponieważ drugi zbiór jest domknięty, to $I \subset \bar{I} \subset A \setminus \mathcal{G}(A)$. Zbiór $\bar{I}$ jest ideałem, więc z maksymalności otrzymujemy $\bar{I} = I$. $\square$

Definicja 2.3. *Funkcję $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ nazywamy homomorfizmem algebry A w algebrę $\mathbb{C}$ jeśli φ jest funkcjonałem liniowym oraz $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.*

Uwaga. Dla homomorfizmu $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ zbiór $\ker \varphi = \{a \in A : \varphi(a) = 0\}$ jest ideałem dwustronnym. Rzeczywiście, jeśli $\varphi(a) = 0$, to

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = 0, \quad \varphi(ba) = \varphi(b)\varphi(a) = 0$$

Twierdzenie 2.4. *Każdy homomorfizm algebry Banacha w $\mathbb{C}$ jest ciągły. Ponadto norma tego odwzorowania liniowego nie przekracza wartości 1.*

Dowód. Załóżmy, że $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ jest niezerowym homomorfizmem. Istnieje element a taki, że $\varphi(a) \neq 0$. Jeśli A ma jedność e , to $\varphi(a) = \varphi(e)\varphi(a)$. Zatem $\varphi(e) = 1$. Jeśli b jest elementem odwracalnym, to

$$1 = \varphi(e) = \varphi(b^{-1}b) = \varphi(b^{-1})\varphi(b)$$

Stąd $\varphi(b) \neq 0$. Dla dowolnego elementu $a \in A$ mamy $\varphi[a - \varphi(a)e] = \varphi(a) - \varphi(a) = 0$. Zatem element $a - \varphi(a)e$ nie jest odwracalny. Czyli

$$\varphi(a) \in \sigma(a) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|a\|\}$$

Stąd otrzymujemy $|\varphi(a)| \leq \|a\|$, co pociąga ciągłość φ oraz $\|\varphi\| \leq 1$.

Jeśli A nie ma jedności, to rozważamy $\tilde{A} = A \oplus \mathbb{C}$ oraz $\tilde{\varphi}(a \oplus \lambda) = \varphi(a) + \lambda$. Wtedy $\tilde{\varphi}$ jest homomorfizmem dla $\tilde{A}$. Rzeczywiście

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}[(a \oplus \lambda)(b \oplus \mu)] &= \varphi(ab + \lambda b + \mu a) + \lambda\mu \\ &= \varphi(a)\varphi(b) + \lambda\varphi(b) + \mu\varphi(a) + \lambda\mu \\ &= [\varphi(a) + \lambda][\varphi(b) + \mu] = \tilde{\varphi}(a \oplus \lambda)\tilde{\varphi}(b \oplus \mu) \end{aligned}$$

Z pierwszej części dowodu wynika, że $\tilde{\varphi}$ jest ciągły zatem $\varphi = \tilde{\varphi}|_{A \oplus \{0\}}$ też jest ciągły.

Jeśli A ma jedność, $\|e\| = 1$ oraz $\varphi \neq 0$ to, $\varphi(e) = 1 = \|e\|$. Zatem $\|\varphi\| = 1$. $\square$

Definicja 2.5. Niezerowy homomorfizm algebry Banacha w $\mathbb{C}$ nazywamy **charakterem**.

Twierdzenie 2.6 (Gelfand-Mazur). *Istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy charakterami przemiennej algebry Banacha z jednością a ideałami maksymalnymi tej algebry, poprzez przyporządkowanie charakterowi jego jądra.*

Dowód. Rozważmy charakter φ . Niech $J = \ker \varphi$. Wtedy J jest ideałem. Mamy

$$a = [a - \varphi(a)e] + \varphi(a)e \in J \oplus \mathbb{C}e$$

Zatem $A = J \oplus \mathbb{C}e$. Stąd J jest ideałem maksymalnym, bo J jest podprzestrzenią kowymiary 1.

Odwrotnie, niech J będzie ideałem maksymalnym. Wtedy A/J jest algebrą Banacha z jednością. Z maksymalności J wynika, że A/J jest ciałem. Rzeczywiście, załóżmy niewprost, że $0 \neq [a] \in A/J$ oraz $[a]$ jest nieodwracalny. Rozważmy $\tilde{J} = J + aA$. Wtedy $\tilde{J}$ jest ideałem oraz $J \subsetneq \tilde{J}$, bo $a \in \tilde{J}$, ale $a \notin J$. Z maksymalności J otrzymujemy $\tilde{J} = A = J + aA$. W szczególności $e = j + ab$, dla pewnych elementów $j \in J$ oraz $b \in A$. Zatem $[e] = [a][b]$. To oznacza, że element $[a]$ jest odwracalny w A/J , co prowadzi do sprzeczności.

Z poprzedniego twierdzenia Gelfanda-Mazura wynika, że $A/J = \mathbb{C}[e]$. Rozważmy odwzorowanie

$$A \xrightarrow{j} A/J \xrightarrow{\psi} \mathbb{C}$$

gdzie j jest odwzorowaniem ilorazowym $j(a) = [a]$ oraz $\psi(\lambda[e]) = \lambda$. Złożenie $j \circ \varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ jest charakterem oraz $\ker(j \circ \varphi) = J$, $(j \circ \varphi)(e) = 1$.

Założmy, że istnieją dwa charaktery φ_1 i φ_2 takie, że $\ker \varphi_1 = \ker \varphi_2$. Element $a - \varphi_1(a)e$ leży w $\ker \varphi_1 = \ker \varphi_2$. Zatem

$$0 = \varphi_2[a - \varphi_1(a)e] = \varphi_2(a) - \varphi_1(a)$$

Czyli $\varphi_1 = \varphi_2$. $\square$

Twierdzenie 2.7. *Każda przemienna algebra Banacha z jednością posiada charakter.*

Dowód. Jeśli A jest ciałem, to $A = \mathbb{C}e$. Wtedy $\lambda e \rightarrow \lambda$ jest charakterem.

Założmy, że A nie jest ciałem. Dla niezerowego elementu nieodwracalnego $a \in A$ zbiór aA jest ideałem właściwym, bo $e \notin aA$. Rozważmy rodzinę wszystkich właściwych ideałów zawierających aA . Rodzina jest niepusta i uporządkowana przez inkluzję. Rozważmy łańcuch w tej rodzinie. Żaden z ideałów łańcucha nie zawiera e , zatem suma mnogościowa łańcucha (która jest ideałem) również nie zawiera e . To oznacza, że każdy łańcuch jest ograniczony (przez sumę mnogościową ideałów łańcucha). Z lematu Kuratowskiego-Zorna wynika, że rodzina zawiera element maksymalny. $\square$

Wniosek 2.8. *W przemiennej algebrze Banacha z jednością element a jest odwracalny wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi(a) \neq 0$ dla każdego charakteru φ algebry.*

Dowód. ($\Leftarrow$)

Z dowodu poprzedniego twierdzenia wynika, że dla elementu nieodwracalnego a ideał aA jest zawarty w pewnym ideale maksymalnym I . Niech φ oznacza charakter odpowiadający ideałowi I , tzn. $\ker \varphi = I$. Wtedy $\varphi(a) = 0$. ($\Rightarrow$)

Jeśli a jest odwracalny, to dla dowolnego charakteru φ mamy

$$1 = \varphi(e) = \varphi(aa^{-1}) = \varphi(a)\varphi(a^{-1})$$

Zatem $\varphi(a) \neq 0$. $\square$

Uwaga. Algebra nieprzemienna może nie mieć charakterów. Np. niech $A = M_n(\mathbb{C})$ tworzy algebrę z naturalnymi działaniami i normą operatorową $\|A\| = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2$. Wtedy $\|I\| = 1$. Niech e_{ij} oznacza macierz z wyrazem równym 1 na przecięciu i -tego wiersza i j -tej kolumnie, i zerowymi wyrazami w pozostałych miejscach. Wtedy

$$e_{ij}e_{ij} = 0, \quad e_{ij}e_{ji} = e_{ii}, \quad i \neq j$$

Dla charakteru φ otrzymujemy

$$0 = \varphi(e_{ij}e_{ij}) = \varphi(e_{ij})^2 \implies \varphi(e_{ij}) = 0, \quad i \neq j$$

Zatem

$$\varphi(e_{ii}) = \varphi(e_{ji})\varphi(e_{ij}) = 0, \quad i \neq j = 0$$

Otrzymujemy

$$1 = \varphi(I) = \varphi(e_{11} + e_{22} + \dots + e_{nn}) = \varphi(e_{11}) + \varphi(e_{22}) + \dots + \varphi(e_{nn}) = 0$$

co prowadzi do sprzeczności.

Przykład

Rozważmy $A = \ell^1(\mathbb{Z})$ ze splotem. Chcemy wyznaczyć wszystkie charaktery dla A . Dla $\delta_n(k) = \delta_{n,k}$ mamy $\delta_n * \delta_m = \delta_{n+m}$, $n, m \in \mathbb{Z}$. Rzeczywiście

$$(\delta_n * \delta_m)(l) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_n(k)\delta_m(l-k) = \begin{cases} 0 & n \neq l-m \\ 1 & n = l-m \end{cases} = \begin{cases} 0 & l \neq n+m \\ 1 & l = n+m \end{cases}$$

W szczególności $\delta_1^{*n} = \delta_n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Element δ_0 jest jednością, bo

$$(a * \delta_0)(l) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a(k)\delta_0(l-k) = a_l$$

czyli $a * \delta_0 = a$. Wzór wynika też z $\delta_n * \delta_0 = \delta_n$. Ponieważ $\delta_1 * \delta_{-1} = \delta_0$, to $(\delta_1)^{-1} = \delta_{-1}$. Stąd $(\delta_1)^n = \delta_n$ dla $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Rozważmy charakter φ na $\ell^1(\mathbb{Z})$. Wtedy

$$\varphi(\delta_n) = \varphi((\delta_1)^{*n}) = [\varphi(\delta_1)]^n, \quad n \neq 0$$

Oznaczmy $\lambda = \varphi(\delta_1)$. Wtedy $\varphi(\delta_n) = \lambda^n$ dla $n \neq 0$. Wiemy, że $\|\varphi\| = 1$. Zatem

$$|\lambda^n| \leq \|\varphi\| \|\delta_n\|_1 = 1, \quad n \neq 0$$

W szczególności dla $n = \pm 1$ otrzymujemy $|\lambda| \leq 1$ oraz $|\lambda|^{-1} \leq 1$, czyli $|\lambda| = 1$. To oznacza, że $\lambda = e^{it}$ dla pewnej liczby $0 \leq t < 2\pi$. *Inne wyjaśnienie:* dla $|\lambda| \neq 1$ element $\delta_1 - \lambda\delta_0$. Rzeczywiście dla $\lambda = 0$ mamy $\delta_1 * \delta_{-1} = \delta_0$. Dalej, dla $\lambda \neq 0$ mamy

$$\delta_1 - \lambda\delta_0 = -\lambda(\delta_0 - \lambda^{-1}\delta_1) = \delta_1 * (\delta_0 - \lambda\delta_{-1})$$

Zatem dla $|\lambda| > 1$ z pierwszej równości wynika odwracalność. Z kolei druga równość pociąga odwracalność dla $|\lambda| < 1$. Reasumując $\varphi(\delta_n) = e^{int}$ dla

$n \in \mathbb{Z}$. Dla $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$ mamy $a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \delta_n$, przy czym szereg jest zbieżny w przestrzeni $\ell^1(\mathbb{Z})$. Ponieważ każdy charakter jest ciągły, to

$$\varphi(a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \varphi(\delta_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$$

Można sprawdzić, że dla każdej wartości $0 \leq t < 2\pi$

$$\varphi_t(a) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$$

jest charakterem. Rzeczywiście φ_t jest ciągłym funkcjonałem liniowym, bo $|\varphi_t(a)| \leq \|a\|_1$. Mamy

$$a * b = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k b_{n-k} \right) \delta_n$$

Zatem

$$\varphi_t(a * b) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k b_{n-k} \right) e^{int} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikt} b_{n-k} e^{i(n-k)t} \right)$$

Ponieważ podwójny szereg jest bezwzględnie zbieżny, to można zmienić kolejność sumowania. Otrzymamy

$$\varphi_t(a * b) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikt} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_{n-k} e^{i(n-k)t} \right) = \varphi_t(a) \varphi_t(b)$$

Z twierdzenia Stone'a-Weierstrassa przestrzeń kombinacji liniowych funkcji $\{e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ tworzy gęstą podalgebrę A w $C_{\text{per}}[0, 2\pi]$ w normie jednostajnej. W szczególności ta przestrzeń jest gęsta w $C_{\text{per}}[0, 2\pi]$ w normie $L^2(0, 2\pi)$, bo $\|f\|_2 \leq \|f\|_2$ dla $f \in C_{\text{per}}[0, 2\pi]$. Ponieważ $C_{\text{per}}[0, 2\pi]$ jest gęsta w $L^2(0, 2\pi)$, to przez przechodność przestrzeni kombinacji liniowych funkcji $\{e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ jest gęsta w $L^2(0, 2\pi)$. Układ $\{e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ jest ortonormalny w $L^2(0, 2\pi)$, bo

$$\begin{aligned} \langle e^{int}, e^{imt} \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{int} e^{-imt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t} dt \\ &= \begin{cases} 1 & n = m \\ \frac{1}{2\pi i(n-m)} e^{i(n-m)t} \Big|_0^{2\pi} & n \neq m \end{cases} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases} \end{aligned}$$

Zatem układ ten jest bazą ortonormalną w $L^2(0, 2\pi)$.

Twierdzenie 2.9 (Wiener). *Niech f będzie funkcją ciągłą o okresie 2π , dla której szereg Fouriera, czyli $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{int}$ jest bezwzględnie zbieżny. Jeśli $f(t) \neq 0$ dla wszystkich wartości t , to szereg Fouriera funkcji $1/f$ jest też bezwzględnie zbieżny.*

Dowód. Dla funkcji f współczynniki $\hat{f}(n)$ są określone wzorem

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int} dt = \langle f, e^{int} \rangle_{L^2(0,2\pi)}$$

Z założenia liczby $a_n := \hat{f}(n)$ spełniają $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| < \infty$. Tzn. $a = \{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ leży w $\ell^1(\mathbb{Z})$. Zatem szereg

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$$

jest jednostajnie zbieżny i jego suma jest funkcją ciągłą o okresie 2π . Otrzymujemy

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$$

przy czym równość jest punktowa (nie tylko w $L^2(0, 2\pi)$), bo szereg jest jednostajnie zbieżny a funkcja f jest ciągła o okresie 2π . Założenie $f(t) \neq 0$, dla $0 \leq t < 2\pi$, oznacza, że $\varphi(a) \neq 0$ dla każdego charakteru algebry $\ell^1(\mathbb{Z})$. Zatem element a jest odwracalny w $\ell^1(\mathbb{Z})$. Czyli istnieje ciąg $b \in \ell^1(\mathbb{Z})$ taki, że $a * b = \delta_0$. Wtedy

$$1 = \varphi_t(a * b) = \varphi_t(a)\varphi_t(b) = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int} \right) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{int} \right) = f(t)g(t)$$

gdzie $g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{int}$. Z jednostajnej zbieżności szeregu wnioskujemy, że $\hat{g}(n) = b_n$. □

Twierdzenie Banacha-Alaoglu mówi, że kula jednostkowa przestrzeni A^* (sprzężonej do A) jest zwarta w $*$ -słabej topologii. Jeśli przestrzeń A jest ośrodkowa, to $*$ -słaba topologia na kuli jednostkowej jest metryzowalna. Wtedy zwartość oznacza, że każdy ciąg zawiera podciąg $*$ -słabo zbieżny.

Definicja 2.10. *Spektrum algebry Banacha A nazywamy zbiór wszystkich charakterów algebry A i oznaczamy symbolem $Sp(A)$.*

Twierdzenie 2.11. *Dla algebry Banacha z jednością $Sp(A)$ jest domkniętym podzbiorem kuli jednostkowej w $*$ -słabej topologii (sfery jednostkowej jeśli $\|e\| = 1$). W szczególności spektrum $Sp(A)$ jest zwarte w $*$ -słabej topologii.*

Dowód. Charaktery są funkcjonalami liniowymi o normie nie przekraczającej 1. Stąd $Sp(A) \subset A_1^*$. Sprawdzamy domkniętość. Użyjemy ciągów uogólnionych. Niech $\varphi_\alpha \in Sp(A)$ będzie ciągiem uogólnionym zbieżnym $*$ -słabo do φ . To oznacza z definicji, że dla dowolnego elementu $x \in A$ mamy $\varphi_\alpha(x) \xrightarrow{\alpha} \varphi(x)$. Wiemy, że wtedy $\varphi \in A_1^*$. Trzeba sprawdzić, że φ jest charakterem. Dla $x, y \in A$ mamy

$$\varphi(xy) \xleftarrow{\alpha} \varphi_\alpha(xy) = \varphi_\alpha(x)\varphi_\alpha(y) \xrightarrow{\alpha} \varphi(x)\varphi(y)$$

czyli $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$. Skorzystaliśmy z faktu, że jeśli ciągi uogólnione liczb t_α oraz s_α są zbieżne do t i s , to ciąg uogólniony $t_\alpha s_\alpha$ jest zbieżny do ts (zadanie). Ponadto $\varphi(e) = \lim_\alpha \varphi_\alpha(e) = 1$. Zatem $\varphi \neq 0$.

Następujący dowód nie korzysta z ciągów uogólnionych. Niech $\varphi \in A_1^* \setminus Sp(A)$. Tzn. $\varphi = 0$ lub φ nie jest funkcjonalem multiplikatywnym. Rozważmy drugi przypadek. Wtedy istnieją elementy $a, b \in A$ takie, że $\varphi(ab) \neq \varphi(a)\varphi(b)$. Dla liczby $\varepsilon > 0$ zbiór

$$U_\varepsilon = \{\psi \in A^* : |\psi(a) - \varphi(a)| < \varepsilon, |\psi(b) - \varphi(b)| < \varepsilon, |\psi(ab) - \varphi(ab)| < \varepsilon\}$$

jest otoczeniem funkcjonału φ w A^* w $*$ -słabej topologii. Wtedy $U_\varepsilon \cap A_1^*$ jest otoczeniem φ w A_1^* . Jeśli $\varepsilon > 0$ jest dostatecznie małe, to $\psi(ab) \neq \psi(a)\psi(b)$. Zatem $[U_\varepsilon \cap (A^*)_1] \cap Sp(A) = \emptyset$.

Dla $\varphi = 0$ rozważamy

$$V = \left\{ \psi \in A_1^* : |\psi(e)| < \frac{1}{2} \right\}$$

Zbiór V jest otoczeniem $\varphi = 0$. Otrzymujemy $\psi(e) \neq 1$, zatem $V \cap Sp(A) = \emptyset$. $\square$

Uwaga. Zbiór $Sp(A)$ jest przestrzenią Hausdorffa w $*$ -słabej topologii na A_1^* , bo A_1^* jest przestrzenią Hausdorffa w tej topologii.

Niech $C(Sp(A))$ oznacza algebrę ciągłych zespolonych funkcji na $Sp(A)$.

Twierdzenie 2.12. Niech A będzie przemenną algebrą Banacha z jednością. Dla elementu $x \in A$ określamy funkcję $\hat{x} : Sp(A) \rightarrow \mathbb{C}$ wzorem $\hat{x}(\varphi) = \varphi(x)$. Wtedy $\hat{x}(Sp(A)) = \sigma(x)$. Ponadto funkcja $\hat{x}$ jest ciągła oraz odwzorowanie $\hat{\cdot} : A \rightarrow C(Sp(A))$ jest homomorfizmem algebr Banacha oraz $\|\hat{x}\|_\infty \leq \|x\|$. Odwzorowanie $\hat{\cdot}$ nazywamy transformatą Gelfanda.

Dowód. Niech $\varphi \in Sp(A)$. Wtedy $\varphi(x) \in \sigma(x)$, bo $\varphi(x - \varphi(x)e) = 0$, czyli element $x - \varphi(x)e = x - \hat{x}(\varphi)e$ nie jest odwracalny. Zatem $\hat{x}(\varphi) \in \sigma(x)$ co pociąga $\hat{x}(Sp(A)) \subseteq \sigma(x)$. Dla dowodu odwrotnego zawierania, niech $\lambda \in \sigma(x)$, tzn. element $x - \lambda e$ nie jest odwracalny. Wtedy istnieje charakter $\varphi \in Sp(A)$, dla którego $\varphi(x - \lambda e) = 0$. Tzn. $\lambda = \varphi(x) = \hat{x}(\varphi)$, czyli $\lambda \in \hat{x}(Sp(A))$. Otrzymujemy więc $\sigma(x) \subseteq \hat{x}(Sp(A))$.

Odwzorowanie $\hat{\cdot} : x \mapsto \hat{x}$ jest liniowe z określenia $\hat{\cdot}$. Ponadto

$$\widehat{xy}(\varphi) = \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = \hat{x}(\varphi)\hat{y}(\varphi)$$

czyli $\hat{\cdot}$ jest homomorfizmem.

Pozostaje uzasadnić ciągłość funkcji

$$\hat{x} : Sp(A) \rightarrow \mathbb{C}$$

Własność wynika z określenia topologii na $Sp(A)$. Niech $\varphi_\alpha \xrightarrow{\alpha} \varphi$ *-słabo, gdzie $\varphi_\alpha, \varphi \in Sp(A)$. Zatem

$$\hat{x}(\varphi_\alpha) = \varphi_\alpha(x) \xrightarrow{\alpha} \varphi(x) = \hat{x}(\varphi), \quad x \in A$$

To oznacza ciągłość funkcji $\hat{x}$ na $Sp(A)$.

Bez użycia ciągów uogólnionych: ustalmy $x \in A$. Sprawdzamy ciągłość $\hat{x}$ w punkcie $\varphi \in Sp(A)$. Dla $\varepsilon > 0$ określamy

$$U_\varepsilon = \{\psi \in Sp(A) : |\psi(x) - \varphi(x)| < \varepsilon\}$$

Wtedy U_ε jest otoczeniem punktu φ w *-słabej topologii na $Sp(A)$. Dla $\psi \in U_\varepsilon$ mamy

$$|\hat{x}(\psi) - \hat{x}(\varphi)| = |\psi(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

□

Przykład Rozważmy $A = \ell^1(\mathbb{Z})$. Charaktery mają postać

$$\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \mapsto \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}, \quad 0 \leq t < 2\pi$$

Oznaczmy $\lambda = e^{it}$. Tzn.

$$\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \xrightarrow{\varphi_\lambda} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \lambda^n, \quad |\lambda| = 1$$

Zatem $Sp(A) = \mathbb{T}$ jako zbiory. Pokażemy, że $Sp(A) = \mathbb{T}$ jako przestrzenie topologiczne. Rozważmy δ_1 . Wtedy $\hat{\delta}_1 : Sp(A) \xrightarrow{na} \mathbb{T}$, bo $\hat{\delta}_1(\varphi_\lambda) = \varphi_\lambda(\delta_1) = \lambda$. Funkcja $\hat{\delta}_1$ jest ciągłym różnowartościowym odwzorowaniem z $Sp(A)$ na $\mathbb{T}$. Zatem $\hat{\delta}_1$ jest homeomorfizmem. Dla ustalonego ciągu $a = \{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ odwzorowanie $\hat{a}(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \lambda^n$ jest transformatą Gelfanda elementu a .

3 Rachunek symboliczny w algebrze Banacha

Twierdzenie Wienera można zinterpretować w następujący sposób: w przemiennej algebrze Banacha jeśli dla $x \in A$ funkcja $\hat{x}$ nie zeruje się, to element x jest odwracalny. Tzn. na element x możemy nałożyć funkcję $z \mapsto z^{-1}$. Naszym celem jest określenie działania na elementach algebry większej klasy funkcji ciągłych

Rozważmy funkcję ciągłą $\alpha : [a, b] \rightarrow A$ tzn. dla $a \leq t_0 \leq b$ i $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że jeśli $|t - t_0| < \delta$, to $\|\alpha(t) - \alpha(t_0)\| < \varepsilon$. Można udowodnić, że każda funkcja ciągła jest jednostajnie ciągła (zadanie). Dla podziału $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ przedziału $[a, b]$ wybieramy punkty pośrednie $t_{j-1} \leq s_j \leq t_j$ i określamy sumy

$$S(\mathcal{P}, f) = \sum_{j=1}^n \Delta t_j f(s_j)$$

gdzie $f : [a, b] \rightarrow A$. Celem jest określenie całki $\int_a^b f(t) dt$. Symbolem $d(\mathcal{P}) = \max_{1 \leq j \leq n} \Delta t_j$ oznaczamy średnicę podziału.

Lemat 3.1. *Dla dwu podziałów $\mathcal{P}_1$ i $\mathcal{P}_2$ spełniających $d(\mathcal{P}_1) < \delta$ oraz $d(\mathcal{P}_2) < \delta$ mamy*

$$\|S(\mathcal{P}_1, f) - S(\mathcal{P}_2, f)\| \leq 2(b-a) \sup_{|t-s| < \delta} \|f(t) - f(s)\|$$

Dowód. Niech $\mathcal{P}_3 = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$, z punktami pośrednimi typu prawy koniec. Wtedy

$$\|S(\mathcal{P}_1) - S(\mathcal{P}_2)\| \leq \|S(\mathcal{P}_1) - S(\mathcal{P}_3)\| + \|S(\mathcal{P}_3) - S(\mathcal{P}_2)\|$$

Pokażemy, że

$$\|S(\mathcal{P}_1) - S(\mathcal{P}_3)\| \leq (b-a) \sup_{|t-s|<\delta} \|f(t) - f(s)\|$$

Punkty $\{t_{j,k}\}_{k=0}^{k_j}$ oznaczają punkty podziału $\mathcal{P}_3$ stanowiące podział przedziału $[t_{j-1}, t_j]$. Mamy

$$\begin{aligned} S(\mathcal{P}_1) - S(\mathcal{P}_3) &= \sum_{j=1}^n \Delta t_j f(s_j) - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{k_j} \Delta t_{j,k} f(t_{j,k}) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{k_j} \Delta t_{j,k} [f(s_j) - f(t_{j,k})] \end{aligned}$$

bo $\sum_{k=1}^{k_j} \Delta t_{j,k} = \Delta t_j$. Ponieważ $s_j, t_{j,k} \in [t_{j-1}, t_j]$, to

$$\|f(s_j) - f(t_{j,k})\| \leq \sup_{|t-s|<\delta} \|f(t) - f(s)\|$$

Stąd wynika oszacowanie. Podobnie otrzymujemy

$$\|S(\mathcal{P}_3) - S(\mathcal{P}_2)\| \leq (b-a) \sup_{|t-s|<\delta} \|f(t) - f(s)\|$$

□

Wniosek 3.2. Załóżmy, że funkcja $f : [a, b] \rightarrow A$ jest ciągła. Niech $\mathcal{P}_n$ oznacza ciąg podziałów takich, że $d(\mathcal{P}_n) \rightarrow 0$. Wtedy ciąg $S(\mathcal{P}_n)$ jest zbieżny.

Dowód. Z lematu ciąg $S(\mathcal{P}_n)$ spełnia warunek Cauchy'ego, bo

$$\|S(\mathcal{P}_n, f) - S(\mathcal{P}_m, f)\| \leq 2(b-a) \sup_{|t-s| \leq \max\{d(\mathcal{P}_n), d(\mathcal{P}_m)\}} \|f(t) - f(s)\|$$

□

Definicja 3.3. Dla funkcji ciągłej $f : [a, b] \rightarrow A$ określamy

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_n S(\mathcal{P}_n, f), \quad d(\mathcal{P}_n) \rightarrow 0$$

Całka spełnia:

$$(a) \int_a^b [f(t) + g(t)] dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$$

$$(b) \int_a^b [\lambda f(t)] dt = \lambda \int_a^b f(t) dt$$

$$(c) \int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt, \quad a < c < b.$$

$$(d) \left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt$$

Lemat 3.4. Dla $\varphi \in A^*$ mamy

$$\varphi \left(\int_a^b f(t) dt \right) = \int_a^b \varphi(f(t)) dt$$

Dowód. Dla ciągu podziałów $\mathcal{P}_n$ takich, że $d(\mathcal{P}_n) \rightarrow 0$ otrzymujemy

$$\varphi \left(\int_a^b f(t) dt \right) = \lim_n \varphi(S(\mathcal{P}_n, f)) = \lim_n S(\mathcal{P}_n, \varphi \circ f) = \int_a^b \varphi(f(t)) dt$$

□

Dla krzywej zorientowanej C klasy C^1 w płaszczyźnie $\mathbb{C}$ i funkcji ciągłej $f : C \rightarrow A$ określamy

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt, \quad \gamma : [a, b] \rightarrow C \subset \mathbb{C}$$

Całka nie zależy od wyboru parametryzacji $\gamma(t)$, bo po nałożeniu funkcjonału $\varphi \in A^*$ tak jest (zadanie). Ponadto (zadanie)

$$\varphi \left(\int_C f(z) dz \right) = \int_C \varphi(f(z)) dz$$

Całkę wzdłuż krzywej C możemy określić, gdy krzywa C jest ciągła, kawałkami klasy C^1 , poprzez sumę całek wzdłuż fragmentów krzywej.

Definicja 3.5. Niech $f(z)$ będzie funkcją o wartościach w algebrze Banacha A , określoną na otwartym obszarze $U \subset \mathbb{C}$. Mówimy, że funkcja f jest holomorficzna jeśli $f(z)$ posiada pochodną zespoloną w każdym punkcie obszaru U , tzn. istnieją granice

$$f'(z) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{w \rightarrow z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}, \quad z \in U$$

Przykład Rozważmy algebrę Banacha A z jednością. Ustalmy $a \in A$. wtedy funkcja $z \mapsto (ze - a)^{-1}$ dla $z \notin \sigma(a)$ jest holomorficzna. Rzeczywiście, gdy $w \rightarrow z$, to $(we - a)^{-1} \rightarrow (ze - a)^{-1}$ oraz

$$(we - a)^{-1} - (ze - a)^{-1} = -(w - z)(we - a)^{-1}(ze - a)^{-1}$$

Stąd

$$\frac{(we - a)^{-1} - (ze - a)^{-1}}{w - z} = -(we - a)^{-1}(ze - a)^{-1}$$

zatem

$$\frac{d}{dz}(ze - a)^{-1} = -(ze - a)^{-2}$$

Skorzystaliśmy z ciągłości funkcji $w \mapsto (we - e)^{-1}$. Ta własność wynika ze złożenia funkcji ciągłych

$$w \mapsto we - a \mapsto (we - a)^{-1}$$

Twierdzenie 3.6. Niech C będzie prostą krzywą zamkniętą w $\mathbb{C}$. Załóżmy, że funkcja $f(z)$ o wartościach w A jest określona i holomorficzna w obszarze otwartym U zawierającym krzywą C oraz obszar ograniczony przez tę krzywą. Wtedy

$$\int_C f(z) dz = 0$$

Dowód. Dla $\varphi \in A^*$ mamy

$$\varphi \left(\int_C f(z) dz \right) = \int_C \varphi(f(z)) dz = 0$$

Ponieważ φ jest dowolnym funkcjonałem na A , to $\int_C f(z) dz = 0$. $\square$

Wniosek 3.7. Niech $U \subset \mathbb{C}$ będzie spójnym obszarem ograniczonym, którego brzeg składa się ze skończonej liczby prostych krzywych zamkniętych. Dla funkcji $f(z)$ holomorficznej w obszarze V zawierającym $\bar{U}$ mamy

$$\int_{\partial U} f(z) dz = 0$$

Dowód. Obszar U możemy podzielić na skończoną liczbę obszarów jednospójnych $U_1, U_2, \dots, U_n$. Wtedy

$$\int_{\partial U} f(z) dz = \int_{\partial U_1} f(z) dz + \int_{\partial U_2} f(z) dz + \dots + \int_{\partial U_n} f(z) dz = 0$$

□

Dla algebry Banacha z jednością możemy określić $p(a)$, gdzie $p(z)$ jest wielomianem. Wtedy $(p_1 p_2)(a) = p_1(a) p_2(a)$. Można rozważyć funkcję całkowitą $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ i zdefiniować $f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a^n$. Szereg jest absolutnie zbieżny, bo $\lim_n |c_n|^{1/n} = 0$. Zatem $\|c_n a^n\| \leq |c_n| \|a\|^n$. Więc $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \|a\|^n < \infty$. Wystarczy, aby

$$\limsup |c_n|^{1/n} < \frac{1}{\|a\|}$$

Jeśli $f(z)$ i $g(z)$ są holomorficzne w obszarze otwartym U zawierającym koło $\{z : |z| \leq \|a\|\}$ to $(fg)(a) = f(a)g(a)$ w oparciu o mnożenie Cauchy'ego szeregów potęgowych.

Przykład. Niech $A \in M_n(\mathbb{C})$. Załóżmy, że A sprowadza się do postaci diagonalnej, tzn. $A = CDC^{-1}$, gdzie D jest macierzą diagonalną z wyrazami $\{d_k\}_{k=1}^n$ na przekątnej. Dla $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ możemy określić $f(D)$ jako macierz diagonalną z wyrazami $\{f(d_k)\}_{k=1}^n$ na przekątnej. Niech $f(A) = Cf(D)C^{-1}$. Wtedy $(fg)(A) = f(A)g(A)$, bo

$$f(A)g(A) = Cf(D)C^{-1}Cg(D)C^{-1} = Cf(D)g(D)C^{-1} = C(fg)(D)C^{-1} = (fg)(A)$$

Dla $f \equiv 1$ mamy $f(A) = Cf(D)C^{-1} = CC^{-1} = I$. Z kolei dla $f(z) = z$ zachodzi $f(A) = CDC^{-1} = A$. Funkcja f nie musi być określona na $\mathbb{C}$. Wystarczy, że znamy jej wartości na $\{d_k\}_{k=1}^n$, czyli na $\sigma(A)$.

Twierdzenie 3.8. Niech C będzie prostą krzywą zamkniętą, kawałkami C^1 , obiegającą w kierunku dodatnim $\sigma(a)$ dla elementu $a \in A$, lub skończoną sumą

takich krzywych, przy czym obszary otoczone przez te krzywe są rozłączne. Wtedy

$$e = \frac{1}{2\pi i} \int_C (ze - a)^{-1} dz$$

Uwaga Wzór jest podobny do wzoru Cauchy'ego

$$1 = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{z - z_0}$$

gdzie liczba z_0 leży wewnątrz C .

Dowód. Rozważmy przypadek $C = C_1 \cup C_2$. Tzn. $\sigma(a)$ jest zawarte w dwu obszarach otwartych otoczonych przez te krzywe. Niech C_R oznacza okrąg o środku w 0 i promieniu tak dużym, że krzywa C leży wewnątrz koła o promieniu R . W obszarze otwartym U zawartym pomiędzy C i C_R funkcja $z \mapsto (ze - a)^{-1}$ jest holomorficzna, bo obszar jest oddzielony od $\sigma(a)$. Zatem

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} (ze - a)^{-1} dz = 0$$

Stąd

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C (ze - a)^{-1} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} (ze - a)^{-1} dz$$

Można przyjąć, że $R > \|a\|$. Wtedy

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} (ze - a)^{-1} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} a^n dz$$

Szereg jest zbieżny jednostajnie na C_R zatem w drugiej całce można zmienić kolejność całki z sumowaniem. Otrzymamy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} z^{-n-1} dz \right] a^n = e$$

Skorzystaliśmy z faktu, że jeśli $f_n(z) \rightarrow f(z)$ dla $z \in C$, to

$$\int_C f_n(z) dz \rightarrow \int_C f(z) dz$$

dla funkcji ciągłych $f_n, f : C \rightarrow A$.

□

Wniosek 3.9. *Przy założeniach poprzedniego twierdzenia, dla funkcji całkowitej $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ spełniony jest wzór*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)(ze - a)^{-1} dz$$

gdzie $f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a^n$.

Dowód. Wystarczy udowodnić wzór dla wielomianu $p_N(z) = \sum_{n=0}^N c_n z^n$ i tezę uzyskać przez przejście graniczne, gdy $N \rightarrow \infty$. Mamy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_C p_N(z)(ze - a)^{-1} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_C [p_N(z)e - p_N(a)](ze - a)^{-1} dz \\ &\quad + p_N(a) \frac{1}{2\pi i} \int_C (ze - a)^{-1} dz \end{aligned}$$

Funkcja $[p_N(z)e - p_N(a)](ze - a)^{-1}$ jest wielomianem zmiennej z ze współczynnikami z algebry A , związaną z wielomianem $z \mapsto \frac{p_N(z) - p_N(w)}{z - w}$. Zatem po uproszczeniu, pierwsza całka jest równa 0. $\square$

Definicja 3.10. *Niech $f(z)$ będzie funkcją holomorficzną w obszarze otwartym U , złożonym ze skończonej liczby obszarów jednospójnych, zawierającym $\sigma(a)$. Dla C prostej krzywej zamkniętej, kawałkami C^1 (lub skończonej sumy takich krzywych) obiegającej w kierunku dodatnim zbiór $\sigma(a)$ i dla elementu $a \in A$ określmy*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)(ze - a)^{-1} dz$$

Uwaga. Definicja $f(a)$ nie zależy od wyboru krzywej C . Rzeczywiście niech C_R będzie okręgiem o promieniu R takim, że krzywa C leży w otwartym kole o promieniu R . Wtedy funkcja $f(z)(ze - a)^{-1}$ jest holomorficzną w obszarze pomiędzy C i C_R . Zatem całka wzdłuż brzegu obszaru wynosi 0, czyli całki wzdłuż C i C_R są równe.

Uwaga. Można określić $f(a)$, gdy U składa się ze skończonej liczby obszarów spójnych, ale niekoniecznie jednospójnych. Np. wzór

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C (ze - a)^{-1} dz = e$$

jest spełniony. Rzeczywiście jeśli krzywa C nie zawiera wewnątrz punktów z $\sigma(a)$, to całka wzdłuż C jest równa 0, bo funkcja $z \mapsto (ze - a)^{-1}$ jest holomorphyzna w obszarze otwartym ograniczonym przez C .

Twierdzenie 3.11. *Jeśli funkcje $f(z)$ i $g(z)$ są holomorphyczne w otoczeniu $\sigma(a)$, to*

$$f(a)g(a) = (fg)(a)$$

Dowód. Dowód przeprowadzimy dla przypadku, gdy f i g są holomorphyczne w otwartym obszarze jednospójnym zawierającym $\sigma(a)$.

Wyberzmy krzywe (być może skończone sumy krzywych) C_1 i C_2 otaczające $\sigma(a)$ takie, że C_1 leży w obszarze otwartym ograniczonym przez C_2 . Wtedy

$$\begin{aligned} f(a)g(a) &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{C_1} f(z)(ze - a)^{-1} dz \cdot \int_{C_2} g(w)(we - a)^{-1} dw \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{C_1} f(z) \left[\int_{C_2} g(w)(ze - a)^{-1}(we - a)^{-1} dw \right] dz \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{C_1} f(z) \left[\int_{C_2} \frac{g(w)}{z - w} [(we - a)^{-1} - (ze - a)^{-1}] dw \right] dz \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{C_1} f(z)(ze - a)^{-1} \left[\int_{C_2} \frac{g(w)}{w - z} dw \right] dz \\ &\quad - \frac{1}{4\pi^2} \int_{C_2} g(w)(we - a)^{-1} \left[\int_{C_1} \frac{f(z)}{z - w} dz \right] dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} f(z)g(z)(ze - a)^{-1} dz = (fg)(a) \end{aligned}$$

bo $\int_{C_1} f(z)(z - w)^{-1} dz = 0$. Zmianę kolejności całkowania można uzasadnić poprzez nałożenie funkcjonału $\varphi \in A^*$. Otrzymujemy wtedy całki z funkcji o wartościach w $\mathbb{C}$. $\square$

Niech $H(a)$ oznacza rodzinę funkcji holomorficzných w otoczeniu $\sigma(a)$. Wtedy $H(a)$ tworzy algebrę. Odwzorowanie $H(a) \ni f \mapsto f(a) \in A$ jest homomorfizmem algebr. Ponadto $1 \mapsto e$ oraz $z \mapsto a$.

Lemat 3.12. *Niech A będzie przemenną algebrą Banacha z jednością. Dla $a \in A$, $\varphi \in Sp(A)$ oraz $f \in H(a)$ mamy $\varphi(f(a)) = f(\varphi(a))$. To oznacza, że*

$$\widehat{f(a)} = f \circ \hat{a}$$

Dowód. Mamy

$$\begin{aligned} \varphi(f(a)) &= \varphi \left(\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)(ze - a)^{-1} dz \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)\varphi((ze - a)^{-1}) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - \varphi(a)} dz = f(\varphi(a)) \end{aligned}$$

bo $\varphi(ze - a) = z - \varphi(a)$ oraz z multiplikatywności otrzymujemy

$$\varphi((ze - a)^{-1}) = \frac{1}{z - \varphi(a)} \quad z \in C$$

$\square$

Z lematu otrzymujemy

Twierdzenie 3.13. *Dla $a \in A$ oraz $f \in H(a)$ mamy $\sigma(f(a)) = f(\sigma(a))$.*

Twierdzenie 3.14 (Wiener-Lévy). *Załóżmy, że funkcja o okresie 2π ma absolutnie zbieżny szereg Fouriera, tzn. $f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ oraz $\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$.*

Niech $h(z)$ będzie funkcją holomorficzną w otwartym otoczeniu zbioru wartości funkcji f . Wtedy szereg Fouriera funkcji $h(f(x))$ jest absolutnie zbieżny.

Dowód. Dla ciągu $c = \{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ zbadamy $\sigma(c)$ w algebrze $\ell^1(\mathbb{Z})$. Funkcjonały multiplikatywne mają postać

$$\varphi_x(c) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = f(x)$$

Zatem $\sigma(c) = f([0, 2\pi)) = f(\mathbb{R})$. Z założenia $h \in H(c)$, skąd wynika, że $d := h(c) \in \ell^1(\mathbb{Z})$. To oznacza, że $h(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{inx}$ oraz $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |d_n| < \infty$.

Dalej

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{inx} = \varphi_x(d) = \varphi_x(h(c)) = h(\varphi_x(c)) = h(f(x))$$

□

Twierdzenie 3.15. Niech $f(z)$ będzie funkcją holomorficzną w obszarze otwartym zawierającym $\sigma(a)$. Wtedy dla dowolnej funkcji całkowitej $g(w)$ mamy

$$g(f(a)) = (g \circ f)(a)$$

Dowód. Niech $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n$. Wtedy

$$g(f(a)) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n f(a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} g_n (f^n)(a) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} g_n f^n \right) (a) = (g \circ f)(a)$$

□

4 C*-algebry

Definicja 4.1. Operację $*$: $A \rightarrow A$ w algebrze Banacha nazywamy sprzężeniem jeśli

$$(a) \quad (a + b)^* = a^* + b^*$$

$$(b) \quad (\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*$$

$$(c) \quad (ab)^* = b^* a^*$$

$$(d) \quad (a^*)^* = a$$

Uwaga Jeśli A ma jedność e , to $e^* = e$ (zadanie).

Definicja 4.2. Algebrę Banacha nazywamy **-algebrą*, jeśli $\|a^*\| = \|a\|$.

Przykłady

- (a) $A = \ell^1(\mathbb{Z})$. Dla $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$ określamy $a^*(n) = \overline{a(-n)}$. Np. $\delta_n^* = \delta_{-n}$.
- (b) $A = C[0, 1]$ lub $A = C(K)$, gdzie K jest zwartą przestrzenią Hausdorffa. Wtedy $f^*(t) = \overline{f(t)}$.
- (c) $A = B(\mathcal{H})$ ze sprzężeniem operatorów.

Definicja 4.3. **-algebrę Banacha nazywamy C*-algebrą*, jeśli $\|a^*a\| = \|a\|^2$.

Przykłady Algebra $\ell^1(\mathbb{Z})$ nie jest C*-algebrą (dlaczego?). Z kolei $C(K)$ oraz $B(\mathcal{H})$ są C*-algebrami, bo $\|\overline{f}f\|_\infty = \| |f|^2 \|_\infty = \|f\|_\infty^2$ oraz $\|T^*T\| = \|T\|^2$. Druga równość wynika z

$$\|T^*T\| \geq \sup_{\|x\|=1} \langle T^*Tx, x \rangle = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|^2 = \|T\|^2$$

oraz $\|T^*T\| \leq \|T^*\| \|T\| = \|T\|^2$.

Twierdzenie 4.4 (Gelfand-Naimark). Niech A będzie przemenną C*-algebrą z jednością. Wtedy transformata Gelfanda jest izometrycznym *-izomorfizmem pomiędzy A oraz $C(Sp(A))$ z normą $\|\cdot\|_\infty$.

Uwaga Ogólnie homomorfizm h pomiędzy *-algebrami nazywamy *-homomorfizmem jeśli $h(x^*) = h(x)^*$. Izometria oznacza, że $\|\hat{x}\|_\infty = \|x\|_A$, a *-izomorfizm, że $\widehat{x^*} = \widehat{x}$.

Dowód. Transformata Gelfanda jest liniowym homomorfizmem. Operacja $*$ jest ciągła, bo $\|x^*\| = \|x\|$. Niech $\varphi \in Sp(A)$ oraz $a^* = a$. Pokażemy, że $\varphi(a) \in \mathbb{R}$. Dla $t \in \mathbb{R}$ rozważmy elementy

$$u_t = \exp(ita) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ita)^n}{n!}$$

Wtedy $u_t^* = \exp(-ita)$ oraz

$$u_t^* u_t = \exp(-ita) \exp(ita) = 1(a) = e$$

bo $\exp(-itz)\exp(itz) = 1$. Dalej

$$1 = \|e\| = \|u_t^* u_t\| = \|u_t\|^2$$

stąd $\|u_t\| = 1$. Dla $\varphi \in Sp(A)$ otrzymujemy

$$1 \geq |\varphi(u_t)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it\varphi(a))^n}{n!} \right| = |\exp(it\varphi(a))| = \exp(-t \operatorname{Ran} \varphi(a))$$

Ponieważ t jest dowolną liczbą rzeczywistą, to $\operatorname{Ran} \varphi(a) = 0$. To oznacza, że $\varphi(a) \in \mathbb{R}$.

Inny dowód Niech $\lambda = x + iy \in \sigma(a)$. Zatem dla $t \in \mathbb{R}$ mamy $\lambda + it \in \sigma(a + ite)$. Otrzymujemy

$$\begin{aligned} |\lambda + it|^2 &\leq \|a + ite\|^2 = \|(a + ite)^*(a + ite)\| = \|(a - ite)(a + ite)\| \\ &= \|a^2 + t^2 e\| \leq \|a\|^2 + t^2 \end{aligned}$$

Z drugiej strony

$$|\lambda + it|^2 = |x + i(y + t)|^2 = x^2 + (y + t)^2 = x^2 + y^2 + 2yt + t^2$$

Zatem

$$x^2 + y^2 + 2yt \leq \|a\|^2, \quad t \in \mathbb{R}$$

Z dowolności t otrzymujemy $y = 0$.

Dla $a \in A$ niech $a_1 = (a + a^*)/2$ oraz $a_2 = (a - a^*)/(2i)$. Wtedy $a_1^* = a_1$, $a_2^* = a_2$ oraz $a = a_1 + ia_2$. Zatem

$$\varphi(a^*) = \varphi(a_1 - ia_2) = \varphi(a_1) - i\varphi(a_2) = \overline{\varphi(a_1) + i\varphi(a_2)} = \overline{\varphi(a)}$$

Otrzymaliśmy $\widehat{a^*} = \widehat{a}$, bo dla $\varphi \in Sp(A)$ zachodzi

$$\widehat{a^*}(\varphi) = \varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)} = \widehat{a}(\varphi)$$

Czyli transformata Gelfanda jest *-homomorfizmem.

Chcemy pokazać, że $\|\widehat{a}\|_{\infty} = \|a\|$. Mamy

$$\|\widehat{a}\|_{\infty} = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\} = r(a) = \lim_n \|a^n\|^{1/n}$$

Dla $a^* = a$ otrzymujemy $\|a^2\| = \|a^*a\| = \|a\|^2$. Ponieważ elementy a^k są samosprężone, to przez indukcję otrzymujemy $\|a^{2^n}\| = \|a\|^{2^n}$, czyli $r(a) = \|a\|$. Zatem $\|\widehat{a}\|_{\infty} = \|a\|$. Rozważmy dowolny element $a \in A$. Wtedy

$$\|a\|^2 = \|a^*a\| = \|\widehat{a^*a}\|_{\infty} = \|\widehat{a}\widehat{a}\|_{\infty} = \|\widehat{a}\|^2_{\infty} = \|\widehat{a}\|_{\infty}^2$$

Pozostaje do pokazania, że $\hat{A} = C(Sp(A))$. Skorzystamy z twierdzenia Stone'a-Weierstrassa. Algebra $\hat{A}$ jest podalgebrą funkcji w $C(Sp(A))$ zamkniętą na sprzężenie. Algebra $\hat{A}$ zawiera $\hat{e} = 1$ oraz rozdziela punkty, bo jeśli $\varphi_1 \neq \varphi_2$ dla $\varphi_1, \varphi_2 \in Sp(A)$, to $\varphi_1(a) \neq \varphi_2(a)$ dla pewnego elementu $a \in A$. Tzn. $\hat{a}(\varphi_1) \neq \hat{a}(\varphi_2)$. Zatem $\hat{A}$ jest gęstą podalgebrą w $C(Sp(A))$. Z drugiej strony $\hat{A}$ jest domkniętą jako izometryczny obraz algebry Banacha A . Stąd $\hat{A} \cong C(Sp(A))$. $\square$

Definicja 4.5. Element a w C^* -algebrze B z jednością (niekoniecznie przemiennej) nazywamy normalnym jeśli $a^*a = aa^*$.

Niech A oznacza C^* -algebrę generowaną przez a oraz e . Tzn. rozważamy

$$A_0 = \{p(a, a^*) : p(x, y) \text{ wielomian dwu zmiennych o współczynnikach z } \mathbb{C}\}$$

Symbolem A oznaczmy domknięcie podalgebry A_0 w C^* -algebrze B . Wtedy A jest przemianą C^* -algebrą z jednością.

Wniosek 4.6. Przy powyższych oznaczeniach otrzymujemy $A \cong C(\sigma(a))$, gdzie $\sigma(a)$ oznacza spektrum elementu a w C^* -algebrze B .

Dowód. Z zadania 11 listy 5 wynika, że $\sigma_B(a) = \sigma_A(a)$. Rozważmy $\hat{a} : Sp(A) \rightarrow \sigma(a)$. Funkcja $\hat{a}$ jest ciągła oraz $\hat{a}(Sp(A)) = \sigma(a)$. Ponadto funkcja $\hat{a}$ jest różnowartościowa, bo jeśli $\hat{a}(\varphi_1) = \hat{a}(\varphi_2)$, to $\varphi_1(a) = \varphi_2(a)$. Zatem

$$\varphi_1(a^*) = \overline{\varphi_1(a)} = \overline{\varphi_2(a)} = \varphi_2(a^*)$$

Multiplikatywność pociąga $\varphi_1 = \varphi_2$ na A_0 . Z kolei z ciągłości charakterów φ_1 i φ_2 wynika $\varphi_1 = \varphi_2$ na A . Reasumując odwzorowanie $\hat{a}$ jest homeomorfizmem pomiędzy $Sp(A)$ i $\sigma(a)$. Izomorfizm pomiędzy A oraz $C(\sigma(a))$ zadany jest poprzez

$$A \xrightarrow{\hat{\cdot}} C(Sp(A)) \xrightarrow{h} C(\sigma(a))$$

Odwzorowanie h zadane jest wzorem

$$h(f)(\lambda) = f(\hat{a}^{-1}(\lambda)), \quad f \in C(Sp(A)), \quad \lambda \in \sigma(a)$$

Przykład $A = \ell^\infty(\mathbb{N}) \cong C(Sp(A))$. Mamy $\mathbb{N} \subset Sp(A)$, bo $\varphi_n(a) = a_n$ jest charakterem. Zawieranie jest właściwe (dlaczego?). Można pokazać, że $Sp(A) \cong C(K)$, gdzie K jest uzwarceniem Čecha-Stone'a zbioru $\mathbb{N}$. $\square$

Twierdzenie Gelfanda-Naimarka-Segala mówi, że C^* -algebra z jednością jest izometrycznie izomorficzna z domkniętą podalgebrą operatorów, zawierającą I w $B(\mathcal{H})$, dla pewnej przestrzeni, Hilberta. Np. $C[0, 1]$ można utożsamić z algebrą operatorów $M_f g = fg$ dla $g \in L^2(0, 1)$.

5 Operatory nieograniczone na przestrzeni Hilberta

Wiele operatorów określonych na podprzestrzeni przestrzeni Hilberta jest nieograniczonych. Podprzestrzeń, na której operator jest określony nazywamy jego dziedziną.

Przykłady

- (a) Operator $(Tf)(x) = xf(x)$ jest określony na $D(T) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : xf(x) \in L^2(\mathbb{R})\}$, czyli $T : D(T) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$. Operator T jest nieograniczony, bo

$$\|T\mathbf{1}_{(n,n+1)}\|_2 = \|x\mathbf{1}_{(n,n+1)}\| \geq n\|\mathbf{1}_{(n,n+1)}\|_2$$

Przestrzeń $D(T)$ jest gęsta w $L^2(\mathbb{R})$, bo zawiera wszystkie funkcje o ograniczonym nośniku.

- (b) Dla $\mathcal{H} = L^2(0,1)$ określamy $T : C^1[0,1] \rightarrow \mathcal{H}$ wzorem $Tf = f'$. $D(T)$ jest gęstą podprzestrzenią w $\mathcal{H}$. Dla $f_n(x) = \sin(\pi nx)$ mamy $(Tf_n)(x) = \pi n \cos(\pi nx)$. Otrzymujemy $\|Tf_n\|_2 = \pi n\|f_n\|_2$.

- (c) $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$, $(Ta)_n = na_n$ oraz

$$D(T) = \left\{ a \in \ell^2(\mathbb{N}) : \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |a_n|^2 < \infty \right\}$$

Podprzestrzeń $D(T)$ jest gęsta, bo $\delta_n \in D(T)$ dla wszystkich n . Ponadto $\|T\delta_n\|_2 = n\|\delta_n\|_2$.

Będziemy rozważać operatory $A : D(A) \rightarrow \mathcal{H}$ o gęstej dziedzinie.

Definicja 5.1. Operator $A : D(A) \rightarrow \mathcal{H}$ nazywamy symetrycznym jeśli

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle, \quad x, y \in D(A)$$

Uwaga Z tożsamości polaryzacyjnej wynika, że symetria jest równoważna warunkowi $\langle Ax, x \rangle = \langle x, Ax \rangle$ dla wszystkich $x \in D(A)$, co z kolei jest równoważne $\langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R}$, dla $x \in D(A)$.

Operatory symetryczne o pełnej dziedzinie, tzn. $D(A) = \mathcal{H}$, są ograniczone z twierdzenia Hellingera-Toeplitza.

Dla dwu operatorów A i B zawieranie $A \subseteq B$ oznacza, że $D(A) \subseteq D(B)$ oraz $Ax = Bx$ dla $x \in D(A)$. Mówimy wtedy, że B jest rozszerzeniem operatora A . Dla operatora A wykresem nazywamy podzbiór $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$

$$\Gamma_A = \{(x, Ax) : x \in D(A)\}$$

Zauważmy, że $A \subseteq B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Gamma_A \subseteq \Gamma_B$.

Definicja 5.2. Dla operatora $A : D(A) \rightarrow \mathcal{H}$ operatorem sprzężonym A^* nazywamy operator o dziedzinie

$$D(A^*) = \{x \in \mathcal{H} : (\exists z \in \mathcal{H}) (\forall y \in D(A)) \langle Ay, x \rangle = \langle y, z \rangle\}$$

Dla $x \in D(A^*)$ określamy $A^*x = z$.

Uwaga Element z , o ile istnieje, jest jedyny. Istotnie jeśli $\langle y, z \rangle = \langle y, z' \rangle$ dla wszystkich $y \in D(A)$, to z gęstości dziedziny wynika $z = z'$.

Uwaga Może się zdarzyć, że $D(A^*) = \{0\}$. Naturalnym pytaniem jest kiedy $D(A^*)$ jest gęstą podprzestrzenią w $\mathcal{H}$? Dla operatora symetrycznego A mamy $D(A) \subseteq D(A^*)$. Rzeczywiście, dla $x, y \in D(A)$ otrzymujemy

$$\langle Ay, x \rangle = \langle y, Ax \rangle$$

zatem $D(A) \subset D(A^*)$ oraz $A^*x = Ax$. Rolę elementu z pełni Ax . Ponadto warunek $A \subseteq A^*$ jest równoważny symetrii operatora A .

Uwaga Z twierdzenia Riesz o postaci funkcjonałów ograniczonych na $\mathcal{H}$ wynika, że warunek $x \in D(A^*)$ jest równoważny temu, że funkcjonał liniowy

$$D(A) \ni y \mapsto \langle Ay, x \rangle \in \mathbb{C}$$

jest ograniczony, tzn. $|\langle Ay, x \rangle| \leq c\|y\|$ dla pewnej stałej $c \geq 0$ i wszystkich $y \in D(A)$.

W przestrzeni $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ określamy iloczyn skalarny wzorem

$$\langle (u, v), (u', v') \rangle = \langle u, u' \rangle + \langle v, v' \rangle$$

Niech $J(u, v) = (v, -u)$. Wtedy J jest izometrią na $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ oraz $J^2 = -I$.

Lemat 5.3. Dla operatora $A : D(A) \rightarrow \mathcal{H}$ o gęstej dziedzinie mamy $(x, z) \in \Gamma_{A^*}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(x, z) \perp J(\Gamma_A)$. Tzn. $\Gamma_{A^*} = J(\Gamma_A)^\perp$, w przestrzeni $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$. W szczególności wykres operatora A^* jest domknięty.

Dowód. Teza wynika z określenia $(x, z) \in \Gamma_{A^*}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\langle x, Ay \rangle - \langle z, y \rangle = 0, \quad y \in D(A)$$

tzn.

$$(x, z) \perp J(y, Ay), \quad y \in D(A)$$

□

Definicja 5.4. Operator $A : D(A) \rightarrow \mathcal{H}$ nazywamy **domykalnym** jeśli $\overline{\Gamma_A}$ jest wykresem operatora, oznaczanego symbolem $\overline{A}$. Operator $A : D(A) \rightarrow \mathcal{H}$ nazywamy **domkniętym**, jeśli wykres Γ_A jest domkniętą podprzestrzenią $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$.

Uwaga Każdy operator symetryczny jest domykalny, bo wykres A^* jest domknięty oraz $A \subset A^*$.

Twierdzenie 5.5. Dziedzina operatora A^* jest gęsta wtedy i tylko wtedy, gdy A jest operatorem domykalnym.

Dowód. Załóżmy, że $v \perp D(A^*)$. Równoważnie $(v, 0) \perp \Gamma_{A^*} = J(\Gamma_A)^\perp$. Czyli

$$(v, 0) \in J(\Gamma_A)^{\perp\perp} = \overline{J(\Gamma_A)} = J(\overline{\Gamma_A})$$

To z kolei jest równoważne z warunkiem $(0, v) \in \overline{\Gamma_A}$, czyli $v = 0$. □

Wniosek 5.6. Dla operatora domykalnego A zachodzi równość $A^{**} = \overline{A}$.

Dowód. Mamy

$$\begin{aligned} \Gamma_{A^{**}} &= J(\Gamma_{A^*})^\perp = J(J(\Gamma_A)^\perp)^\perp = J(J(\Gamma_A)^{\perp\perp}) \\ &= J(\overline{J(\Gamma_A)}) = J^2(\overline{\Gamma(A)}) = -\overline{\Gamma_A} = \overline{\Gamma_A} = \Gamma_{\overline{A}} \end{aligned}$$

□

Przykłady

(a) $\mathcal{H} = L^2(0, 1)$

$$Af = if' \quad D(A) = \{f \in C^1[0, 1] : f(0) = f(1) = 0\}$$

Operator A jest symetryczny, bo dla $f, g \in D(A)$

$$\langle Af, g \rangle = i \int_0^1 f' \overline{g} dx = if \overline{g} \Big|_0^1 - i \int_0^1 f \overline{g'} dx = \langle f, Ag \rangle$$

$$(b) \quad (Af)(x) = xf(x), \quad D(A) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : xf(x) \in L^2(\mathbb{R})\}$$

$$\langle Af, g \rangle = \langle xf, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\overline{g(x)} dx = \langle f, xg \rangle = \langle f, Ag \rangle$$

Definicja 5.7. Operator symetryczny A nazywamy **samosprężonym** jeśli $A^* = A$, tzn. $D(A^*) = D(A)$.

Przykłady

(a) Jak wyżej. Wtedy $D(A) \subsetneq C^1[0, 1] \subseteq D(A^*)$. Można pokazać, że

$$D(A^*) = \{f \in L^2(0, 1) : f \text{ absolutnie ciągła}, f' \in L^2(0, 1)\}$$

(b) Jak wyżej. Pokażemy, że $A^* = A$. Wystarczy udowodnić, że $D(A^*) \subseteq D(A)$. Niech $f \in D(A^*)$. Mamy

$$D(A^*) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : |\langle Ag, f \rangle| \leq c\|g\|_2, \text{ dla pewnej stałej } c \text{ i } g \in D(A)\}$$

Niech $g_n(x) = xf(x)\mathbf{1}_{(-n, n)}(x)$. Wtedy $g_n \in D(A)$, bo $xg_n(x)$ jest ograniczona. Załóżmy, że $f \in D(A^*)$. Wtedy

$$|\langle xg_n, f \rangle| = |\langle Ag_n, f \rangle| \leq c\|g_n\|_2$$

Zatem

$$\int_{-n}^n x^2 |f(x)|^2 dx \leq c \left(\int_{-n}^n x^2 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

czyli

$$\int_{-n}^n x^2 |f(x)|^2 dx \leq c^2, \quad n \in \mathbb{N}$$

Ponieważ n jest dowolne, to $xf \in L^2(\mathbb{R})$.

Lemat 5.8. Jeśli $A \subseteq B$, to $B^* \subseteq A^*$.

Dowód. Mamy

$$\begin{aligned} D(A^*) &= \{x \in \mathcal{H} : (\exists z \in \mathcal{H}) \ (\forall y \in D(A)) \ \langle Ay, x \rangle = \langle y, z \rangle\} \\ D(B^*) &= \{x \in \mathcal{H} : (\exists z \in \mathcal{H}) \ (\forall y \in D(B)) \ \langle By, x \rangle = \langle y, z \rangle\} \end{aligned}$$

Dla $y \in D(A)$ mamy $Ay = By$. Zatem $D(B^*) \subseteq D(A^*)$. Ponadto dla $x \in D(B^*)$ odpowiadający element $z = B^*x$ jest równy A^*x .

Inne wyjaśnienie:

$$\Gamma_{B^*} = J(\Gamma_B)^\perp \supset J(\Gamma_A)^\perp = \Gamma_{A^*}$$

□

Uwaga Załóżmy, że $A \subseteq B$ oraz A i B są symetryczne. Wtedy

$$A \subseteq B \subseteq B^* \subseteq A^*$$

Zatem jeśli A jest samosprężony, to $A = B = B^* = A^*$. Tzn. operator samosprężony nie posiada nietrywialnych symetrycznych rozszerzeń.

Lemat 5.9. *Dla operatora symetrycznego A operator $\bar{A}$ jest również symetryczny.*

Dowód. Jeśli $x \in D(\bar{A})$, to istnieje ciąg $x_n \in D(A)$ taki, że $x_n \rightarrow x$ oraz $Ax_n \rightarrow \bar{A}x$. Wtedy

$$\langle \bar{A}x, x \rangle = \lim_n \langle Ax_n, x_n \rangle \in \mathbb{R}$$

□

Lemat 5.10. *Jeśli A jest domykalny, to $(\bar{A})^* = A^*$.*

Dowód. Wiemy, że podprzestrzeń $D(A^*)$ jest gęsta. Dalej

$$\Gamma_{A^*} = J(\Gamma_A)^\perp = \overline{J(\Gamma_A)}^\perp = J(\overline{\Gamma_A})^\perp = J(\Gamma_{\bar{A}})^\perp = \Gamma_{(\bar{A})^*}$$

□

Lemat 5.11. *Wartości własne operatora symetrycznego są liczbami rzeczywistymi.*

Dowód. Niech $A \subseteq A^*$ oraz $Av = \lambda v$, $v \neq 0$. Wtedy $\mathbb{R} \ni \langle Av, v \rangle = \lambda \|v\|^2$, czyli $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Definicja 5.12. *Operator symetryczny nazywamy **istotnie samosprężonym** jeśli jego domknięcie jest operatorem samosprężonym.*

Uwaga Dla operatora symetrycznego, jeśli A^* jest symetryczny, to A jest istotnie samosprężony. Rzeczywiście

$$A \subset A^* \subset A^{**} = \bar{A}$$

Stąd $\bar{A} = A^* = \bar{A}^*$.

Twierdzenie 5.13. *Operator symetryczny A jest istotnie samosprężony wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej (równoważnie pewnej) liczby $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ przestrzenie $\text{Ran}(A - zI)$ oraz $\text{Ran}(A - \bar{z}I)$ są gęste w $\mathcal{H}$.*

Uwaga Gdy A jest ograniczony (niekoniecznie symetryczny), to $D(\bar{A}) = \mathcal{H}$ (zadanie). Wtedy $\bar{A}$ jest operatorem ograniczonym określonym na $\mathcal{H}$. Jeśli A jest symetryczny, to $\bar{A}$ jest samosprężony. Zatem $\bar{A} - zI$ jest odwracalny. Stąd $\text{Ran}(\bar{A} - zI) = \mathcal{H}$. To oznacza, że $\text{Ran}(A - zI)$ jest gęstą podprzestrzenią w $\mathcal{H}$.

Lemat 5.14. *Dla operatora symetrycznego przestrzeń $\text{Ran}(A - zI)$ jest gęsta wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $\bar{z}$ nie jest wartością własną operatora A^* .*

Dowód. Warunek $\text{Ran}(A - zI)$ nie jest gęsta jest równoważny istnieniu $0 \neq v \perp \text{Ran}(A - zI)$, tzn. $\langle Aw - zw, v \rangle = 0$ dla $w \in D(A)$. Równoważnie

$$\langle Aw, v \rangle = z\langle w, v \rangle = \langle w, \bar{z}v \rangle, \quad w \in D(A)$$

Ostatnia równość oznacza, że $v \in D(A^*)$ oraz $A^*v = \bar{z}v$. □

Przechodzimy do dowodu twierdzenia.

Dowód. ($\implies$) Niech A będzie istotnie samosprężony. Załóżmy, że $v \perp \text{Ran}(A - zI)$. Z dowodu lematu otrzymujemy $A^*v = \bar{z}v$. Z założenia operator A^* jest symetryczny, bo $A^* = (\bar{A})^* = \bar{A}$. Zatem $v = 0$.

($\impliedby$) Załóżmy, że przestrzenie $\text{Ran}(A - zI)$ oraz $\text{Ran}(A - \bar{z}I)$ są gęste w $\mathcal{H}$ dla pewnej liczby $z \notin \mathbb{R}$. Pokażemy, że $\text{Ran}(\bar{A} - zI) = \mathcal{H}$. Mamy

$$\text{Ran}(A - zI) \subseteq \text{Ran}(\bar{A} - zI) \subseteq \mathcal{H}$$

Wystarczy udowodnić, że przestrzeń $\text{Ran}(\bar{A} - zI)$ jest domknięta. Dla $v \in D(\bar{A})$ mamy

$$\langle (\bar{A} - zI)v, v \rangle = \langle \bar{A}v, v \rangle - z\langle v, v \rangle$$

Zatem

$$|\operatorname{Im} \langle (\bar{A} - zI)v, v \rangle| = |\operatorname{Im} z| \|v\|^2 \quad (*)$$

Założmy, że ciąg $w_n = (\bar{A} - zI)v_n$, $v_n \in D(\bar{A})$ jest zbieżny. Oznaczmy $w = \lim_n w_n$. Pokażemy, że $w \in \operatorname{Ran}(\bar{A} - zI)$. Ciąg v_n spełnia warunek Cauchy'ego na podstawie równości (*) zastosowanej do $v := v_n - v_m$. Rzeczywiście

$$\begin{aligned} |\operatorname{Im} z| \|v_n - v_m\|^2 &= |\operatorname{Im} \langle (\bar{A} - zI)(v_n - v_m), v_n - v_m \rangle| \\ &= |\operatorname{Im} \langle w_n - w_m, v_n - v_m \rangle| \leq \|w_n - w_m\| \|v_n - v_m\| \end{aligned}$$

Otrzymujemy $\|v_n - v_m\| \leq |\operatorname{Im} z|^{-1} \|w_n - w_m\|$. Oznaczmy $v = \lim_n v_n$. Ze zbieżności w_n wynika zbieżność $\bar{A}v_n = w_n + zv_n \rightarrow w + zv$. Z domkniętości wykresu dostajemy $v \in D(\bar{A})$ oraz $\bar{A}v = w + zv$, czyli $(\bar{A} - zI)v = w$. To kończy dowód równości $\operatorname{Ran}(\bar{A} - zI) = \mathcal{H}$.

Pokażemy, że $A^* = \bar{A}$. Wystarczy udowodnić, że $A^* \subset \bar{A}$. Niech $v \in D(A^*)$. Z własności $\operatorname{Ran}(\bar{A} - zI) = \mathcal{H}$ istnieje wektor $w \in D(\bar{A}) \subset D(A^*)$ taki, że

$$(A^* - zI)v = (\bar{A} - zI)w = (A^* - zI)w$$

Zatem $(A^* - zI)(v - w) = 0$. Tzn. $v - w$ jest wektorem własnym operatora A^* z wartością własną z . Jeśli $v \neq w$ to z lematu podprzestrzeń $\operatorname{Ran}(A - \bar{z}I)$ nie jest gęsta. Zatem $v = w$, czyli $v \in D(\bar{A})$. $\square$

Przykłady

(a) $\mathcal{H} = L^2(0, 1)$.

$$Af = if', \quad D(A) = \{f \in C^1[0, 1] : f(0) = f(1) = 0\}$$

Zauważmy, że $C^1[0, 1] \subset D(A^*)$ oraz $A^*g = ig'$ dla $g \in C^1[0, 1]$. Chcemy sprawdzić, czy A jest istotnie samosprzężony. W tym celu rozwiązujemy równanie $(A^* - zI)g = 0$ dla $g \in D(A^*)$. Założmy, że $g \in C^1[0, 1]$. Otrzymujemy równanie $ig' = zg$, którego rozwiązaniem jest $g(x) = e^{-izx} \in C^1$. Stąd A nie jest istotnie samosprzężony.

(b) $\mathcal{H} = L^2(0, 1)$.

$$Af = if', \quad D(A) = \{f \in C^1[0, 1] : f(0) = f(1)\}$$

Pokażemy, że A jest istotnie samosprzężony. Wystarczy udowodnić, że podprzestrzenie $\operatorname{Ran}(A \pm iI)$ są gęste. Sprawdźmy gęstość $\operatorname{Ran}(A - iI)$. Założmy, że $f \perp \operatorname{Ran}(A - iI)$. Tzn.

$$\langle (A - iI)g, f \rangle = 0, \quad g \in D(A)$$

Otrzymujemy warunek

$$\langle g, f \rangle = \langle g', f \rangle, \quad g \in D(A) \quad (**)$$

Funkcja $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ jest ciągła. Zatem

$$\langle g, f \rangle = \int_0^1 g(x) \overline{f(x)} dx = g(x) \overline{F(x)} \Big|_0^1 - \int_0^1 g'(x) \overline{F(x)} dx = g(1) \overline{F(1)} - \langle g', F \rangle$$

Podstawiając $g \equiv 1$ do $(**)$ dostajemy $F(1) = 0$. Czyli

$$\langle g', f \rangle = \langle g, f \rangle = -\langle g', F \rangle$$

Zbiór $\{g' : g \in D(A)\}$ składa się ze wszystkich funkcji ciągłych o całce 0. Ten zbiór jest gęsty (zadanie) w

$$L_0^2(0, 1) := \left\{ h \in L^2(0, 1) : \int_0^1 h(x) dx = 0 \right\} = 1^\perp$$

Zatem $f + F \perp L_0^2(0, 1)$. Czyli $f(x) + F(x) = C$ prawie wszędzie, dla pewnej stałej C . Uzyskujemy $f(x) = -F(x) + C$ prawie wszędzie. Funkcja $F(x)$ jest ciągła. Możemy przyjąć, że $f(x) = -F(x) + C$ dla $0 \leq x \leq 1$. Stąd f jest ciągła, czyli F jest klasy C^1 . Zatem f jest również klasy C^1 . Różniczkując otrzymujemy $f' = -f$. Zatem $f(x) = de^{-x}$. Z warunku $\int_0^1 f(x) dx = 0$ uzyskujemy $d = 0$, czyli $f = 0$.

Dla operatora symetrycznego A oraz $z \notin \mathbb{R}$ operator $A - zI$ jest różnowartościowy ze wzoru $(*)$. Jeśli A jest samosprężony, to podprzestrzeń $\text{Ran}(A - zI)$ jest gęsta oraz domknięta, co wynika z dowodu Twierdzenia 5.13. Zatem $\text{Ran}(A - zI) = \mathcal{H}$. Reasumując

$$A - zI, A - \bar{z}I : D(A) \xrightarrow[1-1]{na} \mathcal{H}$$

Definicja 5.15. Dla $z \notin \mathbb{R}$ i operatora samosprężonego A określamy transformację Cayley'a wzorem

$$U_z = -(A - zI)(A - \bar{z}I)^{-1} : \mathcal{H} \xrightarrow[1-1]{na} \mathcal{H}$$

Twierdzenie 5.16. *Dla operatora samosprężonego A transformata Cayley'a jest operatorem unitarnym.*

Dowód. Dla $v \in D(A)$ mamy

$$\begin{aligned}\|(A - zI)v\|^2 &= \|Av\|^2 + |z|^2\|v\|^2 - \bar{z}\langle Av, v \rangle - z\langle v, Av \rangle \\ &= \|Av\|^2 + |z|^2\|v\|^2 - 2\operatorname{Re}(z)\langle Av, v \rangle\end{aligned}$$

Ponieważ wynik nie zależy od $\operatorname{Im} z$, to $\|(A - zI)v\| = \|(A - \bar{z}I)v\|$. Mamy $U_z : (A - \bar{z}I)v \mapsto -(A - zI)v$. Ponieważ każdy wektor $w \in \mathcal{H}$ ma postać $w = (A - \bar{z}I)v$ dla pewnego $v \in \mathcal{H}$, to U_z jest izometrią z $\mathcal{H}$ na siebie. $\square$

Naszym celem jest wyrażenie operatora A za pomocą U_i .

Twierdzenie 5.17. *Dla $z \notin \mathbb{R}$ operator $I + U_z$ jest różnowartościowy oraz $\operatorname{Ran}(I + U_z) = D(A)$.*

Dowód. Dla $v \in D(A)$ mamy $U_z(A - \bar{z}I)v = -(A - zI)v$. Oznaczmy $w = (A - \bar{z}I)v$. Wtedy

$$(I + U_z)w = (A - \bar{z}I)v - (A - zI)v = (z - \bar{z})v \neq 0, \quad v \neq 0$$

Zatem $\operatorname{Ran}(I + U_z) \supseteq D(A)$. Z drugiej strony każdy wektor $w \in \mathcal{H}$ ma postać $(A - \bar{z}I)v$ dla pewnego $v \in D(A)$. Czyli $\operatorname{Ran}(I + U_z) \subseteq D(A)$. Ze wzoru wynika różnowartościowość. $\square$

Określmy $U := U_i = -(A - iI)(A + iI)^{-1}$.

Twierdzenie 5.18.

$$A = i(I - U)(I + U)^{-1}$$

Dowód. Obie strony są określone na $D(A)$, z poprzedniego twierdzenia. Mamy

$$I + U = (A + iI)(A + iI)^{-1} - (A - iI)(A + iI)^{-1} = 2i(A + iI)^{-1} \quad (*)$$

Dowód jest łatwy, gdy A jest ograniczonym operatorem samosprężonym, bo nie musimy dbać o dziedziny. Wtedy $I + U$ jest odwracalny*. Otrzymujemy

$$A = 2i(I + U)^{-1} - iI = 2i(I + U)^{-1} - i(I + U)(I + U)^{-1} = i(I - U)(I + U)^{-1}$$

*Gdy $I + U$ jest odwracalny, to $-1 \notin \sigma(U)$. Zatem $\sigma(U) \subset \{e^{it} : -\pi + \delta \leq t \leq \pi - \delta\}$ dla pewnej liczby $0 < \delta < \pi$.

W przypadku ogólnym mamy

$$A + iI : D(A) \xrightarrow[1-1]{na} \mathcal{H}, \quad I + U : \mathcal{H} \xrightarrow[1-1]{na} D(A)$$

Dalej

$$I - U = (A + iI)(A + iI)^{-1} + (A - iI)(A + iI)^{-1} = 2A(A + iI)^{-1}$$

Ponadto z (*) na przestrzeni $D(A)$ zachodzi wzór $(I + U)^{-1} = -\frac{i}{2}(A + iI)$. Otrzymujemy

$$i(I - U)(I + U)^{-1} = 2iA(A + iI)^{-1} \left(-\frac{i}{2}\right)(A + iI) = A$$

□

6 Rozkład spektralny operatora unitarnego

Dla liczby $-\pi < \lambda \leq \pi$ określamy funkcje

$$f_\pi(e^{it}) \equiv 1, \quad f_\lambda(e^{it}) = \begin{cases} 1 & -\pi < t < \lambda \\ 0 & \lambda \leq t \leq \pi \end{cases}, \quad -\pi < \lambda < \pi$$

Funkcje f_λ można uzyskać jako wstępujące granice punktowe ciągów funkcji ciągłych i nieujemnych na $\mathbb{T}$. Dla ustalonego operatora unitarnego określamy $E(\lambda) = f_\lambda(U)$. Operatory $E(\lambda)$ są nieujemne. Ponadto dla $\mu \leq \lambda$ mamy

$$E(\mu)E(\lambda) = f_\mu(U)f_\lambda(U) = (f_\mu f_\lambda)(U) = f_\mu(U) = E(\mu)$$

W szczególności $E(\lambda)^2 = E(\lambda)$, czyli $E(\lambda)$ jest rzutem ortogonalnym. Ponadto

$$E(\lambda) - E(\mu) = E(\lambda)[I - E(\mu)] \geq 0$$

Nierówność wynika również z faktu, że $f_\mu(e^{it}) \leq f_\lambda(e^{it})$, czyli

$$E(\lambda) - E(\mu) = (f_\lambda - f_\mu)(U) \geq 0$$

Twierdzenie 6.1. Dla $-\pi < \lambda < \pi$ zachodzi $\lim_{\mu \rightarrow \lambda^-} E(\mu)v = E(\lambda)v$ dla wszystkich $v \in \mathcal{H}$. Równoważnie rodzina $E(\lambda)$ jest mocno lewostronnie ciągła dla $-\pi < \lambda < \pi$.

Dowód. Niech $\mu_n \nearrow \lambda$. Istnieje rosnący ciąg g_n funkcji ciągłych na $\mathbb{T}$, zbieżny punktowo do f_λ spełniający $0 \leq g_n \leq f_{\mu_n}$. Wtedy

$$0 \leq g_n(U) \leq f_{\mu_n}(U) \leq f_\lambda(U)$$

Ponieważ $f_\lambda(U)$ jest mocną granicą operatorów $g_n(U)$, to $f_{\mu_n}(U) \rightarrow f_\lambda(U)$ mocno, czyli $E(\mu_n) \rightarrow E(\lambda)$ mocno. W tym miejscu korzystamy z

Lemat 6.2. *Niech $0 \leq A_n \leq B_n$ oraz $B_n \rightarrow 0$ mocno. Wtedy $A_n \rightarrow 0$ mocno.*

Dowód. Mamy

$$0 \leq \langle A_n v, v \rangle \leq \langle B_n v, v \rangle$$

Zatem $\langle A_n v, v \rangle \rightarrow 0$. Ciąg norm $\|A_n\|$ jest ograniczony. Z nierówności

$$\|A_n v\|^2 \leq \|A_n\| \langle A_n v, v \rangle$$

otrzymujemy tezę. □

Lemat stosujemy do $B_n = f_\lambda(U) - g_n(U)$ oraz $A_n = f_\lambda(U) - f_{\mu_n}(U)$. □

Twierdzenie 6.3. $\lim_{\lambda \rightarrow -\pi^+} E(\lambda)v = 0$ dla $v \in \mathcal{H}$.

Dowód. Niech $\lambda_n \searrow -\pi$. Wtedy ciąg $E(\lambda_n)$ jest malejącym ciągiem operatorów nieujemnych, więc jest mocno zbieżny do pewnego rzutu E . Dla ustalonej liczby $-\pi < \lambda < \pi$ istnieje niemalejący ciąg funkcji ciągłych g_n zbieżny punktowo do f_λ taki, że $g(e^{it}) = 0$ dla $-\pi < t < \lambda_n$. Wtedy

$$g_n(U)E(\lambda_n) = g_n(U)f_{\lambda_n}(U) = (g_n f_{\lambda_n})(U) = 0$$

Z drugiej strony

$$0 = g_n(U)E(\lambda_n) \rightarrow E(\lambda)E \geq E \geq 0$$

Czyli $E = 0$. □

Określmy $E(-\pi) = 0$. Dla ustalonego wektora v rozważmy funkcję

$$t \mapsto \langle E(t)v, v \rangle, \quad -\pi \leq t \leq \pi$$

Funkcja ta jest rosnąca, lewostronnie ciągła dla $-\pi < t < \pi$ i prawostronnie ciągła w punkcie $-\pi$. Ponadto jej wartość w π wynosi 1. Możemy stosować całkę Riemanna-Stieltjesa na przedziale $[-\pi, \pi]$ dla funkcji ciągłych o okresie 2π , czyli funkcji ciągłych na $\mathbb{T} = \{e^{it} : -\pi < t \leq \pi\}$.

Twierdzenie 6.4.

$$\langle U^m v, v \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{imt} d\langle E(t)v, v \rangle$$

Dowód. Dla podziału $\mathcal{P}_n = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ przedziału $[-\pi, \pi]$ na n równych części mamy $I = \sum_{k=1}^n [(E(t_k) - E(t_{k-1}))]$. Oznaczmy $P_k = E(t_k) - E(t_{k-1})$. Wtedy

$$\langle U^m v, v \rangle = \sum_{k=1}^n \langle U^m P_k v, v \rangle = \sum_{k=1}^n \langle e^{imt}(U) P_k v, v \rangle = \sum_{k=1}^n \langle e^{imt}(U) [E(t_k) - E(t_{k-1})] P_k v, P_k v \rangle$$

Całka po prawej stronie jest granicą sum całkowych postaci

$$S(\mathcal{P}_n) = \sum_{k=1}^n e^{imt_{k-1}} [\langle E(t_k)v, v \rangle - \langle E(t_{k-1})v, v \rangle] = \sum_{k=1}^n \langle e^{imt_k} [E(t_k) - E(t_{k-1})] P_k v, P_k v \rangle$$

Istnieją rosnące ciągi $g_{k,l}$ funkcji ciągłych i nieujemnych zbieżne punktowo do f_{t_k} takie, że $g_{k,l}(e^{it}) = g_{k-1,l}(e^{it})$ dla $t \leq t_{k-2}$ oraz $0 \leq g_{k-1,l} \leq g_{k,l}$. Wtedy

$$\begin{aligned} \langle U^m v, v \rangle - S(\mathcal{P}_n) &= \sum_{k=1}^n \langle [e^{imt} - e^{imt_k}](U) ([E(t_k) - E(t_{k-1})] P_k v, P_k v) \\ &= \lim_l \sum_{k=1}^n \langle [e^{imt} - e^{imt_k}](U) [g_{k,l}(U) - g_{k-1,l}(U)] P_k v, P_k v \rangle \\ &= \lim_l \sum_{k=1}^n \langle \{[e^{imt} - e^{imt_k}][g_{k,l}(e^{it}) - g_{k-1,l}(e^{it})]\}(U) P_k v, P_k v \rangle \end{aligned}$$

Wartość bezwzględna każdego składnika jest nie większa niż

$$\| [e^{im \cdot} - e^{imt_k}][g_{k,l} - g_{k-1,l}] \|_{\infty} \| P_k v \|^2 \leq \frac{m}{n} \| P_k v \|^2$$

Zatem

$$|\langle U^m v, v \rangle - S(\mathcal{P}_n)| \leq \frac{m}{n} \sum_{k=1}^n \| P_k v \|^2 = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \langle P_k v, v \rangle = \frac{m}{n} \| v \|^2$$

□

Wniosek 6.5. Dla dowolnej funkcji ciągłej f na $\mathbb{T}$ i $v \in \mathcal{H}$ mamy

$$\langle f(U)v, v \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) d\langle E(t)v, v \rangle$$

Dowód. Wzór jest spełniony dla wielomianów $p(z)$. Funkcja ciągła $f(z)$ jest jednostajną granicą wielomianów $p_n(z)$. Wtedy $p_n(U) \rightarrow f(U)$ w normie operatorowej. Zatem

$$\langle f(U)v, v \rangle = \lim_n \langle p_n(U)v, v \rangle = \lim_n \int_{-\pi}^{\pi} p_n(e^{it}) d\langle E(t)v, v \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) d\langle E(t)v, v \rangle$$

□

Wzór z twierdzenia zapisujemy skrótowo

$$f(U) = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) dE(t)$$

Twierdzenie 6.6.

(a) Załóżmy, że $E(\lambda_1) = E(\lambda_2)$ dla $-\pi < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \pi$. Wtedy

$$\{e^{it} : \lambda_1 < t < \lambda_2\} \cap \sigma(U) = \emptyset$$

(b) Jeśli

$$\{e^{it} : \lambda_1 \leq t \leq \lambda_2\} \cap \sigma(U) = \emptyset$$

to $E(\lambda_1) = E(\lambda_2)$.

Dowód. (a) Niech $\lambda_1 < \mu < \lambda_2$. Wtedy $[\mu - \delta, \mu + \delta] \subset (\lambda_1, \lambda_2)$ dla pewnej liczby $\delta > 0$. Istnieje funkcja ciągła $F(t)$ o okresie 2π taka, że $F(t) = (e^{it} - e^{i\mu})^{-1}$ dla $|t - \mu| > \delta$. Określmy $f(e^{it}) = F(t)$. Z twierdzenia otrzymujemy

$$\begin{aligned} \langle (U - e^{i\mu}I)f(U)v, v \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} [e^{it} - e^{i\mu}]f(e^{it}) d\langle E(t)v, v \rangle \\ &= \int_{-\pi}^{\lambda_1} [e^{it} - e^{i\mu}]f(e^{it}) d\langle E(t)v, v \rangle + \int_{\lambda_2}^{\pi} [e^{it} - e^{i\mu}]f(e^{it}) d\langle E(t)v, v \rangle \\ &= \int_{-\pi}^{\lambda_1} d\langle E(t)v, v \rangle + \int_{\lambda_2}^{\pi} d\langle E(t)v, v \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} d\langle E(t)v, v \rangle = \langle v, v \rangle \end{aligned}$$

Zatem $(U - e^{i\mu}I)f(U) = f(U)(U - e^{i\mu}I) = I$.

(b) Z założenia istnieje $\delta > 0$ taka, że

$$\{e^{it} : \lambda_1 - \delta \leq t \leq \lambda_2 + \delta\} \cap \sigma(U) = \emptyset$$

Niech $F(t)$ będzie funkcją ciągłą taką, że $F(t) = 1$ dla $-\lambda_1 \leq t \leq \lambda_2$ oraz $F(t) = 0$ dla t poza $-\lambda_1 - \delta < t < \lambda_2 + \delta$. Wtedy dla funkcji $f(e^{it}) = F(t)$ mamy

$$\|f(U)\| = \max_{z \in \sigma(U)} |f(z)| = 0$$

bo f zeruje się na spektrum $\sigma(U)$. Stąd $f(U) = 0$. Otrzymujemy

$$\begin{aligned} 0 = \langle f(U)v, v \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} F(t) d\langle E(t)v, v \rangle \\ &\geq \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\langle E(t)v, v \rangle = \langle E(\lambda_2)v, v \rangle - \langle E(\lambda_1)v, v \rangle \end{aligned}$$

Zatem $E(\lambda_1) = E(\lambda_2)$.

□

Lemat 6.7. Dla $-\pi < \lambda < \pi$ oraz funkcji ciągłej h na $\mathbb{T}$ mamy

$$h(U)E(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} h(e^{it}) \mathbf{1}_{(-\pi, \lambda)}(t) dE(t)$$

Dowód. Niech $G_n(t)$ będzie rosnącym ciągiem funkcji nieujemnych o okresie 2π zbieżnym punktowo do $\mathbf{1}_{(-\pi, \lambda)}(t)$. Wtedy $g_n(e^{it})$ są zbieżne punktowo i monotonicznie do $f_\lambda(e^{it})$, zatem $g_n(U) \rightarrow E(\lambda)$ mocno. Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \langle h(U)E(\lambda)v, v \rangle &= \lim_n \langle h(U)g_n(U)v, v \rangle = \lim_n \langle (hg_n)(U)v, v \rangle \\ &= \lim_n \int_{-\pi}^{\pi} h(e^{it})g_n(e^{it}) d\langle E(t)v, v \rangle = \lim_n \int_{-\pi}^{\pi} h(e^{it})G_n(t) d\langle E(t)v, v \rangle \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} h(e^{it}) \mathbf{1}_{(-\pi, \lambda)}(t) d\langle E(t)v, v \rangle \end{aligned}$$

□

Uwaga Możemy przyjąć, że dla ustalonej liczby $\delta > 0$ mamy $G_n(t) = 1$ dla $-\pi + \delta < t < \lambda - \delta$. Wtedy

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} h(e^{it}) G_n(t) d\langle E(t)v, v \rangle &= \int_{-\pi}^{-\pi+\delta} h(e^{it}) G_n(t) d\langle E(t)v, v \rangle \\ &+ \int_{-\pi+\delta}^{\lambda-\delta} h(e^{it}) d\langle E(t)v, v \rangle + \int_{\lambda-\delta}^{\lambda} h(e^{it}) G_n(t) d\langle E(t)v, v \rangle \end{aligned}$$

Skrajne całki można oszacować przez

$$\|h\|_{\infty} \langle E(-\pi + \delta)v, v \rangle, \quad \|h\|_{\infty} [\langle E(\lambda)v, v \rangle - \langle E(\lambda - \delta)v, v \rangle] \quad (*)$$

Ponadto

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} h(e^{it}) d\langle E(t)v, v \rangle &= \int_{-\pi}^{-\pi+\delta} h(e^{it}) d\langle E(t)v, v \rangle \\ &+ \int_{-\pi+\delta}^{\lambda-\delta} h(e^{it}) d\langle E(t)v, v \rangle + \int_{\lambda-\delta}^{\lambda} h(e^{it}) d\langle E(t)v, v \rangle \end{aligned}$$

Znowu skrajne całki można oszacować tak jak w (*).

Dla $-\pi < \lambda < \pi$ określamy

$$P_{\lambda} = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} [E(\lambda + \delta) - E(\lambda)], \quad P_{\pi} = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} [I - E(\pi - \delta)]$$

Wtedy P_{λ} są rzutami jako mocne granice przemienionych rzutów.

Twierdzenie 6.8. *Operator P_{λ} jest rzutem na podprzestrzeń wektorów własnych operatora U odpowiadających wartości własnej $e^{i\lambda}$.*

Dowód. Korzystamy z twierdzenia dla $h(z) = z$ oraz $h(z) \equiv 1$. Otrzymujemy

$$\langle UP_{\lambda}v, v \rangle - e^{i\lambda} \langle P_{\lambda}v, v \rangle = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{-\pi}^{\pi} [e^{it} - e^{i\lambda}] \mathbf{1}_{[\lambda, \lambda+\delta)}(t) d\langle E(t)v, v \rangle$$

Wartość bezwzględna funkcji podcałkowej jest nie większa niż δ . Zatem $UP_{\lambda} = e^{i\lambda}P_{\lambda}$.

Założmy, że $Uv = e^{i\lambda}v$. Wtedy $f(U)v = f(e^{i\lambda})v$ dla dowolnej funkcji $f \in C(\mathbb{T})$. Rozważmy przypadek $\lambda < \pi$. Dla $\delta > 0$ istnieje rosnący ciąg nieujemnych funkcji ciągłych $F_n(t)$, o okresie π , zbieżny punktowo do $\mathbb{1}_{(-\pi, \lambda+\delta)}(t)$ taki, że $F_n(t) = 1$ dla $-\pi + \delta < t \leq \lambda$. Wtedy dla $f_n(e^{it}) = F_n(t)$ mamy $f_n(U)v = f_n(e^{i\lambda})v = v$. Zatem

$$v = \lim_n f_n(e^{i\lambda})v = \lim_n f_n(U)v = E(\lambda + \delta)v$$

Z drugiej strony $E(\lambda)v = 0$. Istotnie, niech $F_n(t)$ będzie rosnącym ciągiem funkcji nieujemnych, o okresie 2π zbieżnym punktowo do $\mathbb{1}_{(-\pi, \lambda)}$. Wtedy $F_n(\lambda) = 0$. Zatem $f_n(e^{i\lambda}) = 0$. Stąd $f_n(U)v = f_n(e^{i\lambda})v = 0$. Stąd $E(\lambda)v = 0$.

Reasumując $[E(\lambda+\delta) - E(\lambda)]v = v$. Czyli $P_\lambda v = v$. Podobne rozumowanie można przeprowadzić dla $\lambda = -1 = e^{i\pi}$. $\square$