

# Analiza funkcjonalna I

Ryszard Szwarc\*

## Spis treści

<b>1</b>	<b>Przestrzenie unormowane</b>	<b>2</b>
1.1	Dodatek . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Operatory liniowe</b>	<b>14</b>
<b>3</b>	<b>Przestrzenie Hilberta</b>	<b>26</b>
3.1	Podstawowe własności . . . . .	26
3.2	Proces ortogonalizacji Grama-Schmidta . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Przestrzenie sprzężone</b>	<b>37</b>
<b>5</b>	<b>Twierdzenia Hahna-Banacha</b>	<b>40</b>
5.1	Przedłużanie funkcjonałów liniowych . . . . .	40
5.2	Granica Banacha . . . . .	46
5.3	Przestrzeń sprzężona do $C[a, b]$ . . . . .	47
5.4	Wersja geometryczna . . . . .	50
5.5	Wersja niezmiennicza . . . . .	55
<b>6</b>	<b>Twierdzenie Baire'a i zastosowania</b>	<b>61</b>
6.1	Twierdzenie Baire'a . . . . .	61
6.2	Twierdzenie Banacha-Steinhaus . . . . .	63
<b>7</b>	<b>Twierdzenie Stone'a-Weierstrassa</b>	<b>73</b>

---

\*Wykład prowadzony w semestrze zimowym 2007. Opracowany na podstawie notatek Magdaleny Świczewskiej

<b>8</b>	<b>Przestrzenie sprzężone do <math>L^p</math> i do <math>C(X)</math></b>	<b>81</b>
8.1	Wersja rzeczywista . . . . .	83
8.2	Wersja zespolona . . . . .	90
8.3	Twierdzenie Riesz . . . . .	91
<b>9</b>	<b>Słaba zbieżność w przestrzeniach unormowanych</b>	<b>91</b>
9.1	Słaba zbieżność ciągów . . . . .	91
9.2	Słabe topologie . . . . .	97
<b>10</b>	<b>Twierdzenie Arzeli-Ascoliego</b>	<b>100</b>
<b>11</b>	<b>Odwzorowania zwężające i zastosowania</b>	<b>105</b>
11.1	Twierdzenie o funkcji odwrotnej . . . . .	106
<b>12</b>	<b>Twierdzenie Kreina-Millmana</b>	<b>108</b>
<b>13</b>	<b>Zadania</b>	<b>111</b>

## 1 Przestrzenie unormowane

**Definicja 1.1.** Niech  $X$  będzie przestrzenią liniową nad  $\mathbb{C}$  (lub  $\mathbb{R}$ ). Normą określoną na  $X$  nazywamy funkcję  $X \ni x \mapsto \|x\| \in [0, \infty)$  spełniającą warunki

(i)  $\|x\| = 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $x = 0$ .

(ii)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ , dla  $\lambda \in \mathbb{C}$  oraz  $x \in X$ . (*jednorodność*)

(iii)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ , dla  $x, y \in X$ . (*warunek trójkąta*)

**Uwaga 1.2.** Z nierówności trójkąta wynika, że

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

Określmy funkcję  $d(x, y) = \|x - y\|$  dla  $x, y \in X$ . Wtedy  $d(x, y)$  jest metryką i  $X$  staje się przestrzenią metryczną.

**Przykłady.**

1.  $X = \mathbb{C}^n$  (lub  $\mathbb{R}^n$ ). Dla  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  możemy określić normy

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|,$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

2.  $X = C[0, 1]$  (funkcje ciągłe o wartościach zespolonych). Określamy tzw. normę jednostajną

$$\|f\|_\infty = \max_{0 \leq t \leq 1} |f(t)|.$$

Ta przestrzeń ma nieskończony wymiar, bo jednomiany  $1, x, x^2, x^3, \dots$  tworzą nieskończony układ liniowo niezależny. Jednakże układ ten nie jest bazą algebraiczną przestrzeni liniowej  $X$ . Możemy rozważać też inną normę:

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt.$$

3.  $X = \ell^\infty = \{x = (x_n)_{n=1}^\infty : \sup_n |x_n| < \infty\}$ .

$$\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|.$$

Zauważmy, że  $|x_n| \leq \|x\|_\infty$ .

**Definicja 1.3.** Przestrzeń metryczną nazywamy **zupelną**, jeśli każdy ciąg elementów tej przestrzeni spełniający warunek Cauchy'ego jest zbieżny.

**Definicja 1.4.** Przestrzeń unormowaną zupelną w metryce  $d(x, y) = \|x - y\|$  nazywamy **przestrzenią Banacha**.

**Przykład.** Przestrzenie  $\mathbb{R}$  i  $\mathbb{C}$  są przestrzeniami Banacha.

**Przykład.**  $\ell^\infty$  jest przestrzenią Banacha. W tym celu trzeba pokazać, że każdy ciąg Cauchy'ego  $x^{(k)}$  w  $\ell^\infty$  jest zbieżny do pewnego elementu  $x$  z  $\ell^\infty$ . Ustalmy wskaźnik  $n$ . Wtedy

$$|x_n^{(k)} - x_n^{(l)}| \leq \sup_{m \in \mathbb{N}} |x_m^{(k)} - x_m^{(l)}| \leq \|x^{(k)} - x^{(l)}\|_\infty.$$

Zatem dla dowolnej liczby  $n$  ciąg liczbowy  $(x_n^{(k)})_{k=1}^\infty$  spełnia warunek Cauchy'ego. Zatem ten ciąg ma granicę  $\lim_k x_n^{(k)} = x_n$ . Otrzymujemy w ten sposób ciąg  $x = (x_n)_{n=1}^\infty$ . Pokażemy, że  $x \in \ell^\infty$  oraz  $\|x^{(k)} - x\|_\infty \xrightarrow{k} 0$ . Ustalmy

więc liczbę dodatnią  $\varepsilon$ . Z warunku Cauchy'ego istnieje wskaźnik  $k_0$  taki, że dla  $k, l \geq k_0$  mamy

$$|x_n^{(k)} - x_n^{(l)}| \leq \|x^{(k)} - x^{(l)}\|_\infty < \varepsilon.$$

Przechodząc do granicy po lewej stronie, gdy  $l \rightarrow \infty$  otrzymamy

$$|x_n^{(k)} - x_n| \leq \varepsilon, \quad n = 1, 2, \dots$$

Zatem  $x^{(k)} - x \in \ell^\infty$  oraz

$$\|x^{(k)} - x\| \leq \varepsilon \quad k \geq k_0. \quad (1.1)$$

Otrzymujemy, że  $x$  leży w  $\ell^\infty$  jako suma dwu elementów z  $\ell^\infty$

$$x = -(x^{(k_0)} - x) + x^{(k_0)}.$$

Ponadto (1.1) oznacza, że  $x^{(k)}$  zbiega do  $x$  w  $\ell^\infty$ .

**Definicja 1.5.** Mówimy, że szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  elementów z przestrzeni unormowanej  $X$  jest zbieżny, jeśli szereg sum częściowych

$$s_n = \sum_{k=1}^n x_k$$

jest zbieżny.

Mówimy, że szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  jest bezwzględnie zbieżny, jeśli zbieżny jest szereg liczbowy  $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ .

**Twierdzenie 1.6.** Przestrzeń liniowa unormowana jest zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy każdy szereg bezwzględnie zbieżny jest zbieżny.

*Dowód.* ( $\Rightarrow$ ) Załóżmy, że  $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$ . Dla  $n > m$  mamy

$$\|s_n - s_m\| = \left\| \sum_{j=m+1}^n x_j \right\| \leq \sum_{j=m+1}^n \|x_j\| \leq \sum_{j=m+1}^{\infty} \|x_j\|.$$

Stąd wynika, że ciąg  $s_n$  spełnia warunek Cauchy'ego, zatem jest zbieżny.

( $\Leftarrow$ ) Niech  $x_n$  będzie ciągiem Cauchy'ego w  $X$ . Dla  $\varepsilon = 2^{-k}$  istnieje liczba naturalna  $n_k$  taka, że dla  $n, m > n_k$  mamy  $\|x_n - x_m\| < 2^{-k}$ . Można założyć, że  $n_{k+1} > n_k$ . Zatem

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < 2^{-k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Przyjmijmy  $y_0 = x_{n_1}$  oraz  $y_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$  dla  $k \geq 1$ . Wtedy szereg  $\sum y_k$  jest bezwzględnie zbieżny. Zatem szereg ten jest zbieżny. Obliczamy sumy częściowe tego szeregu i otrzymujemy

$$\sum_{l=0}^{k-1} y_l = x_{n_k}.$$

Zatem podciąg  $x_{n_k}$  jest zbieżny. Oznaczmy  $x = \lim_k x_{n_k}$ . Pokażemy, że  $x = \lim_n x_n$ . Ustalmy liczbę  $\varepsilon > 0$ . Z warunku Cauchy'ego istnieje liczba  $k_0$  taka, że

$$\|x_n - x_m\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad n, m \geq k_0.$$

Istnieje też liczba  $l_0$ , dla której

$$\|x_{n_l} - x\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad l \geq l_0.$$

Niech  $n \geq \max(k_0, l_0) = m_0$ . Wtedy  $n \geq k_0$  oraz  $n_{m_0} \geq m_0 \geq k_0$ . Zatem

$$\|x_n - x\| \leq \|x_n - x_{n_{m_0}}\| + \|x_{n_{m_0}} - x\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

□

**Przykład.** Rozważamy przestrzeń liniową

$$L^1_{\mathbb{R}}(0, 1) = \left\{ f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ mierzalna, } \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx < \infty \right\}.$$

Przyjmujemy, że dwie funkcje  $f$  i  $g$  są równe jeśli  $f(x) = g(x)$  prawie wszędzie dla  $x$  z przedziału  $(0, 1)$  względem miary Lebesgue'a. Pokażemy zupełność przestrzeni w normie  $\|\cdot\|_1$ . Wystarczy sprawdzić, że każdy szereg bezwzględnie zbieżny jest zbieżny. Niech  $\sum \|f_n\|_1 < \infty$ . Określmy funkcję

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|.$$

Jeśli szereg jest rozbieżny, przyjmujemy wartość  $\infty$ . Funkcja  $g$  jest mierzalna i nieujemna jako granica punktowa sum częściowych funkcji mierzalnych i nieujemnych. Na podstawie twierdzenia Beppo-Leviego mamy

$$\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 |f_n(x)| dx = \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n(x)\|_1 < \infty$$

Zatem  $g(x) < \infty$  prawie wszędzie, czyli szereg  $\sum f_n(x)$  jest bezwzględnie zbieżny prawie wszędzie. To pozwala określić

$$h(x) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), & \text{jeśli szereg jest zbieżny;} \\ 0, & \text{jeśli szereg jest rozbieżny.} \end{cases}$$

Pokażemy, że  $h \in L_{\mathbb{R}}^1(0, 1)$  oraz  $\sum f_n = h$  w normie przestrzeni  $L_{\mathbb{R}}^1(0, 1)$ . Mamy

$$\int_0^1 |h(x)| dx = \int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right| dx \leq \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| dx = \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_1 < \infty.$$

Dalej

$$\begin{aligned} \left\| h - \sum_{k=1}^n f_k \right\|_1 &= \int_0^1 \left| h(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) \right| dx = \int_0^1 \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| dx \\ &\leq \int_0^1 \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| dx = \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k(x)\|_1 \xrightarrow{n} 0. \end{aligned}$$

Tak samo dowodzi się, że przestrzeń  $L_{\mathbb{R}}^1(X, \mu)$  jest zupełna dla przestrzeni  $X$  z miarą  $\mu$ .

W przestrzeniach  $\mathbb{C}^n$  (lub  $\mathbb{R}^n$  oraz np.  $C[0, 1]$ ) można określić wiele norm.

**Definicja 1.7.** Dwie normy  $\|\cdot\|_1$  oraz  $\|\cdot\|_2$  określone na przestrzeni liniowej  $X$  nazywamy **równoważnymi** jeśli te normy są porównywalne, tzn. istnieją liczby dodatnie  $c_1$  i  $c_2$  spełniające

$$c_2 \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq c_1 \|x\|_2$$

dla wszystkich  $x$  z  $X$ .

**Uwaga 1.8.** Równoważność norm oznacza zatem, że iloraz norm dla niezerowych elementów jest ograniczony od góry i od dołu przez liczby dodatnie. Jeśli normy  $\|\cdot\|_1$  oraz  $\|\cdot\|_2$  są równoważne, to zbieżność ciągu  $x_n$  względem normy  $\|\cdot\|_1$  jest równoważna zbieżności tego ciągu w normie  $\|\cdot\|_2$ . Rzeczywiście, wynika to z nierówności

$$c_2\|x_n - x\|_2 \leq \|x_n - x\|_1 \leq c_1\|x_n - x\|_2.$$

Implikacja odwrotna też jest prawdziwa, tzn. jeśli zbieżność ciągów w dwu normach jest równoważna, to normy te muszą być równoważne (zadanie).

**Przykład.** Rozważmy  $C[0, 1]$  i dwie normy

$$\|f\|_\infty = \max_{0 \leq t \leq 1} |f(t)|, \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt.$$

Mamy

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt \leq \int_0^1 \|f\|_\infty dt = \|f\|_\infty.$$

Niech  $f_n(x) = x^n$ . Wtedy

$$\|f_n\|_\infty = 1, \quad \|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1}.$$

Stąd normy te nie są równoważne, bo iloraz norm nie jest ograniczony.

**Twierdzenie 1.9.** W przestrzeni  $\mathbb{C}^n$  (lub  $\mathbb{R}^n$ ) wszystkie normy są równoważne.

*Dowód.* Pokażemy, że dowolna norma  $\|\cdot\|$  jest równoważna z normą  $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ . Niech  $e_1, e_2, \dots, e_n$  oznaczają elementy standardowej bazy w  $\mathbb{C}^n$ . Tzn. ciąg  $e_i$  składa się z  $(n-1)$  zer i jedynki umieszczonej na  $i$ -tej pozycji. Wtedy

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\| \leq \left( \sum_{i=1}^n \|e_i\| \right) \|x\|_\infty$$

Przyjmując  $c_1 = \sum_{i=1}^n \|e_i\|$  otrzymujemy  $\|x\| \leq c_1 \|x\|_\infty$ . Pozostaje udowodnić, że istnieje stała  $c_2$  taka, że

$$c_2 \|x\|_\infty \leq \|x\|, \quad x \in \mathbb{C}^n.$$

Niech  $S = \{y \in \mathbb{C}^n \mid \|y\|_\infty = 1\}$ . Rozważmy funkcję  $\varphi : S \rightarrow (0, \infty)$  określoną wzorem  $\varphi(y) = \|y\|$ . Zbiór  $S$  jest domknięty i ograniczony w  $\mathbb{C}^n$ . Z kolei funkcja  $\varphi$  jest ciągła, bo

$$|\varphi(y) - \varphi(y_0)| = \left| \|y\| - \|y_0\| \right| \leq \|y - y_0\| \leq c_1 \|y - y_0\|_\infty.$$

Z twierdzenia Weierstrassa funkcja  $\varphi$  przyjmuje wartość najmniejszą w pewnym punkcie zbioru  $S$ . W szczególności ta funkcja jest ograniczona od dołu przez pewną dodatnią stałą  $c_2$ . Czyli  $\|y\| \geq c_2$  dla  $y \in S$ . Niech  $x \neq 0 \in \mathbb{C}^n$ . Wtedy element  $y = x/\|x\|_\infty$  należy do  $S$ . Z równości  $x = \|x\|_\infty y$  otrzymujemy zatem

$$\|x\| = \|x\|_\infty \|y\| \geq c_2 \|x\|_\infty.$$

□

**Uwaga 1.10.** Z twierdzenia wynika, że przestrzeń  $\mathbb{C}^n$  (i  $\mathbb{R}^n$ ) jest zupełna niezależnie od wyboru normy, bo ciągi zbieżne w jednej normie są zbieżne w każdej innej normie oraz ciągi Cauchy'ego w jednej normie są ciągami Cauchy'ego w każdej innej normie.

**Wniosek 1.11.**

(i) *Przestrzeń  $\mathbb{C}^n$  ( $\mathbb{R}^n$ ) jest zupełna w dowolnej normie.*

(ii) *Przestrzeń unormowana skończonego wymiaru jest zawsze zupełna.*

*Dowód.* (ii) Niech  $X$  będzie tą przestrzenią oraz  $\dim X = n$ . Niech  $f_1, f_2, \dots, f_n$  będzie bazą przestrzeni  $X$ . Określmy odwzorowanie  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{C}^n$  wzorem

$$X \ni \sum_{k=1}^n x_k f_k \xrightarrow{\varphi} (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Wtedy  $\varphi$  jest izomorfizmem przestrzeni  $X$  i  $\mathbb{C}^n$ . Z pierwszej części wniosku wynika, że  $X$  jest zupełna. □

Wiadomo, że jeśli podzbiór  $Y$  w przestrzeni metrycznej  $X$  jest przestrzenią metryczną zupełną, to  $Y$  jest domkniętym podzbiorem w  $X$ . Stąd natychmiast otrzymujemy

**Wniosek 1.12.** *Jeśli  $E$  jest podprzestrzenią liniową skończonego wymiaru w przestrzeni unormowanej  $X$ , to  $E$  jest domknięta w  $X$ .*



**Twierdzenie 1.13** (o najlepszej aproksymacji). *Niech  $E$  będzie podprzestrzenią liniową skończonego wymiaru w przestrzeni unormowanej  $X$ . Dla każdego elementu  $x$  z  $X$  istnieje element  $x_0$  taki, że*

$$\|x - x_0\| = \inf_{y \in E} \|x - y\|.$$

*Dowód.* Oznaczmy  $a = \inf_{y \in E} \|x - y\|$ . Dla liczby  $n$  istnieje element  $y_n \in E$  taki, że  $\|x - y_n\| < a + \frac{1}{n}$ . Wtedy

$$\|y_n\| \leq \|y_n - x\| + \|x\| < a + \|x\| + \frac{1}{n} \leq a + \|x\| + 1.$$

Zatem ciąg  $y_n$  jest ograniczony. Z twierdzenia Bolzano-Weierstrassa (bo  $\dim E < \infty$ ) możemy wybrać podciąg  $y_{n_k}$  zbieżny np. do  $x_0$ . Ponieważ  $E$  jest domknięta, to  $x_0 \in E$ . Dalej

$$a \leq \|x - x_0\| \leq \|x - y_{n_k}\| + \|y_{n_k} - x_0\| < a + \frac{1}{n_k} + \|y_{n_k} - x_0\| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} a.$$

Otrzymujemy  $\|x - x_0\| = a$  co kończy dowód.  $\square$

**Uwaga 1.14.** Jeśli norma spełnia

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \implies x = \alpha y \text{ dla } \alpha \in \mathbb{C},$$

to element  $x_0$  z tezy twierdzenia jest jedyny. Istotnie, załóżmy, że istnieją dwa elementy  $x_0$  oraz  $x_1$  spełniające

$$\|x - x_0\| = \|x - x_1\| = a.$$

Wtedy

$$a \leq \left\| x - \frac{x_0 + x_1}{2} \right\| = \left\| \frac{x - x_0}{2} + \frac{x - x_1}{2} \right\| \leq \left\| \frac{x - x_0}{2} \right\| + \left\| \frac{x - x_1}{2} \right\| = a.$$

Zatem

$$\left\| \frac{x - x_0}{2} + \frac{x - x_1}{2} \right\| = \left\| \frac{x - x_0}{2} \right\| + \left\| \frac{x - x_1}{2} \right\|.$$

Wtedy

$$\frac{x - x_0}{2} = \alpha \frac{x - x_1}{2}$$

dla pewnej liczby  $\alpha$ . Jeśli  $\alpha = 1$ , to  $x_0 = x_1$ . Jeśli zaś  $\alpha \neq 1$ , to obliczając  $x$  otrzymamy, że  $x \in E$  i wtedy  $x = x_0 = x_1$ . Można też zauważyć, że liczba  $\alpha$  musi być zawsze nieujemna. Jeśli  $\|x\| = \|y\| \neq 0$ , oraz  $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$  to  $\alpha = 1$ .

**Definicja 1.15.** Podzbiór przestrzeni metrycznej  $X$  nazywamy **gęstym**, jeśli dla dowolnego elementu  $x$  z  $X$  i dowolnej liczby  $\varepsilon > 0$  istnieje element  $a$  z  $A$  spełniający  $d(x, a) < \varepsilon$ . Przestrzeń metryczna jest **ośrodkowa**, jeśli posiada przeliczalny podzbiór gęsty.

**Uwaga 1.16.** Jeśli w przestrzeni metrycznej  $X$  znajdziemy nieprzeliczalną rodzinę rozłącznych otwartych kul (tzn. zbiorów postaci  $B(x, r) = \{y \in Y \mid d(x, y) < r\}$ ), to  $X$  nie jest ośrodkowa.

**Przykład.**  $X = \mathbb{R}^n$  (lub  $\mathbb{C}^n$ ).

$$\begin{aligned} A_{\mathbb{R}} &= \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{Q}\} \\ A_{\mathbb{C}} &= \{(z_1, z_2, \dots, z_n) \mid z_i \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}\} \end{aligned}$$

**Przykład.** Rozważmy  $X = C_{\mathbb{R}}[0, 1]$  z normą  $\|f\|_{\infty} = \sup_{0 \leq t \leq 1} |f(t)|$ . Z twierdzenia Weierstrassa dla dowolnej funkcji  $f$  istnieje ciąg wielomianów  $p_n$  taki, że  $p_n(x)$  zbieżny jednostajnie do  $f(x)$ . Tzn.  $\|p_n - f\|_{\infty} \rightarrow 0$ , gdy  $n \rightarrow \infty$ . Zatem wielomiany  $\mathcal{P}$  tworzą gęsty podzbiór w  $X$ . Wtedy zbiór

$$\mathcal{P}_0 = \{p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \mid n \in \mathbb{N}, a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Q}\}$$

jest przeliczalnym i gęstym podzbiorem w  $\mathcal{P}$ , a zatem również w  $X$ .

**Przykład.** Dla przestrzeni

$$\ell^2 = \left\{ (x_n)_{n=1}^{\infty} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty, x_n \in \mathbb{C} \right\}$$

zbiór

$$A = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \mid x_n \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}, x_n = 0 \text{ od pewnego miejsca}\}$$

jest przeliczalnym zbiorem gęstym.

**Przykład.** Rozważamy przestrzeń

$$\ell_{\mathbb{R}}^{\infty} = \left\{ x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \mid \|x\|_{\infty} = \sup_n |x_n| < \infty, x_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ta przestrzeń nie jest ośrodkowa. Rzeczywiście, dla podzbioru  $A \subseteq \mathbb{N}$  określmy

$$x_A(n) = \begin{cases} 1 & n \in A, \\ 0 & n \notin A. \end{cases}$$

Wtedy  $\|x_A - x_B\|_\infty = 1$  o ile  $A \neq B$ . Rozważmy kule  $B(x_A, \frac{1}{2})$  dla wszystkich  $A \subseteq \mathbb{N}$ . Te zbiory są rozłączne i jest ich continuum. Zatem  $\ell_\mathbb{R}^\infty$  nie jest ośrodkowa.

**Twierdzenie 1.17.** *Każdą przestrzeń unormowaną można uzupełnić do przestrzeni Banacha.*

*Dowód.* Niech  $X_0$  będzie przestrzenią unormowaną. Oznaczmy przez  $X$  rodzinę klas równoważności ciągów Cauchy'ego elementów z  $X_0$ . Dwa ciągi Cauchy'ego  $(x_n)$  oraz  $(y_n)$  są **równoważne**, co zapisujemy  $(x_n) \sim (y_n)$ , gdy  $\|x_n - y_n\| \xrightarrow[n]{} 0$ . Przestrzeń  $X_0$  utożsamiamy z podzbiorem  $X$  następująco

$$X_0 \ni x_0 \longmapsto [(x_0, x_0, \dots, x_0, \dots)]_\sim \in X,$$

gdzie  $(x_n)_\sim$  oznacza klasę równoważności ciągu. Wiemy z topologii, że  $X$  jest przestrzenią metryczną zupełną z metryką

$$d_X((x_n)_\sim, (y_n)_\sim) = \lim_n d_{X_0}(x_n, y_n) = \lim_n \|x_n - y_n\|_{X_0}.$$

$X$  jest przestrzenią liniową, bo

- (1)  $(x_n)_\sim + (y_n)_\sim = (x_n + y_n)_\sim$ .
- (2)  $\lambda(x_n)_\sim = (\lambda x_n)_\sim$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

Sprawdzimy, że definicja dodawania jest prawidłowa, tzn. nie zależy od wyboru reprezentantów w klasie równoważności. Niech  $(x_n) \sim (x'_n)$  oraz  $(y_n) \sim (y'_n)$ . Wtedy  $(x_n + y_n) \sim (x'_n + y'_n)$ , bo

$$\|(x_n + y_n) - (x'_n + y'_n)\|_{X_0} \leq \|x_n - x'_n\|_{X_0} + \|y_n - y'_n\|_{X_0} \xrightarrow[n]{} 0.$$

Analogicznie sprawdzamy (2).

Określmy kandydata na normę w  $X$  wzorem

$$\|(x_n)_\sim\|_X = \lim_n \|x_n\|_{X_0}.$$

Definicja jest poprawna, tzn. nie zależy od wyboru reprezentantów, bo jeśli  $(x_n) \sim (x'_n)$ , to

$$|\|x_n\|_{X_0} - \|x'_n\|_{X_0}| \leq \|x_n - x'_n\|_{X_0} \xrightarrow[n]{} 0.$$

Zatem

$$\lim_n \|x_n\|_{X_0} = \lim_n \|x'_n\|_{X_0},$$

o ile granica istnieje.

Dla  $(x_n)_\sim \in X$  mamy

$$| \|x_n\|_{X_0} - \|x_m\|_{X_0} | \leq \|x_n - x_m\|_{X_0}.$$

Zatem liczby  $\|x_n\|_{X_0}$  tworzą ciąg Cauchy'ego. Czyli granica  $\lim_n \|x_n\|_{X_0}$  istnieje. Pozostaje sprawdzić, że  $\| \cdot \|_X$  jest normą oraz, że  $\|(x_n)_\sim\|_X = \|x_0\|_{X_0}$ .

Warunek trójkąta i jednorodność wynikają z własności normy  $\| \cdot \|_{X_0}$ . Sprawdzamy kiedy  $\|[(x_n)_\sim]\|_X = 0$ . Otrzymujemy, że  $\lim \|x_n\|_{X_0} = 0$ , tzn.  $(x_n)_\sim \sim (0)$ . Sprawdzamy jeszcze zgodność z metryką  $d_X(\cdot, \cdot)$ . Ale

$$d_X((x_n)_\sim, (y_n)_\sim) = \lim_n \|x_n - y_n\|_{X_0} = \|(x_n)_\sim - (y_n)_\sim\|_X.$$

□

## 1.1 Dodatek

**Lemat 1.18** (F. Riesz). *Niech  $Y$  będzie domkniętą właściwą podprzestrzenią liniową unormowanej przestrzeni liniowej  $X$ . Dla dowolnej liczby  $0 < \theta < 1$  istnieje element  $x$  w  $X$  spełniający  $\|x\| = 1$  oraz*

$$d(x, Y) := \inf\{\|x - y\| : y \in Y\} \geq \theta.$$

**Uwaga 1.19.** Lemat mówi, że można znaleźć element  $x$ , dla którego ilorzaz odległości od domkniętej podprzestrzeni  $Y$  przez normę  $\|x\|$  jest dowolnie bliski liczbie 1.

*Dowód.* Ustalmy liczbę  $0 < \theta < 1$ . Niech  $x_0 \in X \setminus Y$ . Oznaczmy

$$a = d(x_0, Y) = \inf\{\|x_0 - y\| : y \in Y\}.$$

Liczba  $a$  jest dodatnia, bo jeśli  $a = 0$ , to istnieje ciąg  $y_n \in Y$  taki, że  $\|x_0 - y_n\| \xrightarrow{n} 0$ . Czyli  $y_n \xrightarrow{n} x_0$ . Ponieważ  $Y$  jest domknięta, to  $x_0 \in Y$ , co daje sprzeczność. Z dodatniości liczby  $a$  mamy  $a < a/\theta$ . Zatem istnieje element  $y_0 \in Y$  spełniający

$$a \leq \|x_0 - y_0\| \leq \frac{a}{\theta}.$$

Niech

$$x = c(x_0 - y_0), \quad \text{gdzie } c = \frac{1}{\|x_0 - y_0\|}.$$

Wtedy  $\|x\| = 1$ . Ponadto, dla  $y \in Y$  mamy

$$\|x - y\| = \|c(x_0 - y_0) - y\| = c\|x_0 - (y_0 + c^{-1}y)\| \geq ca = \frac{a}{\|x_0 - y_0\|} \geq \theta.$$

Zatem  $d(x, Y) \geq \theta$ . □

**Twierdzenie 1.20.** *Niech  $X$  będzie unormowaną przestrzenią liniową nieskończonego wymiaru. Wtedy istnieje ciąg elementów  $x_n$  w  $X$  spełniający warunki:  $\|x_n\| = 1$  oraz  $\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}$  dla  $n \neq m$ .*

*Dowód.* Z założenia istnieje nieskończony układ liniowo niezależny  $y_1, y_2, y_3, \dots$ . Określmy  $Y_n = \text{lin}\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ . Podprzestrzenie liniowe  $Y_n$  spełniają

$$Y_1 \subsetneq Y_2 \subsetneq \dots \subsetneq Y_n \subsetneq \dots$$

Stosując lemat Riesz dla  $Y_{n-1} \subsetneq Y_n$  i  $\theta = \frac{1}{2}$  otrzymujemy element  $x_n \in Y_n$  o własności  $\|x_n\| = 1$  oraz  $d(x_n, X_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$ . Niech  $n > m$ . Wtedy  $x_m \in X_m \subset X_{n-1}$ . Zatem  $\|x_n - x_m\| \geq d(x_n, X_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$ . □

**Wniosek 1.21.** *W nieskończonej wymiarowej liniowej przestrzeni unormowanej  $X$  kula jednostkowa  $B = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$  nie jest zbiorem zwartym.*

*Dowód.* Wyrazy ciągu  $x_n$  z poprzedniego twierdzenia leżą w kuli  $B$ , ale ciąg ten nie zawiera podciągu zbieżnego. □

**Wniosek 1.22.** *Założmy, że przestrzeń Banacha  $X$  ma nieskończony wymiar. Wtedy baza przestrzeni  $X$  jest nieprzeliczalna.*

*Dowód.* Założmy, że przestrzeń  $X$  posiada przeliczalną bazę  $e_1, e_2, e_3, \dots$ . Niech  $X_n = \text{lin}\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ . Zatem

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n,$$

bo każdy element  $x$  w  $X$  należy do pewnej przestrzeni  $X_n$ . Na podstawie dowodu poprzedniego twierdzenia istnieją elementy  $x_n \in X_n$  takie, że  $\|x_n\| =$

1 oraz  $d(x_n, X_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$ . Wtedy szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n}x_n$  jest bezwzględnie zbieżny, zatem jest zbieżny (por. Twierdzenie 1.6). Oznaczmy

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n}x_n.$$

Element  $y$  leży w  $X_{n_0}$  dla pewnej liczby  $n_0$ . Zatem

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} 4^{-n}x_n = y - \sum_{n=1}^{n_0} 4^{-n}x_n \in X_{n_0}.$$

Zatem

$$y_0 := \sum_{n=n_0+1}^{\infty} 4^{n_0+1-n}x_n \in X_{n_0}.$$

W konsekwencji otrzymujemy

$$\frac{1}{2} \leq d(x_{n_0+1}, X_{n_0}) \leq \|y_0 - x_{n_0+1}\|$$

$$\left\| \sum_{n=n_0+2}^{\infty} 4^{n_0+1-n}x_n \right\| \leq \sum_{n=n_0+2}^{\infty} 4^{n_0+1-n} = \frac{1}{3}.$$

Otrzymaliśmy sprzeczność. □

## 2 Operatory liniowe

Niech  $X = \mathbb{C}^n$ ,  $Y = \mathbb{C}^m$  oraz  $A$  będzie macierzą wymiaru  $m \times n$  o wyrazach zespolonych. Wtedy  $A$  możemy traktować jako odwzorowanie z  $X$  do  $Y$  poprzez wzór

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, \quad \text{gdzie } y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j.$$

Odwzorowanie  $A$  spełnia

$$\begin{aligned} A(x + x') &= Ax + Ax' & \text{gdzie } x, x' \in X, \\ A(\lambda x) &= \lambda Ax & \text{gdzie } \lambda \in \mathbb{C}, x \in X. \end{aligned}$$

**Definicja 2.1.** Operatorem liniowym  $T$  z przestrzeni liniowej  $X$  w przestrzeń liniową  $Y$  nazywamy odwzorowanie  $T : X \rightarrow Y$  spełniające:

$$\begin{aligned} T(x + x') &= Tx + Tx' \\ T(\lambda x) &= \lambda Tx. \end{aligned}$$

Założmy dodatkowo, że  $X$  i  $Y$  są przestrzeniami unormowanymi. Operator liniowy  $T : X \rightarrow Y$  nazywamy ograniczonym jeśli istnieje stała liczba  $C > 0$  taka, że

$$\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X, \quad x \in X.$$

**Twierdzenie 2.2.** Dla operatora liniowego  $T : X \rightarrow Y$ , pomiędzy przestrzeniami unormowanymi  $X$  i  $Y$  następujące warunki są równoważne.

- (a)  $T$  jest ciągłym odwzorowaniem w jednym punkcie.
- (b)  $T$  jest odwzorowaniem ciągłym w każdym punkcie.
- (c)  $T$  jest operatorem ograniczonym.

*Dowód.* (c)  $\implies$  (b)

Niech  $x \in X$  oraz  $x_n \xrightarrow[n]{} x$ . Wtedy z liniowości mamy

$$\|Tx_n - Tx\| = \|T(x_n - x)\| \leq C\|x_n - x\| \xrightarrow[n]{} 0.$$

Stąd  $Tx_n \xrightarrow[n]{} Tx$  w normie przestrzeni  $Y$ , czyli  $T$  jest ciągły w punkcie  $x$ .

(b)  $\implies$  (a)

To wynika jest oczywiste.

(a)  $\implies$  (c)

Pokażemy, że operator  $T$  jest ciągły w punkcie 0 wiedząc, że jest ciągły w jakimś punkcie  $x_0$ . Niech  $x_n \xrightarrow[n]{} 0$ . Wtedy  $u_n = x_n + x_0 \xrightarrow[n]{} x_0$ . Z założenia mamy

$$Tx_n + Tx_0 = T(x_n + x_0) = Tu_n \xrightarrow[n]{} Tx_0.$$

Zatem  $Tx_n \xrightarrow[n]{} 0 = T0$ .

Założmy nie wprost, że nie istnieje stała spełniająca warunek (c). To oznacza, że dla dowolnej liczby naturalnej  $n$  można znaleźć element  $x_n \in X$  taki, że

$$\|Tx_n\| > n\|x_n\|.$$

W szczególności  $x_n \neq 0$ . Określmy

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{x_n}{\|x_n\|}.$$

Wtedy  $\|u_n\| = 1/\sqrt{n}$ . Zatem  $u_n \xrightarrow{n} 0$ . Dalej

$$\|Tu_n\| = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\|Tx_n\|}{\|x_n\|} > \frac{1}{\sqrt{n}} n = \sqrt{n} \xrightarrow{n} \infty.$$

To przeczy ciągłości operatora  $T$  w punkcie 0. □

Jeśli  $T$  jest ograniczonym operatorem liniowym, to dla pewnej stałej  $C$  i dla wszystkich  $x \neq 0$  mamy

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq C.$$

Zatem

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq C.$$

**Definicja 2.3.** Liczbę

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

nazywamy **normą** operatora ograniczonego  $T$ .

Zauważmy, że dla  $x \in X$  mamy

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \|T\|, \quad x \neq 0.$$

Czyli  $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$  dla  $x \in X$  włącznie z  $x = 0$ . Zatem  $C = \|T\|$  jest najmniejszą liczbą nieujemną, dla której nierówność  $\|Tx\| \leq C\|x\|$  jest spełniona.

**Twierdzenie 2.4.**

$$\|T\| = \sup_{\|u\| \leq 1} \|Tu\|.$$

*Dowód.* Dla  $x \neq 0$  norma elementu  $x/\|x\|$  jest równa 1, to

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \left\| T \left( \frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \leq \sup_{\|u\| \leq 1} \|Tu\|.$$



Z drugiej strony

$$\sup_{\|u\| \leq 1} \|Tu\| = \sup_{0 < \|u\| \leq 1} \|Tu\| \leq \sup_{0 < \|u\| \leq 1} \frac{\|Tu\|}{\|u\|} \leq \sup_{u \neq 0} \frac{\|Tu\|}{\|u\|} = \|T\|.$$

□

**Przykład.** Rozważamy  $X = \mathbb{C}^n$  i  $Y = \mathbb{C}^m$  z normami euklidesowymi. Niech  $e_1, e_2, \dots, e_n$  i  $f_1, f_2, \dots, f_m$  oznaczają standardowe bazy w przestrzeniach  $X$  i  $Y$  odpowiednio. Niech  $T$  będzie operatorem liniowym z  $X$  do  $Y$ . Wtedy

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= \left\| T \left( \sum_{j=1}^n x_j e_j \right) \right\| = \left\| \sum_{j=1}^n x_j T e_j \right\| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \|T e_j\| \\ &\leq \left( \sum_{j=1}^n \|T e_j\|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right)^{1/2} = c \|x\|, \end{aligned}$$

gdzie  $c = \left( \sum_{j=1}^n \|T e_j\|^2 \right)^{1/2}$ . Zatem

$$\|T\| \leq \left( \sum_{j=1}^n \|T e_j\|^2 \right)^{1/2}.$$

Zapiszmy  $T$  w postaci macierzowej, tzn.

$$T e_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i.$$

Wtedy

$$\sum_{j=1}^n \|T e_j\|^2 = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m |a_{ij}|^2,$$

czyli norma  $\|T\|$  jest oszacowana z góry przez pierwiastek z sumy kwadratów wartości bezwzględnych wszystkich wyrazów macierzy związanej z  $T$ .

**Uwaga 2.5.** Z przykładu wynika, że każdy operator liniowy określony na przestrzeni skończenie wymiarowej jest ograniczony. Rzeczywiście obraz takiego operatora ma skończony wymiar, więc można go utożsamić z operatorem pomiędzy  $\mathbb{C}^n$  i  $\mathbb{C}^m$  dla pewnych  $n$  i  $m$ . Ponieważ normy na tych przestrzeniach są równoważne normie euklidesowej, to operator musi być ograniczony.

**Przykład.** Rozważamy przestrzeń  $C[0, 1]$  z normą  $\|f\|_\infty = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$ . Niech  $k(x, y)$  będzie funkcją ciągłą dwu zmiennych  $0 \leq x, y \leq 1$ . Określamy odwzorowanie  $T : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$  wzorem

$$(Tf)(x) = \int_0^1 k(x, y)f(y) dy, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Mamy

$$\begin{aligned} |(Tf)(x)| &\leq \int_0^1 |k(x, y)| |f(y)| dy \leq \|f\|_\infty \int_0^1 |k(x, y)| dy \\ &\leq \|f\|_\infty \sup_{0 \leq x \leq 1} \int_0^1 |k(x, y)| dy. \end{aligned}$$

Zatem dla  $c = \sup_{0 \leq x \leq 1} \int_0^1 |k(x, y)| dy$  mamy

$$\|Tf\|_\infty = \sup_{0 \leq x \leq 1} |(Tf)(x)| \leq c\|f\|_\infty.$$

Ostatecznie

$$\|T\| \leq \sup_{0 \leq x \leq 1} \int_0^1 |k(x, y)| dy.$$

Wielkość po prawej stronie jest skończona, bo z twierdzenia Weierstrassa funkcja  $k(x, y)$  jest ograniczona.

Założmy, że  $k(x, y) \geq 0$ . Wtedy dla funkcji stałe równej 1 mamy  $\|1\|_\infty = 1$  oraz

$$(T1)(x) = \int_0^1 k(x, y) dy.$$

Zatem

$$\|T1\|_\infty = \sup_{0 \leq x \leq 1} \int_0^1 k(x, y) dy.$$

Stąd wynika, że

$$\|T\| \geq \sup_{0 \leq x \leq 1} \int_0^1 k(x, y) dy.$$

Reasumując otrzymujemy, że

$$\|T\| = \sup_{0 \leq x \leq 1} \int_0^1 k(x, y) dy.$$

Funkcja  $k(x, y)$  nie musi być ciągła, aby odpowiadający jej operator  $T$  przekształcał  $C[0, 1]$  w  $C[0, 1]$ . Na przykład operatorowi funkcji pierwotnej

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(y) dy$$

odpowiada funkcja

$$k(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq y \leq x, \\ 0, & x < y \leq 1. \end{cases}$$

Ponieważ  $k(x, y) \geq 0$ , to

$$\|T\| = \sup_{0 \leq x \leq 1} \int_0^1 k(x, y) dy = \sup_{0 \leq x \leq 1} x = 1.$$

**Przykład.** Niech  $X = C^1[0, 1]$  oraz  $Y = C[0, 1]$ . W obu przestrzeniach wprowadzamy normę  $\|\cdot\|_\infty$ . Rozważamy operator pochodnej  $Tf = f'$ . Dla  $f_n(x) = x^n$  mamy  $\|f_n\|_\infty = 1$ , ale  $\|Tf_n\|_\infty = \|nx^{n-1}\|_\infty = n$ . Zatem operator  $T$  nie jest ograniczony.

W przestrzeni  $X = C^1[0, 1]$  bardziej naturalne będzie wprowadzenie normy

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

Po tej zmianie przestrzeń  $X$  staje się zupełna oraz operator  $Tf = f'$  jest ograniczony, bo

$$\|Tf\|_\infty = \|f'\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = \|f\|.$$

Zatem norma operatora  $T$  nie przekracza liczby 1.

**Twierdzenie 2.6.** Niech  $X_0$  będzie gęstą podprzestrzenią liniową przestrzeni unormowanej  $X$ . Załóżmy, że operator liniowy  $T_0 : X_0 \rightarrow Y$ , gdzie  $Y$  jest przestrzenią Banacha, jest ograniczony. Wtedy istnieje rozszerzenie operatora  $T_0$  do operatora  $T$  ograniczonego z przestrzeni  $X$  w  $Y$ .

**Uwaga 2.7.** Rozszerzenie  $T$  jest jednoznaczne.

**Przykład.** Niech  $X_0 = L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ ,  $X = L^2(\mathbb{R})$  oraz  $Y = L^2(\mathbb{R})$ . W przestrzeniach  $X$  i  $Y$  wprowadzamy normę

$$\|f\|_2 = \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Wtedy przestrzeń  $Y$  jest zupełna (por. dowód zupełności dla  $L^1(0, 1)$ ). Podprzestrzeń  $X_0 = L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  jest gęsta w  $X = L^2(\mathbb{R})$ . Rzeczywiście dla  $f \in L^2(\mathbb{R})$  określamy  $f_n(x) = f(x)\mathbf{1}_{[-n, n]}(x)$ . Wtedy  $f_n \in L^2([-n, n]) \subset L^1([-n, n]) \subset L^1(\mathbb{R})$ . Rzeczywiście

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x)| dx &= \int_{-n}^n |f(x)| dx \leq \left( \int_{-n}^n |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_{-n}^n dx \right)^{1/2} \\ &\leq (2n)^{1/2} \left( \int_{-n}^n |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Ponadto  $f_n \xrightarrow{n} f$  w  $L^2(\mathbb{R})$ . Istotnie

$$\|f_n - f\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - f(x)|^2 dx = \int_{|x|>n} |f(x)|^2 dx \xrightarrow{n} 0.$$

Dla  $f \in X_0 = L^1 \cap L^2$  określamy

$$Tf = \hat{f}, \quad \hat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x} dx.$$

Z równości Plancherela otrzymujemy

$$\|Tf\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\lambda)|^2 d\lambda = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = 2\pi \|f\|_2^2.$$

Zatem  $\|Tf\|_2 = \sqrt{2\pi}\|f\|_2$ , dla  $f \in L^1 \cap L^2$ . Z Twierdzenia 2.6 transformata Fouriera rozszerza się do operatora  $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ . Operator  $\mathcal{F}$  jest ograniczony i spełnia  $\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \sqrt{2\pi}\|f\|_2$ .

Powracamy do dowodu Twierdzenia 2.6.

*Dowód.* Niech  $x \in X$ . Z założenia istnieje ciąg elementów  $x_n$  z  $X_0$  zbieżny do  $x$ . Badamy ciąg  $T_0x_n$ .

$$\|T_0x_n - T_0x_m\| = \|T_0(x_n - x_m)\| \leq \|T_0\| \|x_n - x_m\| \xrightarrow{n,m \rightarrow \infty} 0.$$

Zatem  $T_0x_n$  jest ciągiem Cauchy'ego w  $Y$ . Ciąg  $T_0x_n$  jest więc zbieżny, np. do elementu  $y$ . Określmy operator  $T$  wzorem  $Tx = y = \lim_n T_0x_n$ . Trzeba sprawdzić, że ta definicja jest poprawna, tzn. wynik  $y$  nie zależy od wyboru ciągu  $x_n$  zbieżnego do  $x$ . Załóżmy, że inny ciąg  $x'_n$  jest zbieżny do  $x$ . Utwórzmy nowy ciąg  $x_1, x'_1, x_2, x'_2, \dots$ . Ten ciąg jest zbieżny do  $x$ . Zatem, podobnie jak dla ciągu  $x_n$ , ciąg wartości  $Tx_1, Tx'_1, Tx_2, Tx'_2, \dots$  jest zbieżny. Ale podciąg wyrazów o numerach nieparzystych jest zbieżny do  $y$ , zatem również podciąg o numerach parzystych, czyli  $Tx'_n$  też jest zbieżny do  $y$ .

$T$  jest rozszerzeniem operatora  $T_0$ , bo jeśli  $x_0 \in X_0$  to możemy przyjąć  $x_n \equiv x_0$ . Wtedy

$$Tx_0 = \lim_n T_0x_n = T_0x_0.$$

Sprawdzamy liniowość. Niech  $x_n \xrightarrow{n} x$  oraz  $x'_n \xrightarrow{n} x'$ , gdzie  $x_n, x'_n \in X_0$ . Wtedy  $x_n + x'_n \xrightarrow{n} x + x'$ . Zatem

$$\begin{aligned} T(x + x') &= \lim_n T_0(x_n + x'_n) = \lim_n (T_0x_n + T_0x'_n) \\ &= \lim_n T_0x_n + \lim_n T_0x'_n = Tx + Tx' \end{aligned}$$

$$T(\lambda x) = \lim_n T_0(\lambda x_n) = \lambda \lim_n T_0(x_n) = \lambda Tx.$$

Sprawdzamy ograniczoność.

$$\|Tx\| = \|\lim_n T_0x_n\| = \lim_n \|T_0x_n\| \leq \|T_0\| \lim_n \|x_n\| = \|T_0\| \|x\|.$$

Otrzymaliśmy  $\|T\| \leq \|T_0\|$ . Ale oczywiście mamy  $\|T\| \geq \|T_0\|$ , bo kres górny występujący w określeniu normy oblicza się po większym zbiorze elementów. Reasumując  $\|T\| = \|T_0\|$ .  $\square$

**Uwaga 2.8.** Stosowanie Twierdzenia 2.6 dla przestrzeni skończenie wymiarowych nie ma sensu, bo taka przestrzeń nie posiada właściwych gęstych podprzestrzeni liniowych.

**Definicja 2.9.** Mówimy, że ograniczony operator liniowy  $T : X \rightarrow Y$  między unormowanymi przestrzeniami liniowymi jest **odwracalny**, jeśli istnieje ograniczony operator liniowy  $S : Y \rightarrow X$  spełniający

$$\begin{aligned} STx &= x, & \text{dla } x \in X, \\ TSy &= y, & \text{dla } y \in Y. \end{aligned}$$

W szczególności odwzorowanie  $T$  musi być różnowartościowe i obraz przez  $T$  musi być równy  $Y$ .

**Uwaga 2.10.** Jeśli  $T$  jest odwzorowaniem różnowartościowym i "na", to istnieje odwzorowanie odwrotne  $S$ . Ponieważ  $T$  jest operatorem liniowym, to również  $S$  jest operatorem liniowym. W definicji odwracalności dodatkowo żądamy, aby odwzorowanie odwrotne było ograniczone (równoważnie: ciągle).

**Przykład.** Niech  $X = \mathbb{C}^n$  oraz  $Y = \mathbb{C}^m$ . Rozważmy operator liniowy  $T : X \rightarrow Y$ . Odwzorowanie  $T$  nie może być odwracalne, gdy  $n \neq m$ , bo dla  $m < n$ ,  $T$  nie jest różnowartościowe. Z kolei dla  $m > n$  odwzorowanie  $T$  nie jest "na".

Jeśli  $n = m$ , to z kursu algebry liniowej wiemy, że  $T$  jest różnowartościowe wtedy i tylko wtedy, gdy to odwzorowanie jest "na", co z kolei jest równoważne warunkowi  $\det T \neq 0$ .

**Przykład.** Niech  $X = Y = \ell^1$ , gdzie  $\ell^1$  oznacza przestrzeń ciągów  $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$  bezwzględnie sumowalnych z normą

$$\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|.$$

Rozważamy operator

$$T(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots).$$

Wtedy

$$\|Tx\|_1 = \|x\|_1.$$

Zatem  $\|T\| = 1$ . Operator  $T$  jest różnowartościowy, ale nie jest odwracalny, bo ciąg  $(1, 0, 0, \dots)$  nie należy do obrazu operatora  $T$ . Rozważmy operator

$$S(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots).$$

Mamy

$$\|Sx\|_1 = \sum_{n=2}^{\infty} |x_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \|x\|_1.$$

Zatem  $\|S\| \leq 1$ . Tym razem operator  $S$  nie jest różnowartościowy, bo

$$S(1, 0, 0, \dots) = (0, 0, \dots) = S(0, 0, \dots).$$

Obraz operatora  $S$  jest równy  $\ell^1$ , bo

$$S(0, x_1, x_2, \dots) = (x_1, x_2, \dots).$$

**Fakt 2.11.** Załóżmy, że ograniczony operator liniowy  $T : X \rightarrow Y$  jest odwzorowaniem 1-1 i "na".  $T$  jest odwracalny wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnej dodatniej liczby  $c$  spełniona jest nierówność  $\|Tx\| \geq c\|x\|$ , dla wszystkich  $x$  w  $X$ .

*Dowód.* Oznaczmy symbolem  $S$  operator odwrotny do  $T$ .

( $\Rightarrow$ ). Załóżmy, że  $T$  jest odwracalny. Wtedy  $S$  jest ograniczony, zatem

$$\|x\| = \|STx\| \leq \|S\| \|Tx\|.$$

Stąd

$$\|Tx\| \geq c\|x\|, \quad c = \frac{1}{\|S\|}.$$

( $\Leftarrow$ ). Załóżmy, że dla  $c > 0$  mamy  $\|Tx\| \geq c\|x\|$ . Wtedy dla  $y \in Y$  mamy

$$\|y\| = \|TSy\| \geq c\|Sy\|.$$

Po przekształceniu otrzymujemy

$$\|Sy\| \leq \frac{1}{c}\|y\|.$$

To oznacza, że  $S$  jest ograniczony. □

**Przykład.** Niech  $X = c$  oraz  $Y = c_0$ , gdzie  $c$  oznacza przestrzeń wszystkich zbieżnych ciągów, natomiast  $c_0$  oznacza przestrzeń ciągów zbieżnych do zera. W obu przestrzeniach wprowadzamy normę

$$\|x\|_{\infty} = \sup_n |x_n|, \quad x = (x_n)_{n=1}^{\infty}.$$

Dla  $x \in X$  niech  $g = \lim_n x_n$ . Określmy operator  $T : X \rightarrow Y$  wzorem

$$T(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (g, x_1 - g, x_2 - g, \dots, x_n - g, \dots).$$

Łatwo stwierdzić, że  $T$  jest operatorem liniowym z  $X$  do  $Y$ . Sprawdźmy ograniczoność. Mamy  $|x_\infty| \leq \|x\|_\infty$  oraz

$$|x_n - g| \leq |x_n| + |g| \leq \|x\|_\infty + \|x\|_\infty = 2\|x\|_\infty.$$

Zatem

$$\|Tx\|_\infty \leq 2\|x\|_\infty,$$

czyli  $\|T\| \leq 2$ . Określmy operator  $S : Y \rightarrow X$  wzorem

$$S(y_0, y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) = (y_1 + y_0, y_2 + y_0, \dots, y_n + y_0, \dots).$$

$S$  jest operatorem liniowym z  $Y$  do  $X$  oraz

$$\|Sy\|_\infty = \sup_{n \geq 1} |y_n + y_0| \leq 2 \sup_{n \geq 0} |y_n| = 2\|y\|_\infty.$$

Ponadto  $STx = x$  oraz  $TSy = y$ . Zatem  $T$  jest operatorem odwracalnym.

**Definicja 2.12.** Dwie unormowane przestrzenie liniowe  $X$  i  $Y$  nazywamy **izomorficznymi**, jeśli istnieje ograniczony i odwracalny operator liniowy z  $X$  na  $Y$ .

**Uwaga 2.13.** Ostatni przykład pokazuje, że przestrzenie  $c$  i  $c_0$  są izomorficzne. Można udowodnić, że te przestrzenie nie są izometrycznymi izomorficznymi, tzn. nie istnieje operator liniowy  $T$  z  $X$  na  $Y$  spełniający  $\|Tx\|_\infty = \|x\|_\infty$  dla wszystkich  $x$  z  $X$ .

Dla dwu unormowanych przestrzeni liniowych  $X$  i  $Y$  symbolem  $B(X, Y)$  będziemy oznaczać zbiór wszystkich ograniczonych operatorów liniowych z  $X$  w  $Y$ . Dla  $T_1, T_2 \in B(X, Y)$  określamy

$$\begin{aligned} (T_1 + T_2)x &= T_1x + T_2x, \\ (\lambda T_1)x &= \lambda(T_1x), \quad \lambda \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Wtedy operatory  $T_1 + T_2$  oraz  $\lambda T_1$  są liniowe. Sprawdzamy ich ograniczoność.

$$\begin{aligned} \|(T_1 + T_2)x\| &= \|T_1x + T_2x\| \leq \|T_1x\| + \|T_2x\| \\ &\leq \|T_1\| \|x\| + \|T_2\| \|x\| = (\|T_1\| + \|T_2\|) \|x\|. \end{aligned}$$



Zatem  $\|T_1 + T_2\| \leq \|T_1\| + \|T_2\|$ . Dalej

$$\|(\lambda T_1)x\| = \|\lambda(T_1x)\| = |\lambda| \|T_1x\|.$$

W konsekwencji otrzymujemy

$$\|\lambda T_1\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|(\lambda T_1)x\| = |\lambda| \sup_{\|x\| \leq 1} \|T_1x\| = |\lambda| \|T_1\|.$$

Z obliczeń wynika, że  $B(X, Y)$  jest unormowaną przestrzenią liniową z normą operatorową  $\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|$ .

**Przykład.** Niech  $X = \mathbb{C}^n$  oraz  $Y = \mathbb{C}^m$ . Wtedy  $B(X, Y)$  można utożsamić z macierzami zespolonymi wymiaru  $m \times n$ . Czyli przestrzeń  $B(X, Y)$  jest izomorficzna z  $\mathbb{C}^{mn}$ .

**Twierdzenie 2.14.** *Jeśli  $Y$  jest przestrzenią Banacha, a  $X$  jest unormowaną przestrzenią unormowaną, to  $B(X, Y)$  jest przestrzenią Banacha.*

*Dowód.* Trzeba pokazać zupełność przestrzeni  $B(X, Y)$ . Niech  $T_n$  będzie ciągiem Cauchy'ego w  $B(X, Y)$ , tzn.

$$\|T_n - T_m\| \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0.$$

Dla  $x \in X$  mamy

$$\|T_nx - T_mx\| = \|(T_n - T_m)x\| \leq \|T_n - T_m\| \|x\|.$$

Zatem  $T_nx$  jest ciągiem Cauchy'ego w  $Y$ . Ponieważ  $Y$  jest przestrzenią Banacha, to ciąg  $T_nx$  jest zbieżny. Oznaczmy

$$Tx = \lim_n T_nx.$$

Wtedy  $T$  odwzorowuje  $X$  w  $Y$ . Odwzorowanie  $T$  jest liniowe, bo

$$\begin{aligned} T(\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2) &= \lim_n T_n(\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2) = \lim_n (\lambda_1T_nx_1 + \lambda_2T_nx_2) \\ &= \lambda_1 \lim_n T_nx_1 + \lambda_2 \lim_n T_nx_2 = \lambda_1Tx_1 + \lambda_2Tx_2. \end{aligned}$$

Pozostaje pokazać, że  $T$  jest ograniczony oraz, że  $\|T_n - T\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Ustalmy liczbę  $\varepsilon > 0$ . Z założenia istnieje liczba  $N$  taka, że dla  $n, m \geq N$  mamy  $\|T_n - T_m\| < \varepsilon$ . Niech  $n \geq N$ . Wtedy

$$\|(T_n - T)x\| = \|T_nx - Tx\| = \lim_m \|T_nx - T_mx\|.$$

Z drugiej strony jeśli  $m \geq N$ , to

$$\|T_n x - T_m x\| = \|(T_n - T_m)x\| \leq \|T_n - T_m\| \|x\| \leq \varepsilon \|x\|.$$

Zatem

$$\|(T_n - T)x\| \leq \varepsilon \|x\|, \quad n \geq N. \quad (2.1)$$

czyli

$$\|T_n - T\| \leq \varepsilon$$

dla  $n > N$ . W szczególności operator  $T_n - T$  jest ograniczony. Ponieważ  $T = T_n - (T_n - T)$ , to również  $T$  jest ograniczony. Ponadto z (2.1) otrzymujemy, że  $T_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T$  w normie operatorowej.  $\square$

**Wniosek 2.15.** *Jeśli  $Y = \mathbb{C}$  (lub  $\mathbb{R}$ ), to  $B(X, Y)$  jest przestrzenią Banacha.*

## 3 Przestrzenie Hilberta

### 3.1 Podstawowe własności

Będziemy rozważać zespolone przestrzenie liniowe  $X$  z iloczynem skalarnym  $\langle x, y \rangle$ . Z kursu algebry liniowej wiemy, że wyrażenie  $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$  jest normą. Iloczyn skalarny można wyrazić poprzez normę wzorem polaryzacyjnym.

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 \|x + i^k y\|^2 i^k.$$

Spełniona jest nierówność Schwarz

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Norma pochodząca od iloczynu skalarnego spełnia równość równoległoboku.

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Przypomnimy wzór

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re} \langle x, y \rangle.$$

Z kursu algebry liniowej wiemy, że

**Twierdzenie 3.1** (Jordan, von Neumann). *Norma przestrzeni liniowej pochodzi od iloczynu skalarnego wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek równoległoboku.*

**Przykłady.**

$$\begin{aligned} (1) \quad X = \mathbb{C}^n & \quad \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k} \\ (2) \quad X = \ell^2 & \quad \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k} \\ (3) \quad X = L^2(0, 2\pi) & \quad \langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx \end{aligned}$$

**Definicja 3.2.** *Przestrzeń zupełną z iloczynem skalarnym nazywamy **przestrzenią Hilberta**.*

**Lemat 3.3** (o najlepszej aproksymacji). *Niech  $M$  będzie podprzestrzenią domkniętą przestrzeni Hilberta  $\mathcal{H}$ . Wtedy dla  $x \in \mathcal{H}$  istnieje jedyny element  $x_0 \in M$  spełniający warunek*

$$\|x - x_0\| = d(x, M) = \inf_{v \in M} \|x - v\|.$$

*Dowód.* Niech  $d = d(x, M)$ . Wtedy istnieje element  $v_n \in M$  taki, że

$$d \leq \|x - v_n\| \leq d + \frac{1}{n}.$$

Pokażemy, że ciąg  $v_n$  jest zbieżny. Korzystając z równości równoległoboku mamy

$$\begin{aligned} \|v_n - v_m\|^2 &= \|(x - v_m) - (x - v_n)\|^2 \\ &= 2\|x - v_m\|^2 + 2\|x - v_n\|^2 - \|(x - v_m) + (x - v_n)\|^2 \\ &= 2\|x - v_m\|^2 + 2\|x - v_n\|^2 - 4\left\|x - \frac{1}{2}(v_m + v_n)\right\|^2 \\ &\leq 2\left(d + \frac{1}{m}\right)^2 + 2\left(d + \frac{1}{n}\right)^2 - 4d^2 \xrightarrow{n,m} 0. \end{aligned}$$

Zatem  $v_n$  jest ciągiem Cauchy'ego. Niech  $v_0 = \lim_n v_n$ . Wtedy

$$\|x - v_0\| = \lim_n \|x - v_n\| = d.$$

Ponadto  $v_0 \in M$ , bo  $M$  jest domkniętą podprzestrzenią. Z obliczeń wynika, że element  $v_0$  jest jedyny. Istotnie, załóżmy, że również  $\tilde{v}_0 \in M$  spełnia  $\|x - \tilde{v}_0\| = d$ . Rozważmy ciąg  $v_n$  postaci  $v_0, \tilde{v}_0, v_0, \tilde{v}_0, \dots$ . Z obliczeń wynika, że taki ciąg jest zbieżny. Zatem  $\tilde{v}_0 = v_0$ .  $\square$

**Definicja 3.4.** Niech  $M$  będzie podzbiorem przestrzeni  $\mathcal{H}$ . Określamy **dopełnienie ortogonalne**  $M^\perp$  wzorem

$$M^\perp = \{x \in \mathcal{H} : \langle x, y \rangle = 0, \text{ dla wszystkich } y \in M\}.$$

Z własności iloczynu skalarnego wynika, że zbiór  $M^\perp$  jest podprzestrzenią liniową. Co więcej,  $M^\perp$  jest domknięty, bo jeśli  $x_n \rightarrow x$  oraz  $x_n \in M^\perp$ , to dla  $y \in M$  mamy

$$|\langle x, y \rangle| = |\langle x, y \rangle - \langle x_n, y \rangle| = |\langle x - x_n, y \rangle| \leq \|x - x_n\| \|y\| \xrightarrow{n} 0.$$

Zatem  $\langle x, y \rangle = 0$  dla  $y \in M$ , czyli  $x \in M^\perp$ .

**Twierdzenie 3.5.** Niech  $M$  będzie domkniętą podprzestrzenią liniową w  $\mathcal{H}$ . Wtedy każdy element  $x$  w  $\mathcal{H}$  ma jednoznaczne przedstawienie w postaci

$$x = x_0 + x_1, \quad \text{gdzie } x_0 \in M, x_1 \in M^\perp.$$

Tzn.  $\mathcal{H} = M \oplus M^\perp$ .

*Dowód.* Mamy  $M \cap M^\perp = \{0\}$ , bo jeśli  $x \in M \cap M^\perp$ , to  $\langle x, x \rangle = 0$ , czyli  $x = 0$ . Stąd wynika jednoznaczność rozkładu. Rzeczywiście jeśli  $x_0 + x_1 = x'_0 + x'_1$ , dla  $x_0, x'_0 \in M$  oraz  $x_1, x'_1 \in M^\perp$ , to element  $x_0 - x'_0 = x'_1 - x_1$  leży w  $M \cap M^\perp$ . Stąd  $x_0 = x'_0$  i  $x_1 = x'_1$ . Niech  $x \in \mathcal{H}$ . Z poprzedniego lematu istnieje element  $x_0 \in M$  taki, że  $d = \|x - x_0\| = d(x, M)$ . Niech  $x_1 = x - x_0$ . Wtedy  $x = x_0 + x_1$ . Pokażemy, że  $x_1 \in M^\perp$ . Niech  $0 \neq y \in M$ . Trzeba udowodnić, że  $\langle x, y \rangle = 0$ . Wtedy dla  $t \in \mathbb{C}$  mamy

$$\begin{aligned} \|x - x_0\|^2 &\leq \|x - (x_0 + ty)\|^2 = \|(x - x_0) - ty\|^2 \\ &= \|x - x_0\|^2 + |t|^2 \|y\|^2 - 2\operatorname{Re} \langle x - x_0, ty \rangle \\ &= \|x - x_0\|^2 + |t|^2 \|y\|^2 - 2\operatorname{Re} \bar{t} \langle x - x_0, y \rangle \end{aligned}$$

Podstawmy

$$t = \frac{\langle x - x_0, y \rangle}{\|y\|^2}.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} \|x - x_0\|^2 &\leq \|x - x_0\|^2 + \frac{|\langle x - x_0, y \rangle|^2}{\|y\|^4} \|y\|^2 - 2 \frac{|\langle x - x_0, y \rangle|^2}{\|y\|^2} \\ &= \|x - x_0\|^2 - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2} \end{aligned}$$

Zatem  $\langle x, y \rangle = 0$ . □

**Uwaga 3.6.** Dla  $x \in \mathcal{H}$  element  $x_0$  nazywamy *rzutem ortogonalnym* na podprzestrzeń  $M$ .

W przestrzeni z iloczynem skalarnym elementy  $x, y$  nazywamy ortogonalnymi, jeśli  $\langle x, y \rangle = 0$ . Stosujemy wtedy zapis  $x \perp y$ . Rodzinę elementów o normie jeden i parami ortogonalnych nazywamy układem ortonormalnym. Maksymalny, ze względu na zawieranie, układ ortonormalny nazywamy bazą ortonormalną. Z kursu algebry liniowej wiemy, że

**Twierdzenie 3.7.** *Każda przestrzeń liniowa z iloczynem skalarnym posiada bazę ortonormalną.*

**Uwaga 3.8.** Baza ortonormalna nie jest bazą przestrzeni liniowej, tzn. nie jest maksymalnym układem elementów liniowo niezależnych chyba, że przestrzeń ma skończony wymiar.

**Lemat 3.9.** *Baza ortonormalna w ośrodkowej przestrzeni Hilberta jest przeliczalna.*

*Dowód.* Niech  $\{e_i\}_{i \in I}$  będzie bazą ortonormalną. Wtedy dla  $i, j \in I$  takich, że  $i \neq j$  mamy

$$\|e_i - e_j\|^2 = \|e_i\|^2 + \|e_j\|^2 = 2.$$

Czyli  $\|e_i - e_j\| = \sqrt{2}$ . Zatem kule  $B(e_i, \frac{1}{2})_{i \in I}$  są parami rozłączne. Z ośrodkowości ilość tych kul jest przeliczalna. Tzn. zbiór  $I$  jest przeliczalny. □

**Twierdzenie 3.10** (Nierówność Bessela). *Jeśli  $e_1, e_2, \dots, e_n$  jest układem ortonormalnym w przestrzeni  $X$ , to dla  $x \in X$  mamy*

$$\sum_{j=1}^n |\langle x, e_j \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

*Dowód.* Użyjemy prostego faktu, że jeśli elementy  $x_1, x_2, \dots, x_n$  są parami ortogonalne, to

$$\|x_1 + x_2 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \dots + \|x_n\|^2.$$

Rozważmy

$$s_n = \sum_{j=1}^n \langle x, e_j \rangle e_j.$$

Wtedy dla  $1 \leq k \leq n$  mamy

$$\langle x - s_n, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \langle s_n, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \langle x, e_k \rangle \langle e_k, e_k \rangle = 0.$$

To oznacza, że  $x - s_n \perp e_1, e_2, \dots, e_n$ . Zatem  $x - s_n \perp s_n$ . Otrzymujemy zatem

$$\|x\|^2 = \|x - s_n\|^2 + \|s_n\|^2 = \|x - s_n\|^2 + \sum_{j=1}^n |\langle x, e_j \rangle|^2 \geq \sum_{j=1}^n |\langle x, e_j \rangle|^2.$$

□

**Lemat 3.11.** *Jeśli  $\langle x, y \rangle = \langle x', y \rangle$  dla wszystkich  $y \in X$ , to  $x = x'$ .*

*Dowód.* Z założenia  $\langle x - x', y \rangle = 0$  dla  $y \in X$ . W szczególności dla  $y := x - x'$  otrzymujemy  $\|x - x'\|^2 = 0$ , czyli  $x = x'$ . □

**Lemat 3.12.**

$$\|x\| = \sup_{\|y\| \leq 1} |\langle x, y \rangle|.$$

*Dowód.* Możemy założyć, że  $x \neq 0$ . Z nierówności Schwarz'a mamy

$$\sup_{\|y\| \leq 1} |\langle x, y \rangle| \leq \|x\|.$$

Niech  $y_0 = x/\|x\|$ . Wtedy  $\|y_0\| = 1$  oraz  $\langle x, y_0 \rangle = \|x\|$ . Zatem

$$\sup_{\|y\| \leq 1} |\langle x, y \rangle| \geq \|x\|.$$

□

**Twierdzenie 3.13.** *Załóżmy, że przestrzeń Hilberta  $\mathcal{H}$  posiada przeliczalną bazę ortonormalną  $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$ . Wtedy dla każdego elementu  $x \in \mathcal{H}$  mamy*

$$(i) \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n.$$

$$(ii) \quad \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2.$$

*Dowód.* Ustalmy liczbę  $n$ . Z nierówności Bessela mamy

$$\sum_{n=1}^N |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2,$$

dla dowolnej liczby  $N$ . Przechodząc do granicy  $N \rightarrow \infty$  otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Zbadamy zbieżność szeregu w (i). W tym celu sprawdzimy warunek Cauchy'ego dla ciągu sum częściowych  $s_n = \sum_{j=1}^n \langle x, e_j \rangle e_j$ . Niech  $n > m$ . Wtedy

$$\begin{aligned} \|s_n - s_m\|^2 &= \left\| \sum_{j=m+1}^n \langle x, e_j \rangle e_j \right\|^2 = \sum_{j=m+1}^n |\langle x, e_j \rangle|^2 \\ &\leq \sum_{j=m+1}^{\infty} |\langle x, e_j \rangle|^2 \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Zatem szereg jest zbieżny. Oznaczmy

$$x' = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n.$$

Chcemy pokazać, że  $x' = x$ . Mamy

$$\begin{aligned} \langle x - x', e_k \rangle &= \langle x, e_k \rangle - \langle x', e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \lim_n \langle s_n, e_k \rangle \\ &= \langle x, e_k \rangle - \langle x, e_k \rangle \langle e_k, e_k \rangle = 0. \end{aligned}$$

Czyli  $x - x' \perp e_k$  dla każdego  $k$ . Ponieważ  $\{e_k\}$  jest maksymalnym układem ortogonalnym, to  $x - x' = 0$ . To dowodzi (i).

Przechodząc do granicy  $n \rightarrow \infty$  we wzorze

$$\|x\|^2 = \|x - s_n\|^2 + \sum_{n=1}^N |\langle x, e_n \rangle|^2$$

i korzystając z  $s_n \rightarrow x$  otrzymujemy (ii). □

**Uwaga 3.14.** Z dowodu twierdzenia wynika, że warunki (i) i (ii) są równoważne dla pojedynczego elementu  $x$ .

**Wniosek 3.15.** *Przestrzeń Hilberta z przeliczalną bazą ortonormalną jest ośrodkowa.*

*Dowód.* Każdy element przestrzeni jest granicą sum częściowych  $s_n$ , które są kombinacjami liniowymi elementów bazy ortonormalnej. Tzn. skończone kombinacje liniowe elementów bazy  $e_1, e_2, \dots$  leżą gęsto w  $\mathcal{H}$ . Z kolei każda taka skończona kombinacja liniowa jest granicą kombinacji liniowych ze współczynnikami z przeliczalnego zbioru  $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ . Ostatecznie kombinacje liniowe o współczynnikach z  $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$  leżą gęsto w  $\mathcal{H}$ . Takich kombinacji jest tylko przeliczalnie wiele.  $\square$

**Twierdzenie 3.16** (Równość Parsewala). *Dla przestrzeni Hilberta z przeliczalną bazą ortonormalną  $(e_n)$  mamy*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \overline{\langle y, e_n \rangle}.$$

*Dowód.* Niech  $x_n = \sum_{j=1}^n \langle x, e_j \rangle e_j$  oraz  $y_n = \sum_{j=1}^n \langle y, e_j \rangle e_j$ . Wiemy, że  $x_n \xrightarrow{n} x$  i  $y_n \xrightarrow{n} y$ . Zatem

$$\langle x, y \rangle = \lim_n \langle x_n, y_n \rangle = \lim_n \sum_{j=1}^n \langle x, e_j \rangle \overline{\langle y, e_j \rangle}$$

$\square$

**Wniosek 3.17.** *Niech  $M$  będzie domkniętą podprzestrzenią przestrzeni Hilberta  $\mathcal{H}$ . Załóżmy, że układ  $(e_n)_{n=1}^N$ , gdzie  $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , jest bazą ortonormalną w  $M$ . Dla każdego elementu  $x$  w  $\mathcal{H}$  jego rzut ortogonalny na  $M$  wyraża się wzorem*

$$P_M x = \sum_{n=1}^N \langle x, e_n \rangle e_n.$$

*Dowód.* Z założenia  $P_M x$  leży w  $M$ . Zatem z Twierdzenia 3.13 zastosowanego do  $M$  oraz z Twierdzenia 3.5 mamy

$$P_M x = \sum_{n=1}^N \langle P_M x, e_n \rangle e_n = \sum_{n=1}^N \langle x, e_n \rangle e_n.$$

$\square$



**Twierdzenie 3.18.** *Każda ośrodkowa przestrzeń Hilberta nieskończonego wymiaru jest izometrycznie izomorficzna z  $\ell^2$ .*

*Dowód.* Z Lematu 3.9 przestrzeń  $\mathcal{H}$  posiada przeliczalną bazę ortonormalną  $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ . Rozważmy odwzorowanie  $U : \mathcal{H} \rightarrow \ell^2$  określone wzorem

$$Ux = \{\langle x, e_n \rangle\}_{n=1}^\infty.$$

$U$  jest odwzorowaniem liniowym. Ponadto z Twierdzenia 3.13(ii) wnosimy, że  $\|Ux\|_{\ell^2} = \|x\|$ , tzn.  $U$  jest izometrią. W szczególności  $U$  jest różnowartościowe. Pozostaje sprawdzić, że  $U$  jest "na". Niech  $\{a_n\}_{n=1}^\infty \in \ell^2$ . Wtedy szereg  $\sum_{n=1}^\infty a_n e_n$  jest zbieżny w  $\mathcal{H}$ , bo jego sumy częściowe spełniają warunek Cauchy'ego. Oznaczmy  $x = \sum_{n=1}^\infty a_n e_n$ . Wtedy  $\langle x, e_n \rangle = a_n$ . Czyli  $Ux = \{a_n\}_{n=1}^\infty$ .  $\square$

**Przykład.** Rozważamy  $\mathcal{H} = L^2(0, 2\pi)$ . Niech  $e_n(t) = e^{int}$ , gdzie  $n \in \mathbb{Z}$ . Wiadomo z kursu szeregów Fouriera, że  $\{e_n\}_{n=-\infty}^\infty$  jest bazą ortonormalną w  $\mathcal{H}$ . Ponadto

$$\langle f, e_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt = \hat{f}(n).$$

Przyporządkowanie

$$f \longmapsto \{\hat{f}(n)\}_{n=-\infty}^\infty$$

jest izometrycznym izomorfizmem z  $\mathcal{H}$  na  $\ell^2$ .

### 3.2 Proces ortogonalizacji Grama-Schmidta

Niech  $\{u_n\}_{n=1}^N$  będzie układem liniowo niezależnym w przestrzeni  $\mathcal{H}$ . Naszym celem jest skonstruowanie układu ortonormalnego  $\{v_n\}_{n=1}^N$  o własności

$$L_n := \text{lin} \{u_1, u_2, \dots, u_n\} = \text{lin} \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

oraz  $\langle v_n, u_n \rangle > 0$  dla wszystkich  $n$ .

Określamy  $v_1 = u_1 / \|u_1\|$ . Załóżmy, że elementy  $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$  zostały już skonstruowane. Aby określić  $v_n$  rozważamy podprzestrzeń  $L_{n-1} = \text{lin} \{u_1, u_2, \dots, u_{n-1}\}$ . Niech  $u'_n$  oznacza rzut ortogonalny elementu  $u_n$  na  $L_{n-1}$ . Wtedy  $u_n \neq u'_n$ , bo  $u_n \notin L_{n-1}$ . Określamy

$$v_n = \frac{u_n - u'_n}{\|u_n - u'_n\|}.$$

Z konstrukcji otrzymujemy  $v_n \in L_n$  oraz  $v_n \perp L_{n-1}$ . Zatem dla  $m < n$  mamy  $v_m \in L_m \subset L_{n-1}$  oraz  $v_n \perp L_{n-1}$ . To oznacza, że  $v_m \perp v_n$  czyli otrzymaliśmy układ ortonormalny. Dalej

$$\langle v_n, u_n \rangle = \frac{\langle u_n - u'_n, u_n \rangle}{\|u_n - u'_n\|} = \frac{\langle u_n - u'_n, u_n - u'_n \rangle}{\|u_n - u'_n\|} = \|u_n - u'_n\| > 0.$$

**Uwaga 3.19.** Elementy  $v_n$  można określić bezpośrednim wzorem wyznacznikowym, w którym występują iloczyny skalarne  $\langle u_j, u_k \rangle$  (por. Zadanie ??).

## Funkcjonały liniowe

**Definicja 3.20.** Przestrzeń  $B(\mathcal{H}, \mathbb{C})$  nazywamy przestrzenią ograniczonych funkcjonałów liniowych na przestrzeni Hilberta  $\mathcal{H}$ .

**Przykład.** Dla ustalonego elementu  $y \in \mathcal{H}$  określamy  $f(x) = \langle x, y \rangle$  dla  $x \in \mathcal{H}$ . Wtedy

$$|f(x)| = |\langle x, y \rangle| \leq \|y\| \|x\|.$$

Ponadto z Lematu 3.12 mamy

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)| = \|y\|.$$

**Twierdzenie 3.21** (Lemat Riesza). *Dla każdego ograniczonego funkcjonału liniowego  $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  istnieje jedyny element  $y \in \mathcal{H}$  spełniający  $f(x) = \langle x, y \rangle$  dla wszystkich  $x \in \mathcal{H}$ .*

*Dowód.* Zbiór  $N = \{x \in \mathcal{H} \mid f(x) = 0\}$  jest domkniętą podprzestrzenią liniową w  $\mathcal{H}$ . Jeśli  $N = \mathcal{H}$ , to możemy przyjąć  $y = 0$ . Załóżmy, że  $N \neq \mathcal{H}$ . Zatem z Twierdzenia 3.5 istnieje element  $y_0 \neq 0$  taki, że  $y_0 \perp N$ . Ponadto  $f(y_0) \neq 0$ , bo  $y_0 \notin N$ . Niech  $y_1 = y_0/f(y_0)$ . Wtedy  $f(y_1) = 1$  oraz  $y_1 \perp N$ . Dla  $x \in \mathcal{H}$  mamy

$$x = (x - f(x)y_1) + f(x)y_1. \quad (3.1)$$

Pierwszy składnik rozkładu należy do  $N$  a drugi do  $N^\perp$ . Mnożąc skalarnie obie strony (3.1) przez  $y_1 \in N^\perp$  otrzymamy

$$\langle x, y_1 \rangle = \langle f(x)y_1, y_1 \rangle = f(x)\|y_1\|^2.$$

Zatem

$$f(x) = \frac{\langle x, y_1 \rangle}{\|y_1\|^2}.$$

Możemy więc określić  $y = y_1/\|y_1\|^2$ . Jedyność elementu  $y$  wynika z Lematu 3.11.  $\square$

**Wniosek 3.22.** *Przestrzeń  $B(\mathcal{H}, \mathbb{C})$  można utożsamić z  $\mathcal{H}$ . Przyporządkowanie*

$$\mathcal{H} \ni y \longmapsto f_y \in B(\mathcal{H}, \mathbb{C}), \quad \text{gdzie } f_y(x) = \langle x, y \rangle$$

*jest antyliniowe, tzn.*

$$\begin{aligned} f_{y_1+y_2} &= f_{y_1} + f_{y_2}, \\ f_{\lambda y} &= \bar{\lambda} f_y. \end{aligned}$$

**Definicja 3.23.** *Formą półtoraliniową  $F$  na  $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$  nazywamy odwzorowanie  $F : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  spełniające*

$$(i) \quad F(\lambda x + \mu y, z) = \lambda F(x, z) + \mu F(y, z).$$

$$(ii) \quad F(z, \lambda x + \mu y) = \bar{\lambda} F(z, x) + \bar{\mu} F(z, y).$$

*Mówimy, że forma  $F$  jest ograniczona, jeśli dla pewnej stałej  $c$  mamy*

$$|F(x, y)| \leq c \|x\| \|y\|, \quad x, y \in \mathcal{H}.$$

**Przykład.** Dla  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$  każda forma półtoraliniowa ma postać

$$F(x, y) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i \bar{y}_j.$$

Rzeczywiście

$$F(x, y) = F\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{i=1}^n y_i e_i\right) = \sum_{i,j=1}^n F(e_i, e_j) x_i \bar{y}_j,$$

zatem  $a_{ij} = F(e_i, e_j)$ . Forma  $F(x, y)$  jest ograniczona, bo z nierówności Schwarz'a

$$\begin{aligned} |F(x, y)| &= \left| \sum_{i,j=1}^n a_{ij} (x_i \bar{y}_j) \right| \leq \left( \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{i,j=1}^n |x_i|^2 |y_j|^2 \right)^{1/2} \\ &= \left( \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} \|x\| \|y\|. \end{aligned}$$

**Przykład.** Niech  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  będzie operatorem ograniczonym. Określmy  $F(x, y) = \langle x, Ay \rangle$ . Wtedy  $F$  jest ograniczoną formą półtoraliniową, bo

$$|F(x, y)| = |\langle x, Ay \rangle| \leq \|x\| \|Ay\| \leq \|A\| \|x\| \|y\|.$$

**Twierdzenie 3.24.** *Każda ograniczona forma półtoraliniowa na  $\mathcal{H}$  ma postać*

$$F(x, y) = \langle x, Ay \rangle$$

dla pewnego ograniczonego operatora liniowego  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ . Operator  $A$  jest jedyny.

*Dowód.* Ustalmy  $y \in \mathcal{H}$  i rozważmy odwzorowanie  $\varphi_y$

$$\mathcal{H} \ni x \xrightarrow{\varphi_y} F(x, y) \in \mathbb{C}.$$

Wtedy  $\varphi_y$  jest funkcjonałem liniowym. Ponadto

$$|\varphi_y(x)| = |F(x, y)| \leq c\|y\| \|x\|.$$

Zatem  $\varphi_y$  jest ograniczony oraz  $\|\varphi_y\| \leq c\|y\|$ . Z lematu Riesz'a istnieje jedyny wektor  $Ay$  taki, że

$$F(x, y) = \varphi_y(x) = \langle x, Ay \rangle.$$

Pokażemy, że przyporządkowanie  $y \mapsto Ay$  jest liniowe. Mamy

$$\begin{aligned} \langle x, A(y_1 + y_2) \rangle &= F(x, y_1 + y_2) = F(x, y_1) + F(x, y_2) \\ &= \langle x, Ay_1 \rangle + \langle x, Ay_2 \rangle = \langle x, Ay_1 + Ay_2 \rangle \end{aligned}$$

Zatem  $A(y_1 + y_2) = Ay_1 + Ay_2$ . Podobnie pokazujemy, że  $A(\lambda y) = \lambda Ay$ . Pozostaje sprawdzić ograniczoność operatora  $A$ . Mamy

$$\begin{aligned} \|Ay\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle x, Ay \rangle| = \sup_{\|x\| \leq 1} |F(x, y)| \\ &\leq \sup_{\|x\| \leq 1} (c\|x\| \|y\|) = c\|y\| \end{aligned}$$

Zatem  $\|A\| \leq c$ . □

**Wniosek 3.25.** *Dla ograniczonego operatora liniowego  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  istnieje jedyny operator  $A^* : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  spełniający*

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle \quad x, y \in \mathcal{H}.$$

Operator  $A^*$  nazywamy operatorem sprzężonym do operatora  $A$ .

*Dowód.* Funkcja  $F(x, y) = \langle Ax, y \rangle$  jest ograniczoną formą półtoraliniową. Zatem istnieje ograniczony operator liniowy  $A^*$  taki, że

$$\langle Ax, y \rangle = F(x, y) = \langle x, A^*y \rangle.$$

□

**Uwaga 3.26.** Jeśli  $\langle A_1x, y \rangle = \langle A_2x, y \rangle$ , to  $A_1 = A_2$ .

**Przykład.** Niech  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$  oraz  $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ , będzie odwzorowaniem liniowym zadany macierzą  $(a_{ij})$  gdzie  $a_{ij} = \langle Ae_j, e_i \rangle$ . Wyznaczamy macierz odwzorowania  $A^*$ .

$$\langle A^*e_i, e_j \rangle = \langle e_i, Ae_j \rangle = \overline{a_{ji}}.$$

Otrzymujemy  $A^* = \overline{A^T}$ , gdzie  $T$  oznacza transpozycję macierzy.

## 4 Przestrzenie sprzężone

**Definicja 4.1.** Przestrzeń  $B(X, \mathbb{C})$  (czyli przestrzeń ograniczonych funkcjonałów liniowych), nazywamy **przestrzenią sprzężoną** do przestrzeni unormowanej  $X$  i oznaczamy symbolem  $X^*$ .

**Przykład.** Z lematu Rieszego mamy  $\mathcal{H}^* = \mathcal{H}$ . Istotnie każdy funkcjonał liniowy na  $\mathcal{H}$  ma postać  $\varphi_y(x) = \langle x, y \rangle$  dla pewnego elementu  $y \in \mathcal{H}$ . Przyporządkowanie  $\mathcal{H} \ni \varphi_y \in \mathcal{H}^*$  spełnia

$$\begin{aligned} \varphi_{y_1+y_2} &= \varphi_{y_1} + \varphi_{y_2}, \\ \varphi_{\lambda y} &= \overline{\lambda} \varphi_y. \end{aligned}$$

**Przykład.** Niech  $X = c_0$  oznacza przestrzeń ciągów zbieżnych do zera z normą supremum wartości bezwzględnej wyrazów. Wykażemy, że  $X^* = \ell^1$ . Niech  $\Lambda$  oznacza funkcjonał z  $X^*$ . Każdy element  $x$  z  $c_0$  zapisujemy w postaci

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n,$$

gdzie

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots), e_n = (0, \dots, 0, \frac{1}{n}, 0, \dots).$$

Szereg jest zbieżny, bo ogon szeregu dąży do zera w normie przestrzeni  $c_0$ .  
Zatem

$$\Lambda(x) = \Lambda\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(x_n e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \Lambda(e_n).$$

Oznaczmy  $\lambda_n = \Lambda(e_n)$ . Wtedy

$$\Lambda(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n,$$

tzn. każdy funkcjonal liniowy na  $c_0$  ma postać jak wyżej dla pewnego ciągu  $\lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Załóżmy, że  $\lambda \in \ell^1$ . Wtedy dla  $x \in c_0$  mamy

$$|\Lambda(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| |x_n| \leq \sup_n |x_n| \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| = \|\lambda\|_1 \|x\|_{\infty}.$$

Zatem  $\Lambda \in X^*$  oraz  $\|\Lambda\| \leq \|\lambda\|_1$ .

Odwrotnie, załóżmy, że  $\Lambda \in X^*$ . Chcemy pokazać, że ciąg  $\lambda_n = \Lambda(e_n)$  leży w  $\ell^1$ . Dla ustalonej naturalnej liczby  $N$  określmy ciąg

$$f_N = (\overline{\operatorname{sgn}(\lambda_1)}, \overline{\operatorname{sgn}(\lambda_2)}, \dots, \overline{\operatorname{sgn}(\lambda_N)}, 0, 0, \dots) \in c_0.$$

Ponieważ  $\|f_N\|_{\infty} \leq 1$ , to

$$\sum_{n=1}^N |\lambda_n| = |\Lambda(f_N)| \leq \|\Lambda\| \|f_N\|_{\infty} \leq \|\Lambda\|.$$

Przechodząc do granicy z  $N$  otrzymujemy

$$\|\lambda\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \leq \|\Lambda\|.$$

Z wcześniejszego rozumowania wynika równość  $\|\Lambda\| = \|\lambda\|_1$ .

**Przykład.** Można udowodnić, że dla  $1 < p < \infty$  mamy  $(\ell^p)^* = \ell^q$ , gdzie  $q = p/(p-1)$  oraz  $(\ell^1)^* = \ell^{\infty}$ . Przeprowadzimy szkic dowodu dla  $1 < p < \infty$ . Ponieważ dla  $x \in \ell^p$  szereg  $x = \sum x_n e_n$  jest zbieżny w  $\ell^p$ , to dla funkcjonału  $\Lambda \in (\ell^p)^*$  mamy

$$\Lambda(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(e_n) x_n.$$

Założmy, że ciąg  $\lambda_n = \Lambda(e_n)$  leży w  $\ell^q$ . Wtedy z nierówności Höldera mamy

$$|\Lambda(x)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| |x_n|$$

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^q \right)^{1/q} \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} = \|\lambda\|_q \|x\|_p.$$

Zatem  $\|\Lambda\| \leq \|\lambda\|_q$ .

Odwrotnie, założmy, że  $\Lambda \in (\ell^p)^*$ . Pokażemy, że  $\lambda \in \ell^q$  oraz  $\|\lambda\|_q \leq \|\Lambda\|$ . W tym celu rozważmy ciąg

$$f_N = (\overline{\operatorname{sgn}(\lambda_1)} |\lambda_1|^{q-1}, \overline{\operatorname{sgn}(\lambda_2)} |\lambda_2|^{q-1}, \dots, \overline{\operatorname{sgn}(\lambda_N)} |\lambda_N|^{q-1}, 0, 0, \dots) \in \ell^p.$$

Mamy

$$\Lambda(f_N) = \Lambda \left( \sum_{n=1}^N \overline{\operatorname{sgn}(\lambda_n)} |\lambda_n|^{q-1} e_n \right) = \sum_{n=1}^N \overline{\operatorname{sgn}(\lambda_n)} |\lambda_n|^{q-1} \Lambda(e_n) = \sum_{n=1}^N |\lambda_n|^q. \quad (4.1)$$

Dalej obliczamy

$$\|f_N\|_p^p = \sum_{n=1}^N |\lambda_n|^{(q-1)p} = \sum_{n=1}^N |\lambda_n|^q. \quad (4.2)$$

Z ograniczoności funkcjonału  $\Lambda$  mamy

$$|\Lambda(f_N)| \leq \|\Lambda\| \|f_N\|_p.$$

Na podstawie (4.1) i (4.2) otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^N |\lambda_n|^q \leq \|\Lambda\| \left( \sum_{n=1}^N |\lambda_n|^q \right)^{1/p}.$$

Po przekształceniu mamy

$$\left( \sum_{n=1}^N |\lambda_n|^q \right)^{1/q} \leq \|\Lambda\|.$$

Ostatecznie  $\|\lambda\|_q \leq \|\Lambda\|$ .

## 5 Twierdzenia Hahna-Banacha

### 5.1 Przedłużanie funkcjonałów liniowych

Założmy, że  $Y$  jest podprzestrzenią liniową przestrzeni liniowej  $X$ . Na podprzestrzeni  $Y$  mamy określony funkcjonał liniowy  $\lambda$ . Naszym celem jest przedłużenie go do funkcjonału liniowego  $\Lambda$  określonego na przestrzeni  $X$ . Będziemy chcieli zachować pewne własności funkcjonału  $\lambda$ .

**Definicja 5.1.** Funkcję  $p : X \rightarrow \mathbb{R}$  nazywamy **wypukłą**, jeśli

$$p(\alpha x + \beta y) \leq \alpha p(x) + \beta p(y) \quad \text{dla } x, y \in X, \alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1.$$

**Przykład.** Jeśli  $X$  jest unormowaną przestrzenią liniową, to  $p(x) = \|x\|$  jest funkcją wypukłą.

**Twierdzenie 5.2** (Hahn-Banach). *Niech  $X$  będzie rzeczywistą przestrzenią liniową oraz  $p(x)$  będzie funkcją wypukłą na  $X$ . Założmy, że  $\lambda$  jest rzeczywistym funkcjonałem liniowym określonym na podprzestrzeni liniowej  $Y \subset X$ , spełniającym*

$$\lambda(y) \leq p(y), \quad y \in Y.$$

*Wtedy istnieje funkcjonał liniowy  $\Lambda$  określony na  $X$  i spełniający*

$$\begin{aligned} \Lambda(y) &= \lambda(y), & y \in Y, \\ \Lambda(x) &\leq p(x), & x \in X. \end{aligned}$$

*Dowód.* Założmy, że  $Y \subsetneq X$ . Wybierzmy  $x_0 \in X \setminus Y$ . Wtedy  $x_0 \neq 0$ . Określmy przestrzeń

$$X_0 = \text{lin}\{x_0, Y\} = \{\alpha x_0 + y : y \in Y, \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Każdy element z  $X_0$  ma jednoznaczny zapis w postaci  $\alpha x_0 + y$ . Rzeczywiście, jeśli  $\alpha x_0 + y = \alpha' x_0 + y'$ , to

$$(\alpha - \alpha')x_0 = y' - y \in Y.$$

Ponieważ  $x_0 \notin Y$ , to  $\alpha = \alpha'$  i wtedy  $y = y'$ .

Niech  $\tilde{\lambda}$  oznacza rozszerzenie funkcjonału  $\lambda$  na  $X_0$ . Funkcjonał  $\tilde{\lambda}$  jest wyznaczony przez liczbę  $\tilde{\lambda}(x_0)$ , bo

$$\tilde{\lambda}(\alpha x_0 + y) = \alpha \tilde{\lambda}(x_0) + \tilde{\lambda}(y) = \alpha \tilde{\lambda}(x_0) + \lambda(y).$$



Chcemy dobrać wartość  $\tilde{\lambda}(x_0)$  tak, aby spełniony był warunek

$$\tilde{\lambda}(\alpha x_0 + y) \leq p(\alpha x_0 + y), \quad \alpha \in \mathbb{R}, y \in Y.$$

Czyli chcemy, aby

$$\alpha \tilde{\lambda}(x_0) + \lambda(y) \leq p(\alpha x_0 + y).$$

Dla  $\alpha = 0$  warunek jest spełniony z założenia. Rozważmy  $\alpha \neq 0$ . Dla  $\alpha > 0$  musi zachodzić

$$\tilde{\lambda}(x_0) \leq \frac{1}{\alpha} [p(\alpha x_0 + y) - \lambda(y)].$$

Z kolei dla  $\alpha = -\beta$ ,  $\beta > 0$  musi być spełniony warunek

$$\tilde{\lambda}(x_0) \geq \frac{1}{\beta} [\lambda(y) - p(y - \beta x_0)].$$

Obie nierówności muszą być spełnione dla wszystkich  $y \in Y$  oraz wszystkich dodatnich liczb  $\alpha$  i  $\beta$  zatem liczba  $\tilde{\lambda}(x_0)$  musi spełniać warunek

$$\sup_{\beta > 0} \sup_{y \in Y} \frac{1}{\beta} [\lambda(y) - p(y - \beta x_0)] \leq \tilde{\lambda}(x_0) \leq \inf_{\alpha > 0} \inf_{y' \in Y} \frac{1}{\alpha} [p(\alpha x_0 + y') - \lambda(y')]. \quad (5.1)$$

Liczba  $\tilde{\lambda}(x_0)$  da się znaleźć tylko wtedy, gdy liczba po lewej stronie (5.1) jest nie większa niż liczba po prawej stronie. W tym celu wystarczy udowodnić, że dla dowolnych liczb  $\alpha, \beta > 0$  oraz dowolnych  $y, y' \in Y$  mamy

$$\frac{1}{\beta} [\lambda(y) - p(y - \beta x_0)] \leq \frac{1}{\alpha} [p(\alpha x_0 + y') - \lambda(y')].$$

Mnożąc obie strony przez  $\alpha\beta$ , odpowiednio przekształcając, i wreszcie dzieląc obie strony przez  $\alpha + \beta$  otrzymamy równoważną postać pożądaną nierówności:

$$\lambda \left( \frac{\alpha}{\alpha + \beta} y + \frac{\beta}{\alpha + \beta} y' \right) \leq \frac{\alpha}{\alpha + \beta} p(y - \beta x_0) + \frac{\beta}{\alpha + \beta} p(\alpha x_0 + y'). \quad (5.2)$$

Niech  $y_1 = y - \beta x_0$  oraz  $y_2 = \alpha x_0 + y'$ . Wtedy

$$\frac{\alpha}{\alpha + \beta} y_1 + \frac{\beta}{\alpha + \beta} y_2 = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} y + \frac{\beta}{\alpha + \beta} y'.$$

Zatem

$$\begin{aligned} \lambda \left( \frac{\alpha}{\alpha + \beta} y + \frac{\beta}{\alpha + \beta} y' \right) &= \lambda \left( \frac{\alpha}{\alpha + \beta} y_1 + \frac{\beta}{\alpha + \beta} y_2 \right) \\ &\leq p \left( \frac{\alpha}{\alpha + \beta} y_1 + \frac{\beta}{\alpha + \beta} y_2 \right) \leq \frac{\alpha}{\alpha + \beta} p(y_1) + \frac{\beta}{\alpha + \beta} p(y_2) \\ &= \frac{\alpha}{\alpha + \beta} p(y - \beta x_0) + \frac{\beta}{\alpha + \beta} p(\alpha x_0 + y'), \end{aligned}$$

co kończy dowód pożądaney nierówności (5.2).

**Uwaga 5.3.** Jeśli skrajne liczby w nierówności (5.1) są równe, to rozszerzenie  $\tilde{\lambda}$  jest jednoznaczne. W przeciwnym wypadku rozszerzenie nie jest jednoznaczne.

Niech  $\mathcal{E}$  oznacza rodzinę wszystkich rozszerzeń  $(\tilde{\lambda}, \tilde{X})$  funkcjonału  $(\lambda, Y)$  spełniających warunek  $\tilde{\lambda}(x) \leq p(x)$ ,  $x \in \tilde{X}$ , gdzie  $\tilde{X}$  jest podprzestrzenią  $X$  zawierającą  $Y$ . Rodzina takich rozszerzeń jest częściowo uporządkowana:

$$(\tilde{\lambda}_1, \tilde{X}_1) \prec (\tilde{\lambda}_2, \tilde{X}_2)$$

jeśli  $\tilde{X}_1 \subset \tilde{X}_2$  oraz  $\tilde{\lambda}_2(x) = \tilde{\lambda}_1(x)$  dla  $x \in \tilde{X}_1$ . Pokażemy, że każdy łańcuch w  $\mathcal{E}$  (czyli rodzina liniowo uporządkowana) jest ograniczony. Niech  $(\tilde{\lambda}_i, \tilde{X}_i)_{i \in I}$  będzie łańcuchem. Określmy  $\tilde{X} = \bigcup_{i \in I} \tilde{X}_i$ . Wtedy  $\tilde{X}$  jest przestrzenią liniową. Określamy funkcjonał  $\tilde{\lambda}$  na  $\tilde{X}$  następująco:

$$\tilde{\lambda}(x) = \tilde{\lambda}_i(x), \quad \text{jeśli } x \in \tilde{X}_i.$$

Definicja jest poprawna, bo jeśli  $x \in \tilde{X}_i \cap \tilde{X}_j$ , to  $\tilde{X}_i \subset \tilde{X}_j$  lub  $\tilde{X}_j \subset \tilde{X}_i$ . W każdym przypadku  $\tilde{\lambda}_i(x) = \tilde{\lambda}_j(x)$ . Nietrudno sprawdzić, że  $\tilde{\lambda}$  jest funkcjonałem liniowym na  $\tilde{X}$ . Ponadto

$$\tilde{\lambda}(x) = \tilde{\lambda}_i(x) \leq p(x), \quad \text{dla } x \in \tilde{X}_i.$$

Z konstrukcji rozszerzenie  $(\tilde{\lambda}, \tilde{X})$  jest większe niż  $(\tilde{\lambda}_i, \tilde{X}_i)$  dla wszystkich  $i \in I$ . Zatem z lematu Kuratowskiego-Zorna rodzina  $\mathcal{E}$  zawiera element maksymalny  $(\tilde{\lambda}, \tilde{X})$ . Jeśli  $\tilde{X} \subsetneq X$ , to z pierwszej części dowodu można rozszerzyć  $\tilde{\lambda}$  o jeden wymiar, co przeczyłoby maksymalności rozszerzenia  $(\tilde{\lambda}, \tilde{X})$ . Zatem  $\tilde{X} = X$ .  $\square$

**Definicja 5.4.** Mówimy, że funkcja  $p : X \rightarrow \mathbb{R}$  jest **absolutnie wypukła** jeśli

$$p(\alpha x + \beta y) \leq |\alpha|p(x) + |\beta|p(y)$$

dla  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ,  $|\alpha| + |\beta| = 1$ ,  $x, y \in X$ .

**Uwaga 5.5.** Warunek dotyczy przestrzeni liniowych nad  $\mathbb{C}$  i jest mocniejszy od wypukłości. Norma  $p(x) = \|x\|$  jest absolutnie wypukła.

**Twierdzenie 5.6** (Hahn-Banach). Niech  $\lambda$  będzie funkcjonałem liniowym na podprzestrzeni  $Y$  zespolonej przestrzeni liniowej  $X$ . Załóżmy, że  $\lambda$  spełnia

$$|\lambda(y)| \leq p(y), \quad y \in Y$$

dla pewnej absolutnie wypukłej funkcji  $p : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Wtedy istnieje funkcjonal liniowy  $\Lambda : X \rightarrow \mathbb{C}$  spełniający

$$\begin{aligned} \Lambda(y) &= \lambda(y), \quad y \in Y, \\ |\Lambda(x)| &\leq p(x), \quad x \in X. \end{aligned}$$

*Dowód.* Niech  $\ell(y) = \operatorname{Re} \lambda(y)$ . Wtedy  $\ell(y)$  jest rzeczywistym funkcjonałem liniowym na  $Y$ . Ponadto

$$\ell(y) = \operatorname{Re} \lambda(y) \leq |\lambda(y)| \leq p(y), \quad y \in Y.$$

Zatem z poprzedniego twierdzenia istnieje funkcjonal rzeczywisty  $\mathcal{L}$  określony na  $X$  i spełniający

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y) &= \ell(y), \quad y \in Y, \\ \mathcal{L}(x) &\leq p(x), \quad x \in X. \end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$\ell(iy) = \operatorname{Re} \lambda(iy) = \operatorname{Re} [i\lambda(y)] = -\operatorname{Im} \lambda(y).$$

Zatem

$$\lambda(y) = \operatorname{Re} \lambda(y) + i\operatorname{Im} \lambda(y) = \ell(y) - i\ell(iy). \quad (5.3)$$

Określmy

$$\Lambda(x) = \mathcal{L}(x) - i\mathcal{L}(ix), \quad x \in X. \quad (5.4)$$

Wtedy  $\Lambda$  jest funkcjonałem liniowym nad  $\mathbb{R}$  określonym na  $X$ , bo  $\mathcal{L}$  jest takim funkcjonałem. Dalej

$$\Lambda(ix) = \mathcal{L}(ix) - i\mathcal{L}(-x) = \mathcal{L}(ix) + i\mathcal{L}(x) = i[\mathcal{L}(x) - i\mathcal{L}(ix)] = i\Lambda(x).$$

Zatem  $\Lambda$  jest funkcjonałem liniowym nad  $\mathbb{C}$ . Ze wzorów (5.3) i (5.4) i z faktu, że  $\mathcal{L}$  jest rozszerzeniem  $\ell$  wynika, że

$$\Lambda(y) = \lambda(y), \quad y \in Y.$$

Zapiszmy

$$\Lambda(x) = |\Lambda(x)|e^{i\theta}.$$

Wtedy

$$|\Lambda(x)| = e^{-i\theta}\Lambda(x) = \Lambda(e^{-i\theta}x) = \mathcal{L}(e^{-i\theta}x) \leq p(e^{-i\theta}x) = p(x).$$

Ostatnia równość wynika z absolutnej wypukłości funkcji  $p$ . Wystarczy przyjąć  $\beta = 0$ .  $\square$

**Wniosek 5.7.** *Załóżmy, że  $Y$  jest podprzestrzenią liniową przestrzeni unormowanej  $X$  oraz  $\lambda$  jest ograniczonym funkcjonałem liniowym na  $Y$ . Wtedy istnieje ograniczony funkcjonał liniowy  $\Lambda$  określony na  $X$  i spełniający*

$$\begin{aligned} \Lambda(y) &= \lambda(y), \quad y \in Y, \\ \|\Lambda\|_{X^*} &= \|\lambda\|_{Y^*}. \end{aligned}$$

*Dowód.* Określmy  $p(x) = \|\lambda\|_{Y^*}\|x\|$ . Wtedy  $p(x)$  jest funkcją absolutnie wypukłą na  $X$ . Ponadto

$$|\lambda(y)| \leq \|\lambda\|_{Y^*}\|y\| = p(y), \quad y \in Y.$$

Z poprzedniego twierdzenia istnieje funkcjonał liniowy  $\Lambda : X \rightarrow \mathbb{C}$  spełniający

$$\begin{aligned} \Lambda(y) &= \lambda(y), \quad y \in Y, \\ |\Lambda(x)| &\leq p(x) = \|\lambda\|_{Y^*}\|x\|. \end{aligned}$$

Zatem  $\|\Lambda\|_{X^*} \leq \|\lambda\|_{Y^*}$ . Ale  $\|\Lambda\|_{X^*} \geq \|\lambda\|_{Y^*}$ , bo  $\Lambda$  jest rozszerzeniem funkcjonału  $\lambda$ .  $\square$

**Uwaga 5.8.** Jeśli  $M$  jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni Hilberta  $\mathcal{H}$  i  $\varphi$  jest ograniczonym funkcjonałem liniowym na  $M$ , to  $\varphi$  ma postać

$$\varphi(y) = \langle y, v \rangle, \quad y \in M,$$

dla pewnego wektora  $v \in M$ . Wtedy rozszerzenie  $\Phi$  na  $X$  ma postać

$$\Phi(x) = \langle x, v \rangle.$$

W tym wypadku jest to jedyne rozszerzenie nie podwyższające normy funkcjonału.

**Wniosek 5.9.** Niech  $x_0$  będzie niezerowym elementem przestrzeni unormowanej  $X$ . Wtedy istnieje funkcjonał  $\Lambda \in X^*$  taki, że

$$\Lambda(x_0) = \|x_0\|, \quad \|\Lambda\|_{X^*} = 1.$$

*Dowód.* Rozważmy prostą, czyli podprzestrzeń jednowymiarową,  $Y = \mathbb{C}x_0$ . Określmy funkcjonał  $\lambda : Y \rightarrow \mathbb{C}$  wzorem

$$\lambda(\alpha x_0) = \alpha \|x_0\|.$$

Zatem  $|\lambda(\alpha x_0)| = \|\alpha x_0\|$ . To oznacza, że  $\|\lambda\|_{Y^*} = 1$ . Z poprzedniego wniosku istnieje funkcjonał  $\Lambda : X \rightarrow \mathbb{C}$  spełniający  $\|\Lambda\|_{X^*} = \|\lambda\|_{Y^*} = 1$  oraz  $\Lambda(x_0) = \lambda(x_0) = \|x_0\|$ .  $\square$

**Wniosek 5.10.** Niech  $X$  będzie przestrzenią unormowaną. Wtedy dla  $x \in X$  mamy

$$\|x\| = \sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in X^*, \|\varphi\|_{X^*} \leq 1\}.$$

**Uwaga 5.11.** Wniosek jest uogólnieniem własności przestrzeni z iloczynem skalarnym:

$$\|x\| = \sup\{|\langle x, y \rangle| : \|y\| \leq 1\}.$$

*Dowód.* Dla  $\|\varphi\|_{X^*} \leq 1$  mamy

$$|\varphi(x)| \leq \|\varphi\|_{X^*} \|x\| \leq \|x\|.$$

Stąd

$$\sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in X^*, \|\varphi\|_{X^*} \leq 1\} \leq \|x\|.$$

Dla  $x \in X$  istnieje funkcjonał  $\varphi_0$  taki, że  $\|\varphi_0\|_{X^*} = 1$  oraz  $\varphi_0(x) = \|x\|$ . Zatem

$$\sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in X^*, \|\varphi\|_{X^*} \leq 1\} \geq \varphi_0(x) = \|x\|.$$

$\square$

**Wniosek 5.12.** Niech  $Y$  będzie podprzestrzenią liniową przestrzeni unormowanej  $X$  oraz  $x_0 \in X \setminus Y$ . Istnieje funkcjonal  $\Lambda \in X^*$  spełniający

$$\Lambda|_Y = 0, \quad \Lambda(x_0) = d,$$

gdzie  $d = d(x_0, Y) = \inf\{\|x_0 - y\| : y \in Y\}$ , oraz  $\|\Lambda\|_{X^*} \leq 1$ .

**Uwaga 5.13.** Dla  $Y = \{0\}$  tezę otrzymujemy z Wniosku 5.9.

*Dowód.* Niech  $X_0 = \text{lin}\{x_0, Y\} = \{\alpha x_0 - y : \alpha \in \mathbb{C}, y \in Y\}$ . Określmy funkcjonal  $\lambda : X_0 \rightarrow \mathbb{C}$  wzorem

$$\lambda(\alpha x_0 - y) = \alpha d.$$

Sprawdzamy ograniczoność funkcjonału  $\lambda$ .

$$\sup_{\alpha \neq 0, y \in Y} \frac{|\lambda(\alpha x_0 - y)|}{\|\alpha x_0 - y\|} = \sup_{\alpha \neq 0, y \in Y} \frac{|\alpha| d}{\|\alpha x_0 - y\|} = \sup_{\alpha \neq 0, y \in Y} \frac{d}{\|x_0 - \alpha^{-1}y\|} \leq 1.$$

Zatem  $\|\lambda\|_{X_0^*} \leq 1$ . Z twierdzenia Hahna-Banacha istnieje funkcjonal  $\Lambda \in X^*$  taki, że  $\|\Lambda\|_{X^*} = \|\lambda\|_{X_0^*} \leq 1$  oraz

$$\begin{aligned} \Lambda(y) &= \lambda(y) = 0, & y \in Y, \\ \Lambda(x_0) &= \lambda(x_0) = d. \end{aligned}$$

□

**Uwaga 5.14.** Jeśli  $x_0$  leży poza domknięciem podprzestrzeni  $Y$ , tzn.  $d > 0$ , to  $\|\Lambda\|_{X^*} = 1$ . Istotnie

$$\|\lambda\|_{Y_0^*} = \sup_{\alpha \neq 0, y \in Y} \frac{d}{\|x_0 - \alpha^{-1}y\|} = \frac{d}{\inf\{\|x_0 - y\| : y \in Y\}} = 1.$$

## 5.2 Granica Banacha

Rozważmy podprzestrzeń  $c \subset \ell^\infty$  złożoną z ciągów zbieżnych. W podprzestrzeni  $c$  określamy funkcjonal

$$\lambda(x) = \lim_n x_n, \quad x = \{x_n\} \in c.$$

Ten funkcjonal jest niezmienniczy na przesunięcia, tzn.

$$\lambda(x) = \lambda(s(x)), \quad \text{gdzie } s(x)_n = x_{n+1}.$$

Mamy

$$|\lambda(x)| \leq \sup_n |x_n| = \|x\|_\infty.$$

Zatem  $\|\lambda\|_{c^*} = 1$ . Chcemy znaleźć rozszerzenie  $\Lambda$  funkcjonału  $\lambda$  na  $\ell^\infty$  tak, aby funkcjonał  $\Lambda$  był też niezmienniczy na przesunięcia. Niech  $Y$  oznacza podprzestrzeń ciągów ograniczonych  $y$  takich, że granica

$$\lim_n \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}$$

istnieje. Wiemy, że  $c \subset Y$ . W przestrzeni  $Y$  określamy funkcjonał  $\lambda$  wzorem

$$\lambda(y) = \lim_n \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}, \quad y \in Y.$$

Mamy

$$|\lambda(y)| \leq \sup_n \frac{|y_1 + y_2 + \dots + y_n|}{n} \leq \sup_n \frac{|y_1| + |y_2| + \dots + |y_n|}{n} \leq \sup_n |y_n| = \|y\|_\infty.$$

Z twierdzenia Hahna-Banacha istnieje funkcjonał  $\Lambda : X \rightarrow \mathbb{C}$  taki, że  $\|\Lambda\|_{(\ell^\infty)^*} = 1$  oraz  $\Lambda(x) = \lim_n x_n$  dla  $x \in c$ , bo  $c \subset Y$  oraz  $\lambda(x) = \lim_n x_n$  jeśli  $x \in c$ . Pozostaje wykazać, że  $\Lambda(x) = \Lambda(s(x))$ . W tym celu zauważmy, że dla dowolnego ciągu  $x \in \ell^\infty$  ciąg  $y = x - s(x)$  leży w  $Y$  oraz  $\lambda(x - s(x)) = 0$ . Rzeczywiście

$$\frac{1}{n}(y_1 + y_2 + \dots + y_n) = \frac{1}{n}(x_1 - x_{n+1}) \rightarrow 0.$$

Zatem

$$\Lambda(x) = \Lambda(s(x)) + \Lambda(x - s(x)) = \Lambda(s(x)) + \lambda(x - s(x)) = \Lambda(s(x)).$$

### 5.3 Przestrzeń sprzężona do $C[a, b]$

**Twierdzenie 5.15** (F. Riesz). *Każdy ograniczony funkcjonał liniowy  $\varphi$  na  $C[a, b]$  (lub  $C_{\mathbb{R}}[a, b]$ ) ma postać*

$$\varphi(f) = \int_a^b f(x) dw(x)$$

dla pewnej funkcji  $w(x)$  o wahanii ograniczonym na  $[a, b]$ .

*Dowód.* Rozważmy funkcjonał  $\varphi \in C[a, b]^*$ . Symbolem  $B[a, b]$  oznaczamy przestrzeń wszystkich ograniczonych funkcji określonych na przedziale  $[a, b]$  z normą  $\|f\|_\infty = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|$ . Wtedy  $C[a, b] \subset B[a, b]$ . Istnieje rozszerzenie  $\Phi$  funkcjonału  $\varphi$  na przestrzeń  $B[a, b]$  takie, że  $\|\Phi\|_{B^*} = \|\varphi\|_C^*$ . Określmy funkcję

$$w(x) = \begin{cases} 0 & x = a, \\ \Phi(\chi_{[a,x]}) & a < x \leq b. \end{cases}$$

Zbadamy wachanie funkcji  $w(x)$ . W tym celu dzielimy przedział punktami  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . Wtedy

$$\sum_{j=1}^n |w(x_j) - w(x_{j-1})| = |\Phi(\chi_{[x_0, x_1]})| + \sum_{j=2}^n |\Phi(\chi_{(x_{j-1}, x_j]})|.$$

Oznaczmy  $g_1 = \chi_{[x_0, x_1]}$ ,  $g_j = \chi_{(x_{j-1}, x_j]}$  dla  $j \geq 2$ , oraz niech  $a_j = \overline{\text{sgn } \Phi(g_j)}$ . Wtedy

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |w(x_j) - w(x_{j-1})| &= \sum_{j=1}^n |\Phi(g_j)| = \sum_{j=1}^n a_j \Phi(g_j) \\ &= \Phi \left( \sum_{j=1}^n a_j g_j \right) \leq \|\Phi\|_{B^*} \left\| \sum_{j=1}^n a_j g_j \right\|_\infty \leq \|\Phi\|_{B^*} = \|\varphi\|_C^* \end{aligned}$$

Zatem

$$\text{Var}_{[a,b]}(w) \leq \|\varphi\|_C^*.$$

Podzielmy przedział  $[a, b]$  punktami  $x_k = a + (b - a)k/n$ . Dla funkcji  $f \in C[a, b]$  określamy ciąg funkcji

$$f_n(x) = \sum_{j=1}^n f(x_j) \chi_{I_j}, \quad I_1 = [x_0, x_1], \quad I_j = (x_{j-1}, x_j], \quad j \geq 2.$$

Wiadomo, że  $f_n \xrightarrow[n]{\Rightarrow} f$ , tzn.  $f_n \xrightarrow[n]{\rightarrow} f$  w normie przestrzeni  $B[a, b]$ . W związku z tym  $\Phi(f_n) \xrightarrow[n]{\rightarrow} \Phi(f) = \varphi(f)$ . Ale

$$\Phi(f_n) = \sum_{j=1}^n f(x_j) \Phi(\chi_{I_j}) = \sum_{j=1}^n f(x_j) [w(x_j) - w(x_{j-1})] \xrightarrow[n]{\rightarrow} \int_a^b f(x) dw(x).$$



Zatem

$$\varphi(f) = \int_a^b f(x) dw(x).$$

Ponadto

$$\begin{aligned} |\Phi(f_n)| &= \left| \sum_{j=1}^n f(x_j)[w(x_j) - w(x_{j-1})] \right| \leq \sum_{j=1}^n |f(x_j)| |w(x_j) - w(x_{j-1})| \\ &\leq \|f\|_\infty \sum_{j=1}^n |w(x_j) - w(x_{j-1})| \leq \text{Var}_{[a,b]}(w) \|f\|_\infty \end{aligned}$$

Zatem

$$|\varphi(f)| = |\Phi(f)| = \lim_n |\Phi(f_n)| \leq \text{Var}_{[a,b]}(w) \|f\|_\infty.$$

Stąd  $\|\varphi\|_{C^*} \leq \text{Var}_{[a,b]}(w)$ , czyli

$$\|\varphi\|_{C^*} = \text{Var}_{[a,b]}(w).$$

□

**Uwaga 5.16.** Różne funkcje  $w$  mogą wyznaczyć ten sam funkcjonal na  $C[a, b]$ , nawet jak przyjmiemy  $w(a) = 0$ . Na przykład dla  $0 \leq \alpha \leq 1$  niech

$$w_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \alpha, & x = \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Wtedy

$$\int_0^1 f(x) dw_\alpha(x) = f\left(\frac{1}{2}\right).$$

Każda funkcja o wahanii ograniczonym posiada granice jednostronne w każdym punkcie, bo jest kombinacją liniową czterech funkcji rosnących. Dla funkcji  $w$  o wahanii ograniczonym określamy

$$\tilde{w}(x) = \begin{cases} w(a), & x = a \\ w(b), & x = b \\ \lim_{t \rightarrow x^-} w(t), & a < x < b. \end{cases}$$

Wtedy  $\tilde{w}$  jest lewostronnie ciągła wewnątrz przedziału oraz nadal ma wahanie ograniczone (bo jeśli  $w$  jest rosnąca, to  $\tilde{w}$  też jest rosnąca). Ponadto

$$\int_a^b f(x) d\tilde{w}(x) = \int_a^b f(x) dw(x).$$

Co więcej jeśli  $w_1$  i  $w_2$  są różnymi funkcjami o wahaniu ograniczonym, lewostronnie ciągłymi na  $(a, b)$  oraz  $w_1(a) = w_2(a)$ , to funkcjonały wyznaczone przez te funkcje są różne, tzn. dla pewnej funkcji  $f \in C[a, b]$  mamy

$$\int_a^b f(x) dw_1(x) \neq \int_a^b f(x) dw_2(x).$$

## 5.4 Wersja geometryczna

**Definicja 5.17.** Podzbiór  $V \subset X$  nazywamy **wypukłym** jeśli dla  $x, y \in V$  oraz  $0 \leq t \leq 1$  mamy  $tx + (1-t)y \in V$ . To oznacza, że zbiór  $V$  zawiera elementy  $x$  i  $y$  wraz z całym odcinkiem łączącym  $x$  z  $y$ .

**Przykład.**  $V = \{x \in X : \|x\| \leq r\}$ .

**Przykład.** Niech  $\varphi$  będzie rzeczywistym funkcjonałem liniowym na przestrzeni unormowanej  $X$ . Wtedy zbiór

$$V_\alpha = \{x \in X : \varphi(x) > \alpha\}$$

jest wypukły dla  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Założmy, że zbiór wypukły  $V \subset X$  jest otwarty i zawiera punkt 0. Zatem dla pewnej liczby  $\varepsilon > 0$  mamy  $B_\varepsilon(0) \subset V$ . To oznacza, że dla dowolnego elementu  $x \in X$  istnieje liczba  $t > 0$  taka, że  $t^{-1}x \in V$ . Rzeczywiście wystarczy, aby  $\|t^{-1}x\| < \varepsilon$ , czyli  $t > \varepsilon^{-1}\|x\|$ .

**Definicja 5.18.** Dla otwartego, wypukłego zbioru  $V$ , zawierającego 0, określamy **funkcjonał Minkowskiego** wzorem

$$p_V(x) = \inf\{t > 0 : t^{-1}x \in V\}.$$

**Przykład.** Niech  $V = \{x \in X : \|x\| \leq r\}$ . Dla dowolnego elementu  $x \in X$  mamy  $t^{-1}x \in V$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $t > r^{-1}\|x\|$ . Zatem  $p_V(x) = r^{-1}\|x\|$ .

**Przykład.** Na płaszczyźnie  $X = \mathbb{R}^2$  z normą euklidesową rozważmy elipsę

$$V = \{(x, y) : x^2 + 4y^2 \leq 1\}.$$

Elementy  $u = (2, 0)$  i  $w = (0, 2)$  mają tę samą normę, ale

$$p_V(u) = 2 \neq 4 = p_V(w).$$

**Lemat 5.19.**

- (a)  $p_V(0) = 0$ .
- (b)  $p_V(sx) = sp_V(x)$  dla  $s > 0$ .
- (c)  $p_V(x + y) \leq p_V(x) + p_V(y)$ .
- (d)  $\{x \in X : p_V(x) < 1\} \subset V \subset \{x \in X : p_V(x) \leq 1\}$ .
- (e) Jeśli  $W \subset V$ , to  $p_W(x) \geq p_V(x)$ .

*Dowód.*

(a) Mamy  $t^{-1}0 = 0 \in V$  dla  $t > 0$ . Zatem  $p_V(0) = 0$ .

(b) Warunek  $t^{-1}x \in V$  jest równoważny z warunkiem  $(st)^{-1}(sx) \in V$  dla  $s > 0$ . Stąd  $p_V(sx) = sp_V(x)$ .

(c) Załóżmy, że  $t^{-1}x \in V$  oraz  $s^{-1}y \in V$ . Wtedy z wypukłości zbioru  $V$  mamy

$$(s + t)^{-1}(x + y) = \frac{t}{s + t}(t^{-1}x) + \frac{s}{s + t}(s^{-1}y) \in V.$$

Zatem  $p_V(x + y) \leq s + t$ . Biorąc kres dolny względem  $s$  i  $t$  spełniających  $t^{-1}x \in V$  oraz  $s^{-1}y \in V$  otrzymamy

$$p_V(x + y) \leq p_V(x) + p_V(y).$$

(d) Niech  $p_V(x) < 1$ . Zatem istnieje liczba  $0 < t < 1$  spełniająca  $t^{-1}x \in V$ . Wtedy z wypukłości  $V$  i z warunku  $0 \in V$  wynika, że

$$x = t(t^{-1}x) + (1 - t)0 \in V.$$

To dowodzi pierwszego zawierania w (d). Załóżmy, że  $x \in V$ . Wtedy  $1^{-1}x \in V$ , czyli  $p_V(x) \leq 1$ . Stąd otrzymujemy drugą część (d).  $\square$

**Uwaga 5.20.** Z lematu wynika, że funkcja  $p_V(x)$  jest wypukła.

**Definicja 5.21.** Mówimy, że dwa zbiory  $A$  i  $B$  w przestrzeni unormowanej  $X$  można **rozdzielić hiperpłaszczyzną**, jeśli istnieją niezerowy ograniczony funkcjonal liniowy  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  oraz liczba  $\alpha \in \mathbb{R}$  takie, że

$$\begin{aligned}\varphi(x) &\leq \alpha, & \text{dla } x \in A, \\ \varphi(y) &\geq \alpha, & \text{dla } y \in B.\end{aligned}$$

Jeśli obie nierówności są ostre, to mówimy, że zbiory  $A$  i  $B$  są **ściśle rozdzielone**.

**Uwaga 5.22.** Niech  $X$  będzie przestrzenią wymiaru  $n$  nad  $\mathbb{R}$ . Dla niezerowego funkcjonału liniowego  $\varphi$  na  $X$  zbiór

$$X_0 = \{x \in X : \varphi(x) = 0\}$$

jest  $(n - 1)$ -wymiarową podprzestrzenią w  $X$ . Jeśli  $e_1, e_2, \dots, e_n$  jest bazą w  $X$  oraz  $a_j = \varphi(e_j)$ , to  $\varphi$  ma postać

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{j=1}^n x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j \varphi(e_j) = \sum_{j=1}^n a_j x_j,$$

Wtedy

$$X_0 = \{(x_j)_{j=1}^n : a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0\}$$

jest hiperprzestrzenią natomiast hiperpłaszczyzna  $X_\alpha = \{x \in X : \varphi(x) = \alpha\}$  ma postać  $X_\alpha = X_0 + x_\alpha$ , gdzie  $x_\alpha$  jest ustalonym wektorem spełniającym  $\varphi(x_\alpha) = \alpha$ .

**Twierdzenie 5.23.** Niech  $A$  i  $B$  będą wypukłymi i rozłącznymi podzbiorem unormowanej przestrzeni liniowej  $X$ . Wtedy

- (a) Jeśli  $A$  jest otwarty, to zbiory  $A$  i  $B$  można rozdzielić hiperpłaszczyzną.
- (b) Jeśli  $A$  i  $B$  są otwarte, to można je rozdzielić ściśle.
- (c) Jeśli  $A$  jest zwarty a  $B$  jest domknięty, to można je rozdzielić ściśle.

*Dowód.*

(a) Niech  $A - B = \{a - b : a \in A, b \in B\}$ , tzn.  $A - B$  jest różnicą kompleksową zbiorów  $A$  i  $B$ . Wtedy  $0 \notin A - B$ , bo  $A$  i  $B$  są rozłączne. Wybierzmy  $-x_0 \in A - B$  i określmy

$$C = x_0 + (A - B).$$

Z konstrukcji mamy  $0 \in C$  oraz  $x_0 \notin C$ . Zbiór  $C$  jest wypukły jako przesunięcie różnicy kompleksowej zbiorów wypukłych. Zbiór  $C$  jest otwarty, bo jeśli  $x \in x_0 + (A - B)$ , to  $x = x_0 + a - b$  dla pewnych  $a \in A$  oraz  $b \in B$ . Z otwartości zbioru  $A$  mamy  $a \in B_\varepsilon(a) \subset A$  dla pewnej liczby  $\varepsilon > 0$ . Zatem

$$B_\varepsilon(x) = B_\varepsilon(x_0 + a - b) = x_0 + B_\varepsilon(a) - b \subset x_0 + A - B = C.$$

**Uwaga 5.24.** Dowód otwartości można przeprowadzić nie korzystając z normy. Zapisujemy

$$C = x_0 + A - B = \bigcup_{b \in B} [(x_0 - b) + A]$$

i zauważamy, że każdy składnik sumy mnogościowej jest zbiorem otwartym.

Niech  $X_0 = \mathbb{R}x_0$ , tzn.  $X_0$  jest prostą przechodzącą przez 0 oraz  $x_0$ . Określmy funkcjonal  $\ell$  na  $X_0$  wzorem

$$\ell(\lambda x_0) = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

W szczególności z Lematu 5.19(d) wynika  $\ell(x_0) = 1 \leq p_C(x_0)$ , bo  $x_0 \notin C$ . Zatem dla  $\lambda \geq 0$  mamy

$$\ell(\lambda x_0) = \lambda \leq \lambda p_C(x_0) = p_C(\lambda x_0).$$

Z kolei dla  $\lambda < 0$  otrzymujemy

$$\ell(\lambda x_0) = \lambda < p_C(\lambda x_0).$$

Reasumując udowodniliśmy, że

$$\ell(x) \leq p_C(x), \quad \text{dla } x \in X_0.$$

Funkcja  $p_C$  spełnia założenia twierdzenia Hahna-Banacha. Zatem istnieje funkcjonal  $\mathcal{L} : X \rightarrow \mathbb{R}$  taki, że

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x_0) &= \ell(x_0) = 1 \\ \mathcal{L}(x) &\leq p_C(x) \quad \text{dla } x \in X. \end{aligned}$$

Pokażemy, że  $\mathcal{L}$  rozdziela  $A$  i  $B$ . Niech  $x \in C$ . Wtedy z Lematu 5.19(d) mamy

$$\mathcal{L}(x) \leq p_C(x) \leq 1.$$

Czyli  $\mathcal{L}(x_0 + a - b) \leq 1$  dla dowolnych  $a \in A$  i  $b \in B$ . Zatem  $\mathcal{L}(a) \leq \mathcal{L}(b)$  dla  $a \in A$  i  $b \in B$ . Biorąc kres górny względem  $a$  a potem kres dolny względem  $b$  otrzymamy

$$\sup_{a \in A} \mathcal{L}(a) \leq \inf_{b \in B} \mathcal{L}(b).$$

**Uwaga 5.25.** Jeśli tu mamy ostrą nierówność, to  $A$  i  $B$  są ściśle rozdzielone.

Istnieje zatem liczba  $\alpha$  spełniająca

$$\sup_{a \in A} \mathcal{L}(a) \leq \alpha \leq \inf_{b \in B} \mathcal{L}(b).$$

Pozostaje uzasadnić ciągłość funkcjonału  $\mathcal{L}$ . Ponieważ zbiór  $C$  jest otwarty oraz  $0 \in C$ , to  $B_\varepsilon(0) \subset C$  dla pewnej liczby  $\varepsilon > 0$ . Wtedy z przykładu po Definicji 5.18 mamy

$$\mathcal{L}(x) \leq p_C(x) \leq p_{B_\varepsilon(0)}(x) = \varepsilon^{-1} \|x\|.$$

Czyli  $\mathcal{L}(x) \leq \varepsilon^{-1} \|x\|$ . Zatem

$$-\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(-x) \leq \varepsilon^{-1} \| -x \| = \varepsilon^{-1} \|x\|.$$

Ostatecznie  $|\mathcal{L}(x)| \leq \varepsilon^{-1} \|x\|$ .

(b) Załóżmy, że  $A$  i  $B$  są otwarte. Z pierwszej części dowodu istnieje niezerowy ograniczony funkcjonał  $\mathcal{L}$  oraz liczba  $\alpha$  taka, że

$$\mathcal{L}(a) \leq \alpha \leq \mathcal{L}(b), \quad a \in A, \quad b \in B.$$

Zbiory  $\mathcal{L}(A)$  i  $\mathcal{L}(B)$  są wypukłe i otwarte w  $\mathbb{R}$  (zadanie). Zbiory te są zatem otwartymi przedziałami w  $\mathbb{R}$ , przy czym  $\mathcal{L}(A)$  leży na lewo od  $\mathcal{L}(B)$ . Zatem

$$\mathcal{L}(a) < \alpha < \mathcal{L}(b), \quad a \in A, \quad b \in B.$$

(c) Zakładamy, że  $A$  jest zwarty a  $B$  domknięty. Dla dowolnego elementu  $a \in A$  istnieje kula otwarta  $K_a$  o środku w  $0$  taka, że kula  $a + 2K_a$  jest rozłączna z  $B$ . Zbiory  $a + K_a$  dla  $a \in A$  pokrywają zbiór  $A$ . Ze zwartości mamy

$$A \subset (a_1 + K_{a_1}) \cup (a_2 + K_{a_2}) \cup \dots \cup (a_n + K_{a_n}).$$

Określmy

$$U = K_{a_1} \cap K_{a_2} \cap \dots \cap K_{a_n}. \quad (5.5)$$

Wtedy  $U$  jest otwartą kulą o środku w zerze. Zauważmy, że

$$(A + U) \cap B = \emptyset. \quad (5.6)$$

Istotnie z (5.5) mamy

$$\begin{aligned} A + U &\subset [(a_1 + K_{a_1}) \cup (a_2 + K_{a_2}) \cup \dots \cup (a_n + K_{a_n})] + U \\ &= (a_1 + K_{a_1} + U) \cup (a_2 + K_{a_2} + U) \cup \dots \cup (a_n + K_{a_n} + U) \\ &\subset (a_1 + 2K_{a_1}) \cup (a_2 + 2K_{a_2}) \cup \dots \cup (a_n + 2K_{a_n}). \end{aligned}$$

W ostatniej sumie każdy składnik sumy mnogościowej jest rozłączny z  $B$ . To dowodzi (5.6). Zatem

$$(A + \frac{1}{2}U) \cap (B + \frac{1}{2}U) = \emptyset.$$

Ale zbiory  $A + \frac{1}{2}U$  i  $B + \frac{1}{2}U$  są otwarte i wypukłe, więc z części (b) można je ściśle rozdzielić. Tym bardziej można ściśle rozdzielić  $A$  i  $B$ .  $\square$

## 5.5 Wersja niezmiennicza

**Definicja 5.26.** Niech  $X$  będzie przestrzenią liniową. Rodzinę  $\mathcal{G}$  operatorów liniowych określonych na  $X$  nazywamy **półgrupą przemienną** jeśli  $\mathcal{G}$  zawiera odwzorowanie identycznościowe  $I$  oraz z warunku  $A, B \in \mathcal{G}$  wynika  $AB = BA \in \mathcal{G}$ .

**Twierdzenie 5.27.** Niech  $p(x)$  będzie funkcją wypukłą określoną na rzeczywistej przestrzeni liniowej  $X$ , przy czym  $p(0) = 0$ . Załóżmy, że  $\lambda$  jest funkcjonałem liniowym określonym na podprzestrzeni liniowej  $Y \subset X$ , spełniającym warunek  $\lambda(y) \leq p(y)$  dla  $y \in Y$ . Niech  $\mathcal{G}$  będzie półgrupą przemienną operatorów liniowych na  $X$  spełniającą warunki:

- (i) Dla  $A \in \mathcal{G}$  mamy  $A(Y) \subset Y$ , tzn. podprzestrzeń  $Y$  jest niezmiennicza pod działaniem operatorów półgrupy.
- (ii)  $p(Ax) \leq p(x)$ , dla  $x \in X$  oraz  $A \in \mathcal{G}$ .
- (iii)  $\lambda(Ay) = \lambda(y)$  dla  $y \in Y$  oraz  $A \in \mathcal{G}$ , tzn. funkcjonał  $\lambda$  jest niezmienny na działanie operatorów z  $\mathcal{G}$ .

Wtedy istnieje funkcjonał  $\Lambda$  określony na  $X$  taki, że

- (a)  $\Lambda(y) = \lambda(y)$  dla  $y \in Y$ .
- (b)  $\Lambda(x) \leq p(x)$  dla  $x \in X$ .

(c)  $\Lambda(Ax) = \Lambda(x)$  dla  $x \in X$  oraz  $A \in \mathcal{G}$ .

*Dowód.* Wiemy, że dla  $\alpha_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$  mamy

$$p(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 p(x_1) + \dots + \alpha_n p(x_n).$$

Nierówność pozostaje prawdziwa, jeśli  $\alpha_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \leq 1$ . Rzeczywiście

$$\begin{aligned} p(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) &= p(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n + (1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i)0) \\ &\leq \alpha_1 p(x_1) + \dots + \alpha_n p(x_n) + (1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i)p(0) \\ &= \alpha_1 p(x_1) + \dots + \alpha_n p(x_n). \end{aligned}$$

Z niezmienniczości i liniowości funkcjonału  $\lambda$  otrzymujemy

$$\lambda(y) = \lambda\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i A_i y\right), \quad y \in Y, A_i \in \mathcal{G}, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1.$$

Zatem

$$\lambda(y) \leq p\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i A_i y\right), \quad y \in Y, A_i \in \mathcal{G}, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1.$$

W rezultacie

$$\lambda(y) \leq \inf \left\{ p\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i A_i y\right) : n \in \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{G}, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \right\}.$$

Dla  $x \in X$  określimy

$$q(x) = \inf \left\{ p\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i A_i x\right) : n \in \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{G}, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \right\}. \quad (5.7)$$

Wtedy

$$\lambda(y) \leq q(y), \quad y \in Y.$$

Zauważmy, że  $q(x) \leq p(x)$ . Istotnie, dla  $n = 1$ ,  $A_1 = I$  oraz  $\alpha_1 = 1$  otrzymujemy  $p\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i A_i x\right) = p(x)$ . Pokażemy, że funkcja  $q(x)$  jest wypukła. Niech  $x, y \in X$  oraz  $\alpha, \beta \geq 0$ ,  $\alpha + \beta = 1$ . Wybierzmy liczby nieujemne  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  takie, że  $\sum_{i=1}^m \alpha_i = \sum_{j=1}^n \beta_j = 1$  oraz operatory



$A_1, A_2, \dots, A_m, B_1, B_2, \dots, B_n$  pochodzą z półgrupy  $\mathcal{G}$ . Wtedy rozważamy  $mn$  liczb  $\alpha_i \beta_j$  i tyleż operatorów  $A_i B_j \in \mathcal{G}$ . Mamy

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j = 1.$$

Korzystając z wypukłości i własności (ii) funkcji  $p$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} q(\alpha x + \beta y) &\leq p\left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j A_i B_j (\alpha x + \beta y)\right) \\ &= p\left(\alpha \sum_{j=1}^n \beta_j B_j \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i A_i x\right) + \beta \sum_{i=1}^m \alpha_i A_i \left(\sum_{j=1}^n \beta_j B_j y\right)\right) \\ &\leq \alpha p\left(\sum_{j=1}^n \beta_j B_j \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i A_i x\right)\right) + \beta p\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i A_i \left(\sum_{j=1}^n \beta_j B_j y\right)\right) \\ &\leq \alpha \sum_{j=1}^n \beta_j p\left(B_j \sum_{i=1}^m \alpha_i A_i x\right) + \beta \sum_{i=1}^m \alpha_i p\left(A_i \sum_{j=1}^n \beta_j B_j y\right) \\ &\leq \alpha \sum_{j=1}^n \beta_j p\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i A_i x\right) + \beta \sum_{i=1}^m \alpha_i p\left(\sum_{j=1}^n \beta_j B_j y\right) \\ &= \alpha p\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i A_i x\right) + \beta p\left(\sum_{j=1}^n \beta_j B_j y\right). \end{aligned}$$

Obliczając kres dolny względem wszystkich wyborów współczynników  $\alpha_i, \beta_j$  oraz operatorów  $A_i, B_j \in \mathcal{G}$  otrzymujemy

$$q(\alpha x + \beta y) \leq \alpha q(x) + \beta q(y),$$

zatem  $q$  jest funkcją wypukłą na  $X$ . Z twierdzenia Hahna-Banacha istnieje funkcjonał  $\Lambda : X \rightarrow \mathbb{R}$  spełniający

$$\begin{aligned} \Lambda(y) &= \lambda(y) && \text{dla } y \in Y, \\ \Lambda(x) &\leq q(x) \leq p(x) && \text{dla } x \in X. \end{aligned}$$

Pozostaje udowodnić, że  $\Lambda(Ax) = \Lambda(x)$  dla  $x \in X$  oraz  $A \in \mathcal{G}$ . Przyjmując

$n \geq 2$ ,  $\alpha_i = \frac{1}{n}$  oraz  $A_i = A^i$  dla  $A \in \mathcal{G}$  (patrz (5.7)) otrzymujemy

$$\begin{aligned} q(x - Ax) &\leq p\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A^{i-1}(x - Ax)\right) = p\left(\frac{1}{n}x + \frac{1}{n}A^n(-x)\right) \\ &\leq \frac{1}{n}p(x) + \frac{1}{n}p(A^n(-x)) \leq \frac{1}{n}[p(x) + p(-x)]. \end{aligned}$$

Ponieważ  $n$  jest dowolną liczbą naturalną, to  $q(x - Ax) \leq 0$ . Stąd wynika, że  $\Lambda(x - Ax) \leq q(x - Ax) \leq 0$ , czyli

$$\Lambda(x) \leq \Lambda(Ax), \quad x \in X, \quad A \in \mathcal{G}.$$

Podstawiając  $x := -x$  otrzymamy nierówność przeciwną, czyli  $\Lambda(Ax) = \Lambda(x)$ .  $\square$

Następny wynik jest efektywnym zastosowaniem Twierdzenia 5.27.

**Twierdzenie 5.28.** *Istnieje funkcja rzeczywista  $\mu$  określona dla wszystkich ograniczonych podzbiorów prostej spełniająca:*

- (i)  $\mu(A) \geq 0$ .
- (ii) Jeśli  $A \cap B = \emptyset$ , to  $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ .
- (iii)  $\mu(x + A) = \mu(A)$  dla  $x \in \mathbb{R}$ , tzn.  $\mu$  jest niezmiennicza na przesunięcia.
- (iv) Jeśli  $A$  jest podzbiorem mierzalnym w sensie Lebesgue'a, to  $\mu(A) = |A|$ , gdzie  $|A|$  oznacza miarę Lebesgue'a zbioru  $A$ .

*Dowód.* Niech  $X$  będzie przestrzenią wszystkich ograniczonych funkcji  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o nośniku ograniczonym, czyli

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\} \subset [a, b]$$

dla pewnych liczb  $a, b \in \mathbb{R}$ . Niech  $Y$  oznacza zbiór funkcji w  $X$  mierzalnych w sensie Lebesgue'a. Określmy funkcję  $p : X \rightarrow \mathbb{R}$

$$p(f) = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}} g(x) dx : g \in Y, |f(x)| \leq g(x), x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wartość  $p(f)$  jest zawsze skończona. Istotnie, niech  $|f(x)| \leq m$  oraz  $f(x) = 0$  dla  $x \notin [a, b]$ , to przyjmując  $g(x) = m \mathbb{I}_{[a,b]}$  otrzymamy  $|f(x)| \leq g(x)$  oraz  $p(f) \leq m(b - a)$ .

Funkcja  $p$  jest wypukła. Rzeczywiście, niech  $f_1, f_2 \in X$  oraz  $\alpha, \beta \geq 0$ . Wybierzmy dowolne funkcje mierzalne  $g_1, g_2$  spełniające  $|f_1(x)| \leq g_1(x)$  oraz  $|f_2(x)| \leq g_2(x)$ . Wtedy

$$|\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)| \leq \alpha |f_1(x)| + \beta |f_2(x)| \leq \alpha g_1(x) + \beta g_2(x).$$

Zatem

$$p(\alpha f_1 + \beta f_2) \leq \int_{\mathbb{R}} [\alpha g_1(x) + \beta g_2(x)] dx = \alpha \int_{\mathbb{R}} g_1(x) dx + \beta \int_{\mathbb{R}} g_2(x) dx.$$

Obliczając kres dolny względem  $g_1$  i  $g_2$  otrzymamy

$$p(\alpha f_1 + \beta f_2) \leq \alpha p(f_1) + \beta p(f_2).$$

Dla  $f \in X$  oraz  $t \in \mathbb{R}$  określamy operator przesunięcia  $A_t$  wzorem

$$(A_t f)(x) = f(x + t).$$

Operatory  $A_t$  tworzą półgrupę przemienną, bo

$$A_t A_s = A_{t+s} = A_s A_t, \quad A_0 = I.$$

Ponadto  $p(A_t f) \leq p(f)$ . Rzeczywiście, jeśli  $|f(x)| \leq g(x)$  dla  $f \in X$  i  $g \in Y$ , to  $|(A_t f)(x)| \leq (A_t g)(x)$  oraz  $A_t g \in Y$ . Zatem

$$p(A_t f) \leq \int_{\mathbb{R}} (A_t g)(x) dx = \int_{\mathbb{R}} g(x + t) dx = \int_{\mathbb{R}} g(x) dx.$$

Biorąc kres dolny względem funkcji  $g$  otrzymujemy

$$p(A_t f) \leq p(f).$$

**Uwaga 5.29.** Prawdziwa jest równość  $p(A_t f) = p(f)$ . Istotnie

$$p(f) = p(A_{-t} A_t f) \leq p(A_t f) \leq p(f).$$

Określmy funkcjonał  $\lambda : Y \rightarrow \mathbb{R}$  wzorem

$$\lambda(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx.$$

Ten funkcjonal jest niezmienniczy pod działaniem  $A_t$ , bo

$$\lambda(A_t f) = \int_{\mathbb{R}} f(x+t) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \lambda(f).$$

Zatem z Twierdzenia 5.27 istnieje funkcjonal  $\Lambda : X \rightarrow \mathbb{R}$  spełniający

$$\begin{aligned} \Lambda(A_t f) &= \Lambda(f), \\ \Lambda(f) &= \int_{\mathbb{R}} f(x) dx, \quad \text{dla } f \in Y, \\ \Lambda(f) &\leq p(f). \end{aligned} \tag{5.8}$$

Pokażemy, że funkcjonal  $\Lambda$  jest nieujemny, tzn. jeśli  $f \geq 0$ , to  $\Lambda(f) \geq 0$ . Załóżmy, że  $0 \leq f(x) \leq m$  oraz  $f(x) = 0$  dla  $x \notin [a, b]$ . Wtedy

$$0 \leq m \mathbb{I}_{[a,b]}(x) - f(x) \leq m \mathbb{I}_{[a,b]}(x). \tag{5.9}$$

Na podstawie (5.8) i (5.9) mamy

$$\Lambda(m \mathbb{I}_{[a,b]} - f) \leq p(m \mathbb{I}_{[a,b]} - f) \leq \int_{\mathbb{R}} m \mathbb{I}_{[a,b]}(x) dx = m(b-a).$$

Zatem

$$\lambda(m \mathbb{I}_{[a,b]}) - \Lambda(f) \leq m(b-a).$$

Ponieważ  $\lambda(m \mathbb{I}_{[a,b]}) = m(b-a)$ , to  $\Lambda(f) \geq 0$ .

Dla  $A \subset \mathbb{R}$  określamy

$$\mu(A) = \Lambda(\mathbb{I}_A).$$

Mamy  $\mu(A) \geq 0$ , bo funkcjonal  $\Lambda$  jest nieujemny. Jeśli  $A \cap B = \emptyset$ , to

$$\mu(A \cup B) = \Lambda(\mathbb{I}_{A \cup B}) = \Lambda(\mathbb{I}_A + \mathbb{I}_B) = \Lambda(\mathbb{I}_A) + \Lambda(\mathbb{I}_B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Ponadto jeśli  $A$  jest mierzalny w sensie Lebesgue'a, to

$$\mu(A) = \Lambda(\mathbb{I}_A) = \lambda(\mathbb{I}_A) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_A(x) dx = |A|.$$

□

**Uwaga 5.30.** Niech  $SO(3)$  oznacza grupę obrotów w przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ . Miara Lebesgue'a w  $\mathbb{R}^3$  jest niezmiennicza na działanie grupy  $SO(3)$ . Jednak miara ta mierzy tylko zbiory mierzalne. Rozważmy zagadnienie: czy istnieje skończona addytywna funkcja  $\mu$  określona na wszystkich ograniczonych podzbiorach w  $\mathbb{R}^3$  taka, że

$$\mu(U(A)) = \mu(A), \quad U \in SO(3), \quad A \subset \mathbb{R}^3.$$

Zagadnienie jest związane z tzw. paradoksem Banacha-Tarskiego. Okazuje się, że kulę jednostkową  $B = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| \leq 1\}$  można przedstawić w postaci sumy rozłącznej pięciu podzbiorów

$$B = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5$$

oraz istnieją dwie macierze  $U_1, U_2$  o wyznaczniku 1 takie, że

$$U_1(B_1) \cup B_2 = B, \quad U_2(B_3) \cup B_4 = B.$$

W związku z tym funkcja  $\mu$  o opisanych własnościach nie może istnieć.

## 6 Twierdzenie Baire'a i zastosowania

### 6.1 Twierdzenie Baire'a

**Definicja 6.1.** Zbiór  $S$  w przestrzeni metrycznej  $X$  nazywamy **nigdziegęstym**, jeśli domknięcie  $\bar{S}$  ma puste wnętrze. Tzn. dla dowolnej otwartej kuli  $B$  w  $X$  mamy  $B \cap \bar{S} \neq \emptyset$ .

**Przykłady.** Skończony podzbiór na prostej jest nigdziegęsty. Przeliczalny zbiór  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$  jest nigdziegęsty. Jednakże przeliczalny podzbiór może być gęsty, np. zbiór liczb wymiernych jest gęsty w  $\mathbb{R}$ . Zbiór Cantora  $C \subset [0, 1]$  jest nigdziegęsty, chociaż jest nieprzeliczalny.

**Definicja 6.2.**  $S$  nazywamy zbiorem **I kategorii** jeśli  $S$  jest przeliczalną sumą zbiorów nigdziegęstych w  $X$ .

**Przykład.**  $\mathbb{Q}$  jest zbiorem I kategorii, bo  $\mathbb{Q} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}$ .

**Uwaga 6.3.** Przeliczalna suma zbiorów I kategorii jest znowu zbiorem I kategorii.

**Twierdzenie 6.4** (Baire). *Przestrzeń metryczna zupełna nie jest zbiorem I kategorii.*

*Dowód.* Załóżmy, że  $X$  jest zbiorem I kategorii. Niech

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

gdzie  $A_n$  są zbiorami nigdziegęstymi. Ponieważ  $A_1$  nie jest gęsty, to można znaleźć  $x_1 \notin \overline{A_1}$ . Zatem istnieje otwarta kula  $B_1$  o środku w  $x_1$  taka, że

$$x_1 \in \overline{B_1} \subset X \setminus \overline{A_1}.$$

Możemy założyć, że promień kuli  $B_1$  nie przekracza  $2^{-1}$ . Zbiór  $A_2$  jest nigdziegęsty, zatem można znaleźć element  $x_2$  taki, że  $x_2 \in B_1 \setminus \overline{A_2}$ . Istnieje zatem kula o środku w  $x_2$  i promieniu co najwyżej  $2^{-2}$  spełniająca warunek

$$x_2 \in \overline{B_2} \subset B_1 \setminus \overline{A_2}.$$

Dalej postępujemy podobnie. Tzn. jeśli  $B_{n-1}$  i  $x_{n-1}$  są już wybrane, to istnieje element  $x_n$  taki, że  $x_n \in B_{n-1} \setminus \overline{A_n}$ . Istnieje wtedy kula o środku w  $x_n$  i promieniu co najwyżej  $2^{-n}$  taka, że

$$x_n \in \overline{B_n} \subset B_{n-1} \setminus \overline{A_n}.$$

Otrzymamy w ten sposób ciąg  $x_n$ , który spełnia warunek Cauchy'ego. Istotnie jeśli  $n, m > N$ , to  $x_n, x_m \in B_N$ , bo kule tworzą ciąg zstępujący. Zatem

$$d(x_n, x_m) < \frac{2}{2^N}.$$

Z zupełności przestrzeni  $X$  ciąg  $x_n$  jest zbieżny. Niech  $x = \lim_n x_n$ . Dla  $n > N$  mamy  $x_n \in B_{N+1}$ . Stąd

$$x = \lim_n x_n \in \overline{B_{N+1}} \subset B_N,$$

dla każdej wartości  $N$ . Ale  $B_N \cap A_N = \emptyset$ . Tzn.  $x \notin A_N$  dla każdej wartości  $N$ . Czyli

$$x \notin \bigcup_{N=1}^{\infty} A_N = X,$$

co prowadzi do sprzeczności. □

**Uwaga 6.5.** Jeśli  $S$  nie jest zbiorem I kategorii w  $X$  oraz  $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ , to dla pewnej wartości  $n$  zbiór  $\overline{A_n}$  zawiera kulę.

**Przykład.** Zbiór  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  nie jest zbiorem I kategorii w  $\mathbb{R}$ . Istotnie, gdyby  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  był zbiorem I kategorii, to również  $\mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q}$  byłby zbiorem I kategorii, co przeczyłoby twierdzeniu Baire'a.

## 6.2 Twierdzenie Banacha-Steinhausa

**Twierdzenie 6.6.** Niech  $X$  i  $Y$  będą przestrzeniami unormowanymi. Niech  $\mathcal{F}$  oznacza pewną rodzinę ograniczonych operatorów liniowych z  $X$  w  $Y$ . Wtedy zbiór liczb  $\{\|T\| : T \in \mathcal{F}\}$  jest ograniczony lub zbiór

$$\{x \in X : \sup_{T \in \mathcal{F}} \|Tx\| < \infty\}$$

jest I kategorii w  $X$ .

**Uwaga 6.7.** Jeśli zbiór  $\{\|T\| : T \in \mathcal{F}\}$  jest ograniczony, czyli istnieje liczba  $c > 0$  taka, że  $\|T\| \leq c$  dla  $T \in \mathcal{F}$ , to

$$\|Tx\| \leq \|T\|\|x\| \leq c\|x\|, \quad x \in X, T \in \mathcal{F}.$$

Zatem

$$\{x \in X : \sup_{T \in \mathcal{F}} \|Tx\| < \infty\} = X.$$

*Dowód.* Załóżmy, że

$$A = \{x \in X : \sup_{T \in \mathcal{F}} \|Tx\| < \infty\}$$

nie jest I kategorii. Wprowadzamy zbiory

$$A_n = \{x \in X : \sup_{T \in \mathcal{F}} \|Tx\| \leq n\}.$$

Wtedy

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Zbiory  $A_n$  są domknięte, bo jeśli  $x_k \in A_n$  oraz  $x_k \rightarrow x$ , to

$$\|Tx\| = \lim_k \|Tx_k\| \leq n.$$

Zatem z uwagi 6.5 dla pewnej wartości  $n$  zbiór  $A_n$  zawiera kulę

$$A_n \supset B = \{x \in X : \|x - x_0\| \leq r\}.$$

Niech  $\|x\| \leq r$ . Wtedy  $x_0, x + x_0 \in B \subset A_n$ . Zatem

$$\|Tx\| = \|T(x + x_0) - Tx_0\| \leq \|T(x + x_0)\| + \|Tx_0\| \leq n + n = 2n.$$

Dla  $x \neq 0$  element  $y = r\|x\|^{-1}x$  spełnia  $\|y\| = r$ , zatem

$$\|Tx\| = \frac{1}{r}\|x\|\|Ty\| \leq \frac{2n}{r}\|x\|,$$

czyli

$$\|T\| \leq \frac{2n}{r}, \quad T \in \mathcal{F}.$$

□

**Wniosek 6.8.** Niech  $X$  będzie przestrzenią Banacha. Przy oznaczeniach z poprzedniego twierdzenia otrzymujemy: jeśli dla dowolnego elementu  $x \in X$  zbiór liczb  $\{\|Tx\| : T \in \mathcal{F}\}$  jest ograniczony, to również zbiór  $\{\|T\| : T \in \mathcal{F}\}$  jest ograniczony. Tzn. z punktowej ograniczoności rodziny operatorów wynika jednostajna ograniczoność tej rodziny.

*Dowód.* Z założenia

$$X = \{x \in X : \sup_{T \in \mathcal{F}} \|Tx\| < \infty\}.$$

Z twierdzenia Baire'a  $X$  nie jest zbiorem I kategorii, bo  $X$  jest przestrzenią Banacha. Z poprzedniego twierdzenia otrzymujemy zatem, że  $\{\|T\| : T \in \mathcal{F}\}$  jest ograniczony. □

Przez kontrapozycję Wniosku dostajemy

**Wniosek 6.9.** Przy oznaczeniach z Wn. 6.8, jeśli zbiór  $\{\|T\| : T \in \mathcal{F}\}$  nie jest ograniczony, to dla pewnego elementu  $x \in X$  zbiór  $\{\|Tx\| : T \in \mathcal{F}\}$  nie jest ograniczony.

**Przykład.** Udowodnimy istnienie funkcji ciągłej o okresie  $2\pi$ , dla której szereg Fouriera nie jest zbieżny w punkcie 0. Niech

$$X = C_{\text{per}}[-\pi, \pi] = \{f \in C[-\pi, \pi] : f(-\pi) = f(\pi)\}.$$



Dla funkcji  $f \in X$  określamy współczynniki Fouriera  $c_n$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Sumy częściowe szeregu Fouriera mają postać

$$s_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt,$$

gdzie funkcja  $D_n(t)$ , zwana jądrem Dirichleta ma postać

$$D_n(t) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}}.$$

Przy dodatkowych założeniach, np.  $f \in C_{\text{per}}^1[-\pi, \pi]$  można udowodnić, że sumy  $s_n(f)$  są jednostajnie zbieżne do funkcji  $f$ . Ogólnie ciąg  $s_n(f)(x_0)$  nie musi być zbieżny. Rozważmy  $x_0 = 0$  i funkcjonały  $\varphi_n$  określone na  $X$  przez

$$\varphi_n(f) = s_n(f)(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dg_n(t),$$

gdzie

$$g_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^x D_n(t) dt.$$

Funkcja  $g_n$  ma wahanie ograniczone, bo

$$\text{Var}_{[-\pi, \pi]}(g_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt.$$

Na podstawie rozdziału ?? wiemy, że norma funkcjonału  $\varphi_n$  na  $C[-\pi, \pi]$  jest równa  $\text{Var}_{[-\pi, \pi]}(g_n)$ . Nietrudno pokazać, że norma  $\varphi_n$  na  $C_{\text{per}}[-\pi, \pi]$  jest taka sama, czyli też jest równa  $\text{Var}_{[-\pi, \pi]}(g_n)$ . Z kursu szeregów Fouriera wiemy, że liczby

$$L_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt$$

dążą do nieskończoności. Można wykazać, że

$$L_n \approx c \ln n + d.$$

To oznacza, że normy funkcjonałów  $\|\varphi_n\|$  nie są wspólnie ograniczone. Zatem z Wn. 6.9 istnieje funkcja  $f \in C_{\text{per}}[-\pi, \pi]$  taka, że ciąg  $\varphi_n(f) = s_n(f)(0)$  nie jest ograniczony. W szczególności ciąg  $s_n(f)(0)$  nie może być zbieżny. Co więcej z Twierdzenia Banacha-Steinhaus'a wynika, że zbiór funkcji, dla których ciąg  $s_n(f)(0)$  jest ograniczony jest zbiorem I kategorii w  $C_{\text{per}}[-\pi, \pi]$ .

**Twierdzenie 6.10.** *Załóżmy, że funkcja  $B(x, y)$  jest zespoloną formą dwuliniową (lub półtoraliniową) na iloczynie  $X \times Y$ , gdzie  $X$  i  $Y$  są przestrzeniami Banacha, tzn.  $B : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ . Jeśli dla każdego ustalonego elementu  $x \in X$  funkcjonal  $y \mapsto B(x, y)$  jest ciągły na  $Y$  oraz dla każdego ustalonego elementu  $y \in Y$  funkcjonal  $x \mapsto B(x, y)$  jest ciągły na  $X$ , to istnieje stała  $c > 0$  spełniająca*

$$|B(x, y)| \leq c \|x\| \|y\|, \quad x \in X, \quad y \in Y.$$

*W szczególności odwzorowanie  $(x, y) \mapsto B(x, y)$  jest ciągłe na  $X \times Y$  (względem normy np.  $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$ ).*

**Uwaga 6.11.** Jeśli  $B$  jest formą półtoraliniową, to rozważamy funkcjonały

$$y \mapsto \overline{B(x, y)}.$$

*Dowód.* Ustalmy  $x \in X$  i rozważmy funkcjonal  $\varphi_x(y) = B(x, y)$ . W przypadku, gdy  $B(x, y)$  jest formą dwuliniową, funkcjonal  $\varphi_x$  jest liniowy. Z założenia wiemy, że  $\varphi_x$  jest ciągły. Zatem istnieje stała  $c_x > 0$  taka, że  $|\varphi_x(y)| \leq c_x \|y\|$ , czyli

$$|B(x, y)| \leq c_x \|y\|, \quad y \in Y. \quad (6.1)$$

Podobnie, dla każdego elementu  $y \in Y$  istnieje stała  $d_y > 0$  taka, że

$$|B(x, y)| \leq d_y \|x\|, \quad x \in X. \quad (6.2)$$

Rozważamy rodzinę funkcjonałów  $\mathcal{F} = \{\varphi_x : \|x\| \leq 1\}$  określonych na przestrzeni  $Y$ . Sprawdzamy, czy wartości  $\varphi_x(y)$  dla  $\|x\| \leq 1$  są wspólnie ograniczone dla każdego ustalonego elementu  $y \in Y$ . Na podstawie (??) mamy

$$|\varphi_x(y)| = |B(x, y)| \leq d_y \|x\| \leq d_y.$$

Zatem z Wn. 6.8 normy funkcjonałów  $\|\varphi_x\|_{Y^*}$  są wspólnie ograniczone dla  $\|x\| \leq 1$ . To oznacza, że

$$c = \sup_{\|x\| \leq 1} \|\varphi_x\|_{Y^*} < \infty.$$

Ale

$$c = \sup_{\|x\| \leq 1} \|\varphi_x\|_{Y^*} = \sup_{\|x\| \leq 1} \sup_{\|y\| \leq 1} |\varphi_x(y)| = \sup_{\|x\| \leq 1} \sup_{\|y\| \leq 1} |B(x, y)|.$$

Zatem dla  $x, y \neq 0$  mamy

$$|B(x, y)| = \|x\| \|y\| \left| B\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right) \right| \leq c \|x\| \|y\|.$$

Z ostatniej nierówności wynika ciągłość. Rzeczywiście, dla  $x_n \rightarrow x$  oraz  $y_n \rightarrow y$  mamy

$$B(x_n, y_n) - B(x, y) = B(x_n - x, y_n - y) + B(x, y_n - y) + B(x_n - x, y).$$

Zatem

$$\begin{aligned} |B(x_n, y_n) - B(x, y)| &\leq |B(x_n - x, y_n - y)| + |B(x, y_n - y)| + |B(x_n - x, y)| \\ &\leq c \|x_n - x\| \|y_n - y\| + c \|x\| \|y_n - y\| + c \|x_n - x\| \|y\| \xrightarrow{n} 0 \end{aligned}$$

□

**Twierdzenie 6.12** (Hellinger-Toeplitz). *Załóżmy, że dwa operatory liniowe  $A, B : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  określone na przestrzeni Hilberta  $\mathcal{H}$  spełniają warunek*

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, By \rangle \quad x, y \in \mathcal{H}.$$

*Wtedy  $A$  i  $B$  są ograniczone oraz  $B = A^*$ .*

**Uwaga 6.13.** Jeśli  $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$  dla  $x, y \in \mathcal{H}$ , to  $A$  jest ograniczony oraz  $A^* = A$ .

*Dowód.* Określmy formę półtoraliniową  $C$  na  $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$

$$C(x, y) = \langle Ax, y \rangle.$$

Mamy wtedy

$$\begin{aligned} |C(x, y)| &= |\langle Ax, y \rangle| \leq \|Ax\| \|y\|, \\ |C(x, y)| &= |\langle Ax, y \rangle| = |\langle x, By \rangle| \leq \|By\| \|x\|. \end{aligned}$$

Zatem oba odwzorowania  $X \ni x \mapsto C(x, y)$  oraz  $Y \ni y \mapsto C(x, y)$  są ciągłe. Z Twierdzenia 6.10 istnieje stała  $c > 0$  taka, że

$$|C(x, y)| \leq c \|x\| \|y\|.$$

Wtedy z Lematu 3.12 mamy

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \sup_{\|y\| \leq 1} |\langle Ax, y \rangle| = \sup_{\|x\| \leq 1} \sup_{\|y\| \leq 1} |C(x, y)| \leq c.$$

Podobnie  $\|B\| \leq c$ . □

**Twierdzenie 6.14** (o odwzorowaniu otwartym). *Ciągłe odwzorowanie liniowe  $T$  z przestrzeni Banacha  $X$  na przestrzeń Banacha  $Y$  jest otwarte, tzn. obraz  $T(U)$  dla każdego otwartego podzbioru  $U$  w  $X$  jest otwartym podzbiorem w  $Y$ .*

*Dowód.* Najpierw pokażemy, że obraz otwartej kuli jednostkowej o środku w 0 w  $X$  zawiera kulę otwartą o środku w 0 w  $Y$ . Niech

$$B_n = \{x \in X : \|x\| < 2^{-n}\}.$$

Mamy

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} kB_1.$$

Zatem

$$Y = T(X) = \bigcup_{k=1}^{\infty} T(kB_1) = \bigcup_{k=1}^{\infty} kT(B_1).$$

Z twierdzenia Baire'a przynajmniej jeden ze zbiorów  $kT(B_1)$  nie jest nigdziegęsty. Zatem  $T(B_1)$  nie jest nigdziegęsty. To oznacza, że domknięcie zbioru  $T(B_1)$  zawiera pewną kulę, czyli

$$\overline{T(B_1)} \supset \{y \in Y : \|y - y_0\| < \eta\},$$

dla pewnego elementu  $y_0 \in Y$  oraz liczby  $\eta > 0$ .

$$\begin{aligned} \{y \in Y : \|y\| < \eta\} &= \{y \in Y : \|y - y_0\| < \eta\} - y_0 \subset \overline{T(B_1)} - \overline{T(B_1)} \\ &\subset \overline{T(B_1) - T(B_1)} \subset \overline{T(B_1 - B_1)} = \overline{T(2B_1)} = \overline{T(B_0)}. \end{aligned}$$

Skorzystaliliśmy z prostej własności, że  $\overline{A - B} \subset \overline{A - B}$ . Dzieląc stronami przez  $2^n$  otrzymamy

$$\left\{ y \in Y : \|y\| < \frac{\eta}{2^n} \right\} \subset \overline{T(B_n)}. \quad (6.3)$$

Naszym celem jest wykazanie, że

$$\left\{ y \in Y : \|y\| < \frac{\eta}{2} \right\} \subset T(B_0). \quad (6.4)$$

Niech  $\|y\| < \eta/2$ . Zatem z (6.3) dla  $n = 1$  mamy  $y \in \overline{T(B_1)}$ . Istnieje więc element  $x_1 \in B_1$  taki, że

$$\|y - Tx_1\| < \frac{\eta}{2^2}.$$

Znowu z (6.3) dla  $n = 2$  wnioskujemy, że  $y - Tx_1 \in \overline{T(B_2)}$ . Istnieje więc element  $x_2 \in B_2$  taki, że

$$\|y - Tx_1 - Tx_2\| < \frac{\eta}{2^3},$$

zatem  $y - Tx_1 - Tx_2 \in \overline{T(B_3)}$ , na podstawie (6.3) dla  $n = 3$ . Postępując tak dalej otrzymamy ciąg elementów  $x_n$  o własnościach  $x_n \in B_n$  oraz

$$\|y - Tx_1 - Tx_2 - \dots - Tx_n\| < \frac{\eta}{2^{n+1}}.$$

Zatem

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} Tx_n.$$

Skoro  $x_n \in B_n$ , to  $\|x_n\| < 2^{-n}$ . Z zupełności przestrzeni  $X$  szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  jest zbieżny. Oznaczmy

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

Wtedy

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} Tx_n = y.$$

Ponadto

$$\|x\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Czyli  $x \in B_0$ . W ten sposób dowód (6.4) został zakończony.

Niech  $U$  będzie otwartym podzbiorem w  $X$  oraz  $y_0 \in T(U)$ . Wtedy  $y_0 = Tx_0$  dla pewnego elementu  $x_0 \in U$ . Z otwartości  $U$  mamy

$$\{x \in X : \|x - x_0\| < r\} \subset U$$

dla pewnej liczby  $r > 0$ . Zatem

$$x_0 + rB_0 = \{x \in X : \|x - x_0\| < r\} \subset U.$$

Wtedy

$$y_0 + rT(B_0) = T(x_0 + rB_0) \subset T(U).$$

Z (6.4) wynika zatem, że

$$\left\{y \in Y : \|y - y_0\| < \frac{r\eta}{2}\right\} = y_0 + r \left\{y \in Y : \|y\| < \frac{\eta}{2}\right\} \subset y_0 + rT(B_0) \subset T(U).$$

To oznacza, że  $y_0$  leży w  $T(U)$  wraz z pewnym otoczeniem, czyli  $T(U)$  jest otwartym podzbiorem w  $Y$ .  $\square$

**Twierdzenie 6.15** (o odwzorowaniu odwrotnym). *Niech  $T$  będzie ciągłym, różnowartościowym odwzorowaniem liniowym z przestrzeni Banacha  $X$  na przestrzeń Banacha  $Y$ . Wtedy odwzorowanie odwrotne  $T^{-1} : Y \rightarrow X$  jest ciągłe. Ponadto istnieje stała  $c > 0$ , dla której*

$$\|Tx\| \geq c\|x\|, \quad x \in X.$$

*Dowód.* Z poprzedniego twierdzenia  $T$  jest odwzorowaniem otwartym. To oznacza, że odwzorowanie  $T^{-1}$  jest ciągłe. Zatem  $T^{-1}$  jest ograniczonym odwzorowaniem liniowym. Wtedy

$$\|x\| = \|T^{-1}Tx\| \leq \|T^{-1}\| \|Tx\|.$$

Stąd

$$\|Tx\| \geq \frac{1}{\|T^{-1}\|} \|x\|,$$

czyli  $c = \|T^{-1}\|^{-1}$ .  $\square$

**Wniosek 6.16.** *Załóżmy, że  $T$  jest ciągłym, różnowartościowym odwzorowaniem liniowym z przestrzeni Banacha  $X$  na domkniętą podprzestrzeń przestrzeni Banacha  $Y$ . Wtedy istnieje stała  $c > 0$ , dla której*

$$\|Tx\| \geq c\|x\|, \quad x \in X.$$

*Dowód.* Niech  $Y_0 = T(X)$ . Wtedy  $Y_0$  jest przestrzenią Banacha, jako domknięta podprzestrzeń przestrzeni  $Y$ . Możemy zatem zastosować poprzednie twierdzenie do  $T : X \rightarrow Y_0$ .  $\square$

**Uwaga 6.17.** Jeśli odwzorowanie liniowe  $T : X \rightarrow Y$  spełnia  $\|Tx\| \geq c\|x\|$  dla  $x \in X$  i pewnej stałej  $c > 0$ , to odwzorowanie  $T$  jest różnowartościowe oraz  $T(X)$  jest domkniętą podprzestrzenią w  $Y$ .

**Definicja 6.18.** Dla odwzorowania  $T : X \rightarrow Y$  podzbiór  $\Gamma \subset X \times Y$  określony wzorem

$$\Gamma = \{(x, Tx) : x \in X\}$$

nazywamy wykresem.

**Lemat 6.19.** Załóżmy, że  $X$  i  $Y$  są liniowymi przestrzeniami unormowanymi. Jeśli  $T$  jest ciągłym odwzorowaniem z  $X$  w  $Y$ , to zbiór  $\Gamma$  jest domkniętym podzbiorem w  $X \times Y$ .

*Dowód.* Załóżmy, że  $(x_n, Tx_n) \xrightarrow{n} (x, y)$ . Wtedy

$$\|x_n - x\| \xrightarrow{n} 0, \quad \|Tx_n - y\| \xrightarrow{n} 0.$$

Ale z ciągłości mamy  $Tx_n \rightarrow Tx$ , zatem  $Tx = y$ , co oznacza, że  $(x, y) \in \Gamma$ .  $\square$

**Lemat 6.20.** Jeśli  $X$  i  $Y$  są przestrzeniami Banacha, to również  $X \times Y$  jest przestrzenią Banacha z normą

$$\|(x, y)\|_{X \times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y.$$

*Dowód.* Z równości

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\|_X + \|y_n - y_m\|_Y \\ = \|(x_n - x_m, y_n - y_m)\|_{X \times Y} = \|(x_n, y_n) - (x_m, y_m)\|_{X \times Y}, \end{aligned}$$

wynika, że  $(x_n, y_n)$  jest ciągiem Cauchy'ego w  $X \times Y$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $x_n$  i  $y_n$  są ciągami Cauchy'ego w  $X$  i  $Y$ , odpowiednio. Ponadto zastępując  $x_m$  przez  $x$  oraz  $y_m$  przez  $y$  otrzymamy, że jeśli  $x_n \xrightarrow{n} x$  oraz  $y_n \xrightarrow{n} y$ , to  $(x_n, y_n) \xrightarrow{n} (x, y)$ .  $\square$

**Twierdzenie 6.21** (o wykresie domkniętym). *Niech  $T$  będzie odwzorowaniem liniowym z przestrzeni Banacha  $X$  w przestrzeń Banacha  $Y$ . Jeśli wykres  $\Gamma$  odwzorowania  $T$  jest domkniętą podprzestrzenią w  $X \times Y$ , to odwzorowanie  $T$  jest ciągłe.*

*Dowód.* Z założenia domkniętości wykresu wynika, że  $\Gamma$  jest przestrzenią Banacha. Rozważmy odwzorowania  $\pi_1 : \Gamma \rightarrow X$  oraz  $\pi_2 : \Gamma \rightarrow Y$  zadane wzorami

$$\pi_1(x, Tx) = x, \quad \pi_2(x, Tx) = Tx.$$

Oba odwzorowania są liniowe i ograniczone z normą nie przekraczającą 1. Ponadto  $\pi_1$  jest różnowartościowym odwzorowaniem z  $\Gamma$  na  $X$ . Zatem z twierdzenia o odwzorowaniu odwrotnym odwzorowanie  $\pi_1^{-1}$  jest ograniczone. Zauważmy, że

$$x \xrightarrow{\pi_1^{-1}} (x, Tx) \xrightarrow{\pi_2} Tx,$$

czyli

$$T = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}.$$

Zatem odwzorowanie  $T$  jest ograniczone jako złożenie dwu operatorów ograniczonych.  $\square$

**Przykład.** Niech macierz  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$  spełnia

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 < \infty, \quad i = 1, 2, \dots,$$

tzn. wiersze macierzy  $A$  są sumowalne z kwadratem. Rozważamy  $X = Y = \ell^2$ . Określamy operator  $T$  na  $\ell^2$  wzorem

$$(Tx)(i) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x(j), \quad x = \{x(j)\}_{j=1}^{\infty} \in \ell^2.$$

Z założenia mamy

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}x(j)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2} (|a_{ij}|^2 + |x(j)|^2) < \infty,$$

czyli wielkość  $(Tx)(i)$  jest dobrze określona dla dowolnej wartości  $i$ .

Założmy, że  $T$  odwzorowuje  $\ell^2$  w siebie, tzn. dla  $x$  z  $\ell^2$  ciąg  $Tx$  również leży w  $\ell^2$ . Okazuje się, że wtedy  $T$  jest automatycznie operatorem ograniczonym. Rzeczywiście, sprawdzimy, że wykres operatora  $T$  jest domknięty. Posłużymy się lematem.



**Lemat 6.22.** Niech  $T$  będzie odwzorowaniem liniowym z przestrzeni unormowanej  $X$  w przestrzeń unormowaną  $Y$ . Jeśli z warunków  $x_n \xrightarrow{n} 0$  oraz  $Tx_n \xrightarrow{n} y$  wynika, że  $y = 0$ , to wykres odwzorowania  $T$  jest domknięty.

*Dowód.* Niech  $x_n \xrightarrow{n} x$  oraz  $Tx_n \xrightarrow{n} z$ . Trzeba pokazać, że  $z = Tx$ . Mamy  $x_n - x \xrightarrow{n} 0$ . Ponadto  $T(x_n - x) = Tx_n - Tx \xrightarrow{n} z - Tx$ . Z założenia  $z - Tx = 0$ .  $\square$

Niech  $x_n \xrightarrow{n} 0$  oraz  $Tx_n \xrightarrow{n} y$  w  $\ell^2$ . Mamy

$$|(Tx_n)(i)| = \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_n(j) \right| \leq \left( \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} \|x_n\|_2 \xrightarrow{n} 0.$$

To oznacza, że  $(Tx_n)(i) \xrightarrow{n} 0$  dla  $i \in \mathbb{N}$ . Dalej mamy

$$|(Tx_n)(i) - y(i)| \leq \left( \sum_{j=1}^{\infty} |(Tx_n)(j) - y(j)|^2 \right)^{1/2} = \|Tx_n - y\|_2 \xrightarrow{n} 0.$$

Skoro  $|(Tx_n)(i) - y(i)| \xrightarrow{n} 0$  oraz  $(Tx_n)(i) \xrightarrow{n} 0$ , to  $y(i) = 0$  dla  $i \in \mathbb{N}$ , czyli  $y = 0$ .

## 7 Twierdzenie Stone'a-Weierstrassa

Dla funkcji  $f \in C_{\mathbb{R}}[0, 1]$  istnieją wielomiany  $p_n(x)$  o współczynnikach rzeczywistych takie, że

$$p_n(x) \xrightarrow{n} f(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

tzn.

$$\|p_n - f\|_{\infty} \xrightarrow{n} 0.$$

Na przykład można przyjąć, że  $p_n$  są wielomianami Bernsteina.

$$p_n(x) = B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}.$$

Wielomiany  $\mathcal{P}$  tworzą algebrę, tzn. z warunku  $p, q \in \mathcal{P}$  wynika, że  $pq \in \mathcal{P}$ . Niech  $K$  będzie zwartą przestrzenią topologiczną Hausdorffa, np. zwartą przestrzenią metryczną.

**Definicja 7.1.** Podzbiór  $\mathcal{A} \subset C_{\mathbb{R}}(K)$  (lub  $C(K)$ ) nazywamy **podalgebrą**, jeśli z warunku  $f, g \in \mathcal{A}$  wynika, że  $f + g$ ,  $fg$  oraz  $cf$  leżą w  $\mathcal{A}$ , gdzie  $c \in \mathbb{R}$  (lub  $c \in \mathbb{C}$ ).

**Uwaga 7.2.** Zauważmy, że  $\|fg\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty}\|g\|_{\infty}$ , tzn. norma jest podmnożliwa.

**Przykłady.**

1. Wielomiany  $\mathcal{P}$  w  $C[0, 1]$  (lub w  $C[a, b]$ ).
2.  $\mathcal{A} = \{f \in C_{\mathbb{R}}[0, 1] : f(\frac{1}{2}) = 0\}$ .

**Lemat 7.3.** Jeśli  $\mathcal{A} \subset C_{\mathbb{R}}(K)$  jest podalgebrą, to  $\overline{\mathcal{A}}$  (czyli jednostajne granice ciągów z  $\mathcal{A}$ ) też jest podalgebrą.

*Dowód.* Niech  $f, g \in \overline{\mathcal{A}}$ . Zatem istnieją ciągi  $f_n, g_n \in \mathcal{A}$  takie, że  $\|f_n - f\|_{\infty} \xrightarrow{n} 0$  oraz  $\|g_n - g\|_{\infty} \xrightarrow{n} 0$ . Mamy

$$\begin{aligned} \|f_n g_n - fg\|_{\infty} &= \|(f_n - f)(g_n - g) + f(g_n - g) + g(f_n - f)\|_{\infty} \\ &\leq \|f_n - f\|_{\infty}\|g_n - g\|_{\infty} + \|f\|_{\infty}\|g_n - g\|_{\infty} + \|g\|_{\infty}\|f_n - f\|_{\infty} \end{aligned}$$

Zatem  $\|f_n g_n - fg\|_{\infty} \xrightarrow{n} 0$ , co oznacza, że  $fg \in \overline{\mathcal{A}}$ . Podobnie pokazujemy, że  $f + g$ ,  $cf \in \overline{\mathcal{A}}$  dla  $c \in \mathbb{R}$ .  $\square$

**Definicja 7.4.** Mówimy, że podalgebra  $\mathcal{A} \subset C_{\mathbb{R}}(K)$  (lub  $C(K)$ ) **rozdziela punkty**, jeśli dla dowolnych punktów  $x_1, x_2 \in K$  istnieje funkcja  $f \in \mathcal{A}$  taka, że  $f(x_1) \neq f(x_2)$ .

**Definicja 7.5.** Mówimy, że podalgebra  $\mathcal{A} \subset C_{\mathbb{R}}(K)$  (lub  $C(K)$ ) **nie znika** w  $K$ , jeśli dla dowolnego punktu  $x \in K$  istnieje funkcja  $f \in \mathcal{A}$  taka, że  $f(x) \neq 0$ .

**Przykład.** Podalgebra wielomianów  $\mathcal{P} \subset C[a, b]$  nie znika, bo  $1 \in \mathcal{P}$ . Podalgebra  $\mathcal{P}$  rozdziela punkty, bo funkcja  $x$  jest różnowartościowa.

**Lemat 7.6.** Niech  $\mathcal{A} \subset C_{\mathbb{R}}(K)$  będzie podalgebrą rozdzielającą punkty i nieznikającą w  $K$ . Wtedy dla dowolnych punktów  $x_1, x_2 \in K$  oraz liczb  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$  można znaleźć funkcję  $f \in \mathcal{A}$  spełniającą

$$f(x_1) = a_1, \quad f(x_2) = a_2.$$

*Dowód.* Istnieją funkcje  $h_1$  i  $h_2$  oraz funkcja  $g$  w  $\mathcal{A}$  takie, że

$$h_1(x_1) \neq 0, \quad h_2(x_2) \neq 0, \quad g(x_1) \neq g(x_2).$$

Określmy funkcje

$$\begin{aligned} u(x) &= g(x)h_1(x) - g(x_2)h_1(x), \\ v(x) &= g(x)h_2(x) - g(x_1)h_2(x). \end{aligned}$$

Wtedy  $u, v \in \mathcal{A}$  oraz

$$\begin{aligned} u(x_1) &\neq 0, & u(x_2) &= 0, \\ v(x_1) &= 0, & v(x_2) &\neq 0. \end{aligned}$$

Zauważmy, że funkcja

$$f(x) = a_1 \frac{u(x)}{u(x_1)} + a_2 \frac{v(x)}{v(x_2)}$$

spełnia tezę lematu. □

**Twierdzenie 7.7** (Stone-Weierstrass). *Niech  $\mathcal{A} \subset C_{\mathbb{R}}(K)$  będzie podalgebrą rozdzialającą punkty i nieznikającą w  $K$ . Wtedy  $\mathcal{A}$  leży gęsto w  $C_{\mathbb{R}}(K)$ , tzn. dla dowolnej ciągłej funkcji  $f$  w  $C_{\mathbb{R}}(K)$  można znaleźć ciąg  $f_n$  w  $\mathcal{A}$  taki, że  $f_n \xrightarrow[n]{} f$  w  $K$ . Innymi słowy  $\overline{\mathcal{A}} = C_{\mathbb{R}}(K)$ .*

Twierdzenie 7.7 wynika z trzech kolejnych lematów, w których przyjmujemy założenia Tw. 7.7.

**Lemat 7.8.** *Jeśli  $f \in \overline{\mathcal{A}}$ , to również  $|f| \in \overline{\mathcal{A}}$ .*

*Dowód.* Możemy założyć, że  $f \neq 0$ . Rozważmy

$$g = \frac{1}{2\|f\|_{\infty}} f.$$

Wtedy  $\|g\|_{\infty} = \frac{1}{2}$ . Zatem  $|g(x)| \leq \frac{1}{2} < 1$  dla  $x \in K$ . Wiemy, że  $g \in \overline{\mathcal{A}}$ . Wystarczy pokazać, że  $|g| \in \overline{\mathcal{A}}$ . Z twierdzenia Weierstrassa istnieje ciąg wielomianów  $p_n(y)$  taki, że

$$p_n(y) \xrightarrow[n]{} |y|, \quad -1 \leq y \leq 1.$$

Wtedy

$$p_n(g(x)) \underset{n}{\rightrightarrows} |g(x)|, \quad x \in K.$$

Rzeczywiście

$$\sup_K |p_n(g(x)) - |g(x)|| \leq \sup_{|y| \leq 1} |p_n(y) - |y|| \xrightarrow{n} 0.$$

Ale z Lematu 7.3 mamy  $p_n(g(x)) \in \overline{\mathcal{A}}$ . Zatem  $|g(x)| \in \overline{\mathcal{A}}$ . □

**Uwaga 7.9.** Ciąg wielomianów przybliżający  $|x|$  można wskazać jawnym wzorem. Na przykład, korzystając z rozwinięcia w szereg Taylora mamy

$$\begin{aligned} |x| &= (1 + (x^2 - 1))^{1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (x^2 - 1)^n \\ &= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n} (1 - x^2)^n. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Równość jest spełniona dla  $|1 - x^2| < 1$  czyli dla  $0 < |x| \leq 1$ . Z (7.1) mamy

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{2n-1} \binom{2n}{n} (1 - x^2)^n \leq 1 - |x| < 1.$$

Zatem

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{2n-1} \binom{2n}{n} \leq 1, \quad N \geq 1,$$

czyli szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \binom{2n}{n}$  jest zbieżny. Z kryterium Weierstrassa o majoracji szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \binom{2n}{n} (1 - x^2)^n, \quad |x| \leq 1$$

jest zbieżny jednostajnie i suma jest funkcją ciągłą dla  $|x| \leq 1$ . Stąd równość (7.1) jest spełniona dla  $|x| \leq 1$ .

**Lemat 7.10.** *Jeśli  $f, g \in \overline{\mathcal{A}}$ , to  $\min(f, g)$  i  $\max(f, g)$  również leżą w  $\overline{\mathcal{A}}$ .*

*Dowód.* Teza wynika z poprzedniego lematu oraz ze wzorów

$$\min(f, g) = \frac{f + g - |f - g|}{2}, \quad \max(f, g) = \frac{f + g + |f - g|}{2}.$$

□

**Uwaga 7.11.** Z lematu wynika natychmiast, że jeśli  $f_1, f_2, \dots, f_n \in \overline{\mathcal{A}}$ , to  $\min(f_1, f_2, \dots, f_n)$  oraz  $\max(f_1, f_2, \dots, f_n)$  leżą w  $\overline{\mathcal{A}}$ .

**Lemat 7.12.** Niech  $f \in C_{\mathbb{R}}(K)$  oraz  $x \in K$ . Dla dowolnie wybranej liczby  $\varepsilon > 0$  istnieje funkcja  $g_x \in \overline{\mathcal{A}}$  taka, że

$$\begin{aligned} g_x(x) &= f(x) \\ g_x(t) &> f(t) - \varepsilon, \quad \text{dla } t \in K. \end{aligned}$$

*Dowód.* Na podstawie lematu 7.6, dla  $y \in K$  istnieje funkcja  $h_y \in \mathcal{A}$  taka, że

$$h_y(x) = f(x), \quad h_y(y) = f(y).$$

Z ciągłości istnieje otoczenie otwarte  $U_y$  punktu  $y$  takie, że

$$h_y(t) > f(t) - \varepsilon, \quad \text{dla } t \in U_y.$$

Otoczenia  $U_y$ ,  $y \in K$ , pokrywają zbiór  $K$ . Ze zwartości zbioru  $K$  można znaleźć skończone podpokrycie

$$K \subset U_{y_1} \cup U_{y_2} \cup \dots \cup U_{y_n}.$$

Określmy funkcję

$$g_x(t) = \max(h_{y_1}(t), h_{y_2}(t), \dots, h_{y_n}(t)).$$

Z uwagi po lemacie 7.10 wiemy, że  $g_x \in \overline{\mathcal{A}}$ . Mamy  $g_x(x) = f(x)$ . Ponadto jeśli  $t \in K$ , to  $t \in U_{y_j}$  dla pewnej liczby  $j = 1, 2, \dots, n$ . Wtedy

$$g_x(t) \geq h_{y_j}(t) > f(t) - \varepsilon.$$

□

**Lemat 7.13.** Niech  $f \in C_{\mathbb{R}}(K)$  oraz  $\varepsilon > 0$ . Wtedy istnieje funkcja  $h \in \overline{\mathcal{A}}$  taka, że

$$|h(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \text{dla } x \in K.$$

*Dowód.* Z poprzedniego lematu, dla każdego punktu  $x \in K$  istnieje funkcja  $g_x \in \overline{\mathcal{A}}$  spełniająca

$$g_x(x) = f(x), \quad \text{oraz } g_x(t) > f(t) - \varepsilon, \quad t \in K.$$

Z ciągłości istnieje otwarte otoczenie  $V_x$  punktu  $x$ , dla którego

$$g_x(t) < f(t) + \varepsilon, \quad t \in V_x.$$

Otoczenia  $V_x$  stanowią pokrycie zbioru  $K$ . Ze zwartości znajdujemy skończone podpokrycie

$$K \subset V_{x_1} \cup V_{x_2} \cup \dots \cup V_{x_n}.$$

Określmy

$$h(t) = \min((g_{x_1}(t), g_{x_2}(t), \dots, g_{x_n}(t)).$$

Z lematu 7.10 funkcja  $h$  należy do  $\overline{\mathcal{A}}$ . Wiemy, że

$$h(t) > f(t) - \varepsilon, \quad \text{bo } g_{x_j}(t) > f(t) - \varepsilon, \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots, n.$$

Dla  $t \in K$  mamy  $t \in V_{x_j}$  dla pewnego  $j = 1, 2, \dots, n$ . Zatem

$$h(t) \leq g_{x_j}(t) < f(t) + \varepsilon.$$

W rezultacie

$$|h(t) - f(t)| < \varepsilon, \quad \text{dla } t \in K.$$

□

Przechodzimy teraz do przypadku funkcji o wartościach zespolonych.

**Definicja 7.14.** Podalgebrę  $\mathcal{A} \subset C(K)$  nazywamy **samosprzężoną** jeśli z tego, że  $f$  leży w  $\mathcal{A}$  wynika, że funkcja sprzężona  $\bar{f}$  również leży w  $\mathcal{A}$ .

**Twierdzenie 7.15** (Stone-Weierstrass, wersja zespolona). Jeśli  $\mathcal{A}$  jest samosprzężoną podalgebrą w  $C(K)$ , rozdzielającą punkty i nieznikającą, to  $\mathcal{A}$  leży gęsto w  $C(K)$ .

*Dowód.* Niech

$$\mathcal{A}_{\mathbb{R}} = \{f \in \mathcal{A} : \bar{f} = f\} \subset C_{\mathbb{R}}(K).$$

Zauważmy, że  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$  jest podalgebrą w  $C_{\mathbb{R}}(K)$ . Sprawdźmy, że  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$  spełnia założenia Twierdzenia 7.7. Z założenia dla  $x_1 \neq x_2 \in K$  istnieje funkcja  $f \in \mathcal{A}$  taka, że  $f(x_1) \neq f(x_2)$ . Zatem

$$\operatorname{Re} f(x_1) \neq \operatorname{Re} f(x_2) \quad \text{lub} \quad \operatorname{Im} f(x_1) \neq \operatorname{Im} f(x_2).$$

Ale  $\operatorname{Re} f$  oraz  $\operatorname{Im} f$  leżą w  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ , bo algebra  $\mathcal{A}$  jest samosprężona oraz

$$\operatorname{Re} f = \frac{f + \bar{f}}{2}, \quad \operatorname{Im} f = \frac{f - \bar{f}}{2i}.$$

Stąd  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$  rozdziela punkty.

Dla  $x \in K$  istnieje  $f \in \mathcal{A}$  taka, że  $f(x) \neq 0$ . Zatem

$$\operatorname{Re} f(x) \neq 0 \quad \text{lub} \quad \operatorname{Im} f(x) \neq 0.$$

Stąd  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$  nie znika. Z Twierdzenia 7.7 algebra  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$  leży gęsto w  $C_{\mathbb{R}}(K)$ . Niech  $f \in C(K)$ . Wtedy

$$f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f.$$

Każdą z funkcji  $\operatorname{Re} f$  i  $\operatorname{Im} f$  można przybliżać jednostajnie funkcjami z  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ . Zatem  $f$  może być przybliżona funkcjami z  $\mathcal{A}$ .  $\square$

### Przykłady.

1. Niech  $K = [0, \pi]$  oraz

$$\mathcal{A} = \operatorname{lin}_{\mathbb{R}}\{1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \dots\}.$$

$\mathcal{A}$  jest podalgebrą w  $C_{\mathbb{R}}[0, \pi]$ , bo

$$\cos nx \cos mx = \frac{1}{2} \cos(n+m)x + \frac{1}{2} \cos(n-m)x.$$

$\mathcal{A}$  nie znika, bo  $1 \in \mathcal{A}$ . Ponadto  $\mathcal{A}$  rozdziela punkty, ponieważ funkcja  $\cos x$  jest różnowartościowa w przedziale  $[0, \pi]$ . Zatem  $\bar{\mathcal{A}} = C_{\mathbb{R}}[0, \pi]$ .

2. Niech  $K = \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ . Możemy przyjąć, że  $\mathbb{T} = [0, 2\pi)$  przez podstawienie  $z = e^{ix}$ . Rozważmy

$$\mathcal{A} = \operatorname{lin}\{e^{inx} : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Kombinację liniową funkcji  $e^{inx}$  nazywamy *wielomianem trygonometrycznym*, ze względu na równość

$$e^{inx} = \cos nx + i \sin nx.$$

$\mathcal{A}$  jest podalgebrą w  $C(\mathbb{T})$ , bo  $e^{inx} e^{imx} = e^{i(n+m)x}$ . Algebra  $\mathcal{A}$  nie znika, bo  $1 \in \mathcal{A}$  (dla  $n = 0$ ). Algebra  $\mathcal{A}$  rozdziela punkty, bo funkcja  $e^{ix}$  ( $n = 1$ ) jest różnowartościowa na  $\mathbb{T}$ . Wreszcie  $\mathcal{A}$  jest samosprężona, bo  $\overline{e^{inx}} = e^{-inx}$ . Z Twierdzenia 7.15 mamy  $\bar{\mathcal{A}} = C(\mathbb{T})$ , tzn. każda funkcja ciągła na  $\mathbb{T}$  (równoważnie funkcja  $f$  z  $C[0, 2\pi]$  taka, że  $f(0) = f(2\pi)$ ) jest jednostajną granicą ciągu zespolonych wielomianów trygonometrycznych.

**Uwaga 7.16.** Niech

$$\mathcal{A}_+ = \text{lin}\{e^{inx} : n \geq 0\}.$$

$\mathcal{A}_+$  jest podalgebrą rozdzielającą punktu i nieznikającą w  $\mathbb{T}$ , ale  $\mathcal{A}_+$  nie jest gęsta w  $C(\mathbb{T})$ . Rzeczywiście,  $e^{-ix} \notin \overline{\mathcal{A}_+}$ . To wynika z rozumowania poniżej. Mamy dla  $n \geq 0$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ix} \overline{e^{inx}} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i(n+1)x} dx = \frac{1}{2\pi} \frac{-1}{i(n+1)} e^{-i(n+1)x} \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Zatem

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ix} \overline{f(x)} dx = 0, \quad \text{dla } f \in \mathcal{A}_+.$$

Stąd

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ix} \overline{f(x)} dx = 0, \quad \text{dla } f \in \overline{\mathcal{A}_+}.$$

Funkcja  $e^{-ix}$  nie może należeć do  $\overline{\mathcal{A}_+}$ , bo podstawiając  $f(x) = e^{-ix}$  otrzymamy wynik 1.

3. Rozważmy  $C_{\mathbb{R}}([0, 1] \times [0, 1])$  oraz

$$\mathcal{A} = \text{lin}_{\mathbb{R}}\{f(x)g(y) : f, g \in C_{\mathbb{R}}[0, 1]\}.$$

Rodzina  $\mathcal{A}$  składa się zatem z rzeczywistych kombinacji liniowych funkcji rozdzielonych zmiennych.  $\mathcal{A}$  jest podalgebrą, bo

$$f_1(x)g_1(y) \cdot f_2(x)g_2(y) = [f_1(x)f_2(x)] [g_1(y)g_2(y)].$$

Algebra  $\mathcal{A}$  nie znika, bo  $1 \in \mathcal{A}$ . Ponadto  $\mathcal{A}$  rozdziela punkty, bo jeśli  $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$  to funkcja  $f(x, y) = x$  lub funkcja  $g(x, y) = y$  rozdziela te punkty. Zatem  $\overline{\mathcal{A}} = C_{\mathbb{R}}([0, 1] \times [0, 1])$ .

**Twierdzenie 7.17** (Stone-Weierstrass). *Założmy, że  $\mathcal{A}$  jest podalgebrą w  $C_{\mathbb{R}}(K)$  rozdzielającą punkty. Wtedy zachodzi jeden z przypadków:*

(i)  $\overline{\mathcal{A}} = C_{\mathbb{R}}(K)$ .



(ii) Istnieje punkt  $x_0$  w  $K$  taki, że  $\overline{\mathcal{A}} = \{f \in C_{\mathbb{R}}(K) : f(x_0) = 0\}$ .

*Dowód.* Załóżmy, że  $\mathcal{A}$  nie znika. Wtedy z Twierdzenia 7.7 otrzymujemy (i). W przeciwnym wypadku istnieje punkt  $x_0$  w  $K$  taki, że  $f(x_0) = 0$  dla wszystkich  $f \in \mathcal{A}$ . Wtedy  $\overline{\mathcal{A}} \subset \{f \in C_{\mathbb{R}}(K) : f(x_0) = 0\}$ . Rozważmy

$$\mathcal{A}_1 = \{f(x) + \alpha : f \in \mathcal{A}, \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Rodzina  $\mathcal{A}_1$  jest podalgebrą. Ponieważ  $\mathcal{A}_1 \supset \mathcal{A}$ , to  $\mathcal{A}_1$  rozdziela punkty. Ponadto  $\mathcal{A}_1$  nie znika, bo zawiera funkcję 1. Zatem  $\overline{\mathcal{A}_1} = C_{\mathbb{R}}(K)$ . Niech  $g \in \{f \in C_{\mathbb{R}}(K) : f(x_0) = 0\}$ . Chcemy pokazać, że  $g \in \overline{\mathcal{A}}$ . Ale wiemy, że  $g \in \overline{\mathcal{A}_1}$ . Zatem istnieją ciągi  $f_n \in \mathcal{A}$  oraz  $\alpha_n \in \mathbb{R}$  takie, że

$$f_n(x) + \alpha_n \xrightarrow[n]{} g(x).$$

Podstawiając  $x = x_0$  otrzymamy  $\alpha_n \xrightarrow[n]{} 0$ . Zatem

$$f_n(x) \xrightarrow[n]{} g(x)$$

co oznacza, że  $g \in \overline{\mathcal{A}}$ . □

## 8 Przestrzenie sprzężone do $L^p$ i do $C(X)$

Rozważamy przestrzeń  $L^p(X, \mu)$ , gdzie  $X$  jest przestrzenią z miarą  $\sigma$ -skończoną  $\mu$  określoną na  $X$ , tzn. na pewnym  $\sigma$ -pierścieniu podzbiorów przestrzeni  $X$ . Jak wiadomo z kursu funkcji rzeczywistych  $L^p(X, \mu)$  jest przestrzenią Banacha z normą

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left( \int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|, & p = \infty. \end{cases}$$

Dla liczby  $1 \leq p \leq \infty$  symbolem  $q$  oznaczamy wykładnik sprzężony, tzn. spełniający  $p^{-1} + q^{-1} = 1$ . Przyjmujemy  $q = \infty$  dla  $p = 1$  oraz  $q = 1$  dla  $p = \infty$ .

**Twierdzenie 8.1.** Niech  $1 \leq p < \infty$  oraz  $g \in L^q(X, \mu)$ . Wtedy odwzorowanie

$$G(f) = \int_X f(x)g(x) d\mu(x)$$

jest ograniczonym funkcjonałem liniowym na przestrzeni  $L^p(X, \mu)$  oraz

$$\|G\| = \|g\|_q.$$

*Dowód.* Dowód przeprowadzimy tylko dla  $p > 1$ . Możemy się ograniczyć do przypadku  $g \neq 0$ . Z nierówności Höldera mamy

$$\int_X |f(x)g(x)| d\mu(x) \leq \left( \int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p} \left( \int_X |g(x)|^q d\mu(x) \right)^{1/q} < \infty,$$

zatem wielkość  $G(f)$  jest dobrze określona.  $G$  jest odwzorowaniem liniowym, bo wielkość  $G(f)$  zależy liniowo od funkcji  $f$ . Ponadto

$$|G(f)| \leq \int_X |f(x)g(x)| d\mu(x) \leq \|g\|_q \|f\|_p,$$

czyli

$$\|G\| \leq \|g\|_q.$$

Niech  $f(x) = \overline{\operatorname{sgn} g(x)} |g(x)|^{q-1}$ . Wtedy

$$\int_X |f(x)|^p d\mu(x) = \int_X |g(x)|^{p(q-1)} d\mu(x) = \int_X |g(x)|^q d\mu(x) < \infty.$$

Zatem  $f \in L^p(X, \mu)$  oraz  $\|f\|_p^p = \|g\|_q^q$ . Ponadto

$$G(f) = \int_X |g(x)|^q d\mu(x) = \|g\|_q^q.$$

Reasumując

$$\frac{G(f)}{\|f\|_p} = \frac{\|g\|_q^q}{\|g\|_q^{q/p}} = \|g\|_q.$$

Stąd  $\|G\| \geq \|g\|_q$ . □

## 8.1 Wersja rzeczywista

Naszym celem jest udowodnienie twierdzenia odwrotnego do Tw. 8.1. Najpierw rozważymy przypadek funkcji o wartościach rzeczywistych i miary skończonej, tzn.  $\mu(X) < \infty$ .

**Lemat 8.2.** *Załóżmy, że  $\mu(X) < \infty$ . Niech  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją całkowalną oraz*

$$\left| \int_X g(x)\varphi(x) d\mu(x) \right| \leq M \|\varphi\|_p, \quad (8.1)$$

dla dowolnej funkcji prostej  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  (funkcja prosta przyjmuje skończenie wiele wartości). Wtedy  $g \in L^q_{\mathbb{R}}(X, \mu)$ .

*Dowód.* Rozważymy tylko przypadek  $p > 1$ . Chcemy udowodnić, że

$$\int |g(x)|^q d\mu(x) < \infty.$$

Istnieje rosnący ciąg nieujemnych funkcji prostych  $\psi_n$  taki, że  $\psi_n(x) \xrightarrow{n} |g(x)|^q$  dla  $x \in X$ . Określmy

$$\varphi_n(x) = \operatorname{sgn} g(x) \psi_n(x)^{1/p}.$$

$\varphi_n$  jest nadal funkcją prostą, bo  $\operatorname{sgn} g(x)$  przyjmuje tylko trzy wartości. Podstawiając funkcję  $\varphi_n$  do nierówności (8.1) otrzymujemy

$$\int_X |g(x)| \psi_n(x)^{1/p} d\mu(x) \leq M \left( \int_X \psi_n(x) d\mu(x) \right)^{1/p}.$$

Dalej korzystając z  $\psi_n(x)^{1/q} \leq |g(x)|$  mamy

$$\begin{aligned} \int_X \psi_n(x) d\mu(x) &= \int_X \psi_n(x)^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}} d\mu(x) \\ &\leq \int_X |g(x)| \psi_n(x)^{\frac{1}{p}} d\mu(x) \leq M \left( \int_X \psi_n(x) d\mu(x) \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Po przekształceniu dostajemy

$$\int_X \psi_n(x) d\mu(x) \leq M^q.$$

Dalej przechodząc do granicy, gdy  $n \rightarrow \infty$ , otrzymujemy

$$\int_X |g(x)|^q d\mu(x) \leq M^q.$$

□

**Twierdzenie 8.3.** Niech  $G$  będzie ograniczonym rzeczywistym funkcjonalem liniowym na przestrzeni  $L_{\mathbb{R}}^p(X, \mu)$ , gdzie  $X$  jest  $\sigma$ -skończoną przestrzenią miarową. Wtedy istnieje jedyna funkcja  $g$  w  $L_{\mathbb{R}}^q(X, \mu)$  taka, że

$$G(f) = \int_X f(x)g(x) d\mu(x). \quad (8.2)$$

*Dowód.* Ograniczymy się do  $p > 1$ . Zaczniemy od przypadku, gdy  $\mu(X) < \infty$ . Wtedy każda funkcja ograniczona leży w  $L_{\mathbb{R}}^p(X, \mu)$ , bo jeśli  $|f(x)| \leq c$ , to

$$\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \leq c^p \mu(X).$$

W szczególności funkcja  $\mathbb{1}_E$  leży w  $L_{\mathbb{R}}^p(X, \mu)$  dla dowolnego zbioru mierzalnego  $E$ . Określamy

$$\nu(E) = G(\mathbb{1}_E).$$

Sprawdzimy, że funkcja zbiorów  $\nu$  jest przeliczalnie addytywna i ma ograniczone wahanie. Niech  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$  będzie sumą rozłącznych zbiorów  $E_n$ . Określmy  $\alpha_n = \operatorname{sgn} \nu(\mathbb{1}_{E_n})$ . Rozważmy funkcje

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mathbb{1}_{E_n}(x), \quad \mathbb{1}_E(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{E_n}(x).$$

Oba szeregi są zbieżne w  $L_{\mathbb{R}}^p(X, \mu)$ . Istotnie

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{n=1}^N \alpha_n \mathbb{1}_{E_n} \right\|_p &= \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} \alpha_n \mathbb{1}_{E_n} \right\|_p \\ &= \left( \sum_{n=N+1}^{\infty} |\alpha_n|^p \mu(E_n) \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{n=N+1}^{\infty} \mu(E_n) \right)^{1/p} \xrightarrow[n]{n} 0, \end{aligned}$$

bo  $\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$ . Podobnie

$$\left\| \mathbb{I}_E - \sum_{n=1}^N \mathbb{I}_{E_n} \right\|_p = \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} \mathbb{I}_{E_n} \right\|_p = \left( \sum_{n=N+1}^{\infty} \mu(E_n) \right)^{1/p} \xrightarrow{n} 0.$$

Z ciągłości funkcjonału  $G$  wnioskujemy, że

$$G(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n G(\mathbb{I}_{E_n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \nu(\mathbb{I}_{E_n}) = \sum_{n=1}^{\infty} |\nu(E_n)|.$$

Ale

$$|G(f)| \leq \|G\| \|f\|_p$$

oraz

$$\|f\|_p = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^p \mu(E_n) \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \right)^{1/p} \leq \mu(E)^{1/p}.$$

Zatem

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\nu(E_n)| \leq \|G\| \mu(E)^{1/p} \leq \|G\| \mu(X)^{1/p}, \quad (8.3)$$

co oznacza, że  $\nu$  ma ograniczone wahanie. Dalej

$$\nu(E) = G(\mathbb{I}_E) = \sum_{n=1}^{\infty} G(\mathbb{I}_{E_n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n),$$

czyli  $\nu$  jest przeliczalnie addytywna.

Z nierówności (8.3) zastosowanej do rodziny zbiorów  $E_n = \emptyset$ , dla  $n \geq 2$ , wynika

$$|\nu(E)| \leq \|G\| \mu(E)^{1/p}.$$

Zatem miara znakowana  $\nu$  jest absolutnie ciągła względem miary  $\mu$ . Z twierdzenia Radona-Nikodyma istnieje więc funkcja mierzalna  $g$ , bezwzględnie całkowna względem miary  $\mu$  i spełniająca

$$\nu(E) = \int_E g(x) d\mu(x) = \int_X g(x) \mathbb{I}_E(x) d\mu(x),$$

czyli

$$G(\mathbb{I}_E) = \int_X g(x) \mathbb{I}_E(x) d\mu(x).$$

Rozważając kombinacje liniowe funkcji charakterystycznych zbiorów otrzymamy

$$G(\varphi) = \int_X g(x) \varphi(x) d\mu(x),$$

dla funkcji prostych  $\varphi$ . Ponieważ funkcjonał  $G$  jest ograniczony, to

$$\left| \int_X g(x) \varphi(x) d\mu(x) \right| = |G(\varphi)| \leq \|G\| \|\varphi\|_p,$$

dla funkcji prostych  $\varphi$ . Z lematu 8.2 wnioskujemy, że  $g \in L_{\mathbb{R}}^q(X, \mu)$ . Wykażemy wzór (8.2). Niech  $f \in L_{\mathbb{R}}^p(X, \mu)$ . Wtedy istnieje ciąg  $\varphi_n$  funkcji prostych taki, że  $\varphi_n \xrightarrow{n} f$  w normie przestrzeni  $L_{\mathbb{R}}^p(X, \mu)$  oraz  $|\varphi_n(x)| \leq |f(x)|$ . Wtedy

$$\begin{aligned} G(f) &= \lim_n G(\varphi_n) = \lim_n \int_X \varphi_n(x) g(x) d\mu(x) \\ &= \int_X \lim_n \varphi_n(x) g(x) d\mu(x) = \int_X f(x) g(x) d\mu(x). \end{aligned}$$

Możliwość wejścia z granicą pod znak całki wynika z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej, bo  $|\varphi_n(x)g(x)| \leq |f(x)g(x)|$ , a z nierówności Höldera funkcja  $fg$  jest całkowna. Funkcja  $g$  jest jedyną funkcją spełniającą (8.2). Rzeczywiście, załóżmy, że

$$G(f) = \int_X f(x)g(x) d\mu(x) = \int_X f(x)h(x) d\mu(x)$$

dla  $g, h \in L_{\mathbb{R}}^q(X, \mu)$ . Określmy funkcjonał

$$\Phi(f) = \int_X f(x)[g(x) - h(x)] d\mu(x).$$

Ale  $\Phi(f) = 0$  dla  $f \in L_{\mathbb{R}}^p(X, \mu)$ . Z Twierdzenia 8.1 mamy

$$\|\Phi\| = \|g - h\|_q.$$

Zatem  $g = h$  prawie wszędzie.

Przechodzimy do przypadku, gdy  $\mu(X) = \infty$ . Niech

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n, \quad \text{gdzie } \mu(X_n) < \infty, \quad X_n \subset X_{n+1}.$$

Wtedy możemy przyjąć, że

$$L_{\mathbb{R}}^p(X_n, \mu) \subset L_{\mathbb{R}}^p(X_{n+1}, \mu) \subset L_{\mathbb{R}}^p(X, \mu).$$

Funkcjonał  $G$  obcinamy do podprzestrzeni  $L_{\mathbb{R}}^p(X_n, \mu)$  i z pierwszej części dowodu znajdujemy funkcję  $g_n \in L_{\mathbb{R}}^q(X_n, \mu)$  taką, że

$$G(f) = \int_{X_n} f(x)g_n(x) d\mu(x), \quad \text{dla } f \in L_{\mathbb{R}}^p(X_n, \mu).$$

Zatem dla  $f \in L_{\mathbb{R}}^p(X_n, \mu) \subset L_{\mathbb{R}}^p(X_{n+1}, \mu)$  mamy

$$\begin{aligned} G(f) &= \int_{X_n} f(x)g_n(x) d\mu(x) \\ &= \int_{X_{n+1}} f(x)g_{n+1}(x) d\mu(x) = \int_{X_n} f(x)g_{n+1}(x) d\mu(x). \end{aligned}$$

Z pierwszej części dowodu wynika, że  $g_n(x) = g_{n+1}(x)$  prawie wszędzie na zbiorze  $X_n$ . Modyfikując wartości funkcji  $g_{n+1}$  na zbiorze miary zero można zażądać, aby

$$g_n(x) = g_{n+1}(x), \quad x \in X_n.$$

Wiemy, że

$$\|g_n\|_q = \|G|_{L_{\mathbb{R}}^p(X_n, \mu)}\| \leq \|G\|.$$

Określmy

$$g(x) = g_n(x), \quad \text{dla } x \in X_n.$$

Definicja funkcji  $g$  jest poprawna, bo jeśli  $x \in X_m \cap X_n$ , to  $g_m(x) = g_n(x)$ . Niech  $\tilde{g}_n$  oznacza rozszerzenie funkcji  $g_n$  na  $X$  tzn.

$$\tilde{g}_n(x) = \begin{cases} g_n(x), & \text{dla } x \in X_n, \\ 0, & \text{dla } x \in X \setminus X_n. \end{cases}$$

Wtedy  $|\tilde{g}_n(x)| \nearrow_n |g(x)|$ . Zatem z twierdzenia o zbieżności monotonicznej mamy

$$\begin{aligned} \int_X |g(x)|^q d\mu(x) &= \lim_n \int_X |\tilde{g}_n(x)|^q d\mu(x) \\ &= \lim_n \int_{X_n} |g_n(x)|^q d\mu(x) = \lim_n \|g_n\|_{L_{\mathbb{R}}^q(X_n, \mu)}^q \leq \|G\|^q < \infty. \end{aligned}$$

W rezultacie  $g \in L_{\mathbb{R}}^q(X, \mu)$ .

Dla funkcji  $f \in L_{\mathbb{R}}^p(X, \mu)$  niech  $f_n = f \mathbb{1}_{X_n}$ . Wtedy  $f_n \xrightarrow{n} f$  w  $L_{\mathbb{R}}^p(X, \mu)$ . Rzeczywiście

$$\|f_n - f\|_p^p = \int_X |f_n(x) - f(x)|^p d\mu(x) = \int_{X \setminus X_n} |f(x)|^p d\mu(x) \xrightarrow{n} 0,$$

bo  $f \in L_{\mathbb{R}}^p(X, \mu)$  oraz  $X$  jest wstępującą sumą zbiorów  $X_n$ . Dalej

$$\begin{aligned} \int_X f(x)g(x) d\mu(x) &= \lim_n \int_X f_n(x)g(x) d\mu(x) \\ &= \lim_n \int_{X_n} f_n(x)g_n(x) d\mu(x) = \lim_n G(f_n) = G(f). \end{aligned}$$

Pierwsza z powyższych równości wynika z

$$\begin{aligned} \left| \int_X f(x)g(x) d\mu(x) - \int_X f_n(x)g(x) d\mu(x) \right| \\ \leq \int_X |f(x) - f_n(x)| |g(x)| d\mu(x) \leq \|f - f_n\|_p \|g\|_q \xrightarrow{n} 0, \end{aligned}$$

z kolei ostatnia wynika z ciągłości funkcjonału  $G$ . Znowu jedyności funkcji  $g$ , która spełnia tezę twierdzenia wynika z Tw. 8.1.  $\square$

**Uwaga 8.4.** Założenie o  $\sigma$ -skończoności miary  $\mu$  nie jest potrzebne dla  $p > 1$ . Wyjaśnienie oparte będzie na następnym lemacie.

**Lemat 8.5.** Dla  $g \in L^p(X, \mu)$  zbiór  $\{x \in X : g(x) \neq 0\}$  jest  $\sigma$ -skończony.

*Dowód.* Dla liczby  $\delta > 0$  określamy zbiór

$$A_\delta = \{x \in X : |g(x)| \geq \delta\}.$$

Wtedy

$$\infty > \int_X |g(x)|^p d\mu(x) \geq \int_{A_\delta} |g(x)|^p d\mu(x) \geq \delta^p \int_{A_\delta} d\mu(x) = \delta^p \mu(A_\delta).$$

Zatem  $\mu(A_\delta) < \infty$ . Ze wzoru

$$\{x \in X : g(x) \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{\frac{1}{n}}$$

wynika teza lematu.  $\square$



Rozważmy ograniczony funkcjonal liniowy  $G$  na przestrzeni  $L_{\mathbb{R}}^p(X, \mu)$ , dla  $p > 1$ . Istnieje ciąg funkcji  $f_n \in L^p(X, \mu)$  spełniający  $\|f_n\|_p = 1$  oraz  $|G(f_n)| \xrightarrow{n} \|G\|$ . Mnożąc  $f_n$  przez  $\pm 1$  można założyć, że  $G(f_n) \geq 0$  oraz  $G(f_n) \xrightarrow{n} \|G\|$ . Niech

$$X_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f_n(x) \neq 0\}.$$

Z lematu zbiór  $X_0$  jest  $\sigma$ -skończony.

**Lemat 8.6.** *Jeśli funkcja  $h \in L_{\mathbb{R}}^p(X, \mu)$ ,  $p > 1$ , zeruje się na  $X_0$ , to  $G(h) = 0$ .*

*Dowód.* Załóżmy, że istnieje funkcja  $h \in L_{\mathbb{R}}^p(X, \mu)$  taka, że  $G(h) \neq 0$  oraz  $h|_{X_0} = 0$ . Bez straty ogólności można przyjąć, że  $G(h) = 1$ . Wtedy dla  $\alpha > 0$  mamy

$$\|G\| \geq \frac{G(f_n + \alpha h)}{\|f_n + \alpha h\|_p} = \frac{G(f_n) + \alpha}{(\|f_n\|_p^p + \alpha^p \|h\|_p^p)^{1/p}} \xrightarrow{n} \frac{\|G\| + \alpha}{(1 + \alpha^p \|h\|_p^p)^{1/p}}.$$

Po przekształceniu, korzystając z nierówności Bernoulliego, dostajemy

$$1 + \alpha^p \|h\|_p^p \geq \left(1 + \frac{\alpha}{\|G\|}\right)^p \geq 1 + p \frac{\alpha}{\|G\|}.$$

Zatem

$$\alpha^{p-1} \geq \frac{p}{\|h\|_p^p \|G\|}, \quad \alpha > 0,$$

co prowadzi do sprzeczności, gdy  $p > 1$ .  $\square$

Opierając się na Lemacie 8.6 łatwo zakończyć rozumowanie. Istotnie, dla  $f \in L_{\mathbb{R}}^p(X, \mu)$  możemy zapisać

$$G(f) = G(f \mathbb{1}_{X_0} + f \mathbb{1}_{X \setminus X_0}) = G(f \mathbb{1}_{X_0}) + G(f \mathbb{1}_{X \setminus X_0}) = G(f \mathbb{1}_{X_0}).$$

Zauważmy, że  $f \mathbb{1}_{X_0} \in L_{\mathbb{R}}^p(X_0, \mu)$ . Z Twierdzenia 8.3 istnieje więc funkcja  $g_0 \in L_{\mathbb{R}}^q(X_0, \mu)$  taka, że

$$G(f) = G(f \mathbb{1}_{X_0}) = \int_{X_0} f(x) g_0(x) d\mu(x).$$

Wtedy

$$G(f) = \int_X f(x) g(x) d\mu(x),$$

gdzie

$$g = \begin{cases} g_0(x), & x \in X_0, \\ 0, & x \in X \setminus X_0. \end{cases}$$

Oczywiście zachodzi  $g \in L_{\mathbb{R}}^q(X, \mu)$ .

## 8.2 Wersja zespolona

Rozważamy funkcje z  $L^p(X, \mu)$  o wartościach zespolonych. Niech  $G$  będzie ograniczonym funkcjonałem liniowym na  $L^p(X, \mu)$ . Możemy zapisać

$$L^p(X, \mu) = L_{\mathbb{R}}^p(X, \mu) \oplus iL_{\mathbb{R}}^p(X, \mu),$$

bo dla  $f \in L^p(X, \mu)$  mamy

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x), \quad f_1, f_2 \in L_{\mathbb{R}}^p(X, \mu).$$

Określmy funkcjonały  $G_1$  i  $G_2$  na  $L_{\mathbb{R}}^p(X, \mu)$  wzorami

$$G_1(f) = \operatorname{Re} G(f), \quad G_2(f) = \operatorname{Im} G(f).$$

Funkcjonały  $G_1$  i  $G_2$  są ograniczone, bo

$$|G_j(f)| \leq |G(f)| \leq \|G\| \|f\|_p, \quad j = 1, 2.$$

Istnieją zatem funkcje  $g_1, g_2 \in L_{\mathbb{R}}^q(X, \mu)$  takie, że

$$G_j(f) = \int_X f(x)g_j(x) d\mu(x), \quad f \in L_{\mathbb{R}}^p(X, \mu), \quad j = 1, 2.$$

Dla  $f \in L_{\mathbb{R}}^p(X, \mu)$  mamy zatem

$$G(f) = G_1(f) + iG_2(f) = \int_X f(x)[g_1(x) + ig_2(x)] d\mu(x).$$

Niech  $g(x) = g_1(x) + ig_2(x)$ . Wtedy  $g \in L^q(X, \mu)$  oraz

$$G(f) = \int_X f(x)g(x) d\mu(x), \quad f \in L_{\mathbb{R}}^p(X, \mu).$$

Zatem dla  $f \in L^p(X, \mu)$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} G(f) &= G(f_1 + if_2) = G(f_1) + iG(f_2) \\ &= \int_X f_1(x)g(x) d\mu(x) + i \int_X f_2(x)g(x) d\mu(x) = \int_X f(x)g(x) d\mu(x). \end{aligned}$$

### 8.3 Twierdzenie Riesz

Wiemy, że przestrzeń sprzężoną do  $C[0, 1]$  można utożsamić z przestrzenią zespolonych funkcji  $w(x)$  o wahanu ograniczonym, lewostronnie ciągłych w  $(0, 1)$  oraz  $w(0) = 0$ . To twierdzenie można rozszerzyć na zwarte przestrzenie topologiczne Hausdorffa. Niech  $X$  będzie taką przestrzenią. Najmniejsze  $\sigma$ -ciało zawierające zbiory otwarte nazywamy  $\sigma$ -ciałem zbiorów borelowskich.

**Definicja 8.7.** Borelowską miarę skończoną (nieujemną)  $\mu$  nazywamy **regularną** jeśli dla dowolnego borelowskiego zbioru  $A$  mamy

$$\mu(A) = \sup_{\substack{E \subset A \\ E \text{ domkn.}}} \mu(E) = \inf_{\substack{A \subset F \\ F \text{ otw.}}} \mu(F).$$

Miarę zespoloną o wahanu ograniczonym na  $X$  nazywamy regularną jeśli

$$\mu = \mu_1 - \mu_2 + i(\mu_3 - \mu_4),$$

gdzie miary  $\mu_j$  dla  $j = 1, 2, 3, 4$  są nieujemne i regularne. Rodzinę takich miar oznaczamy symbolem  $M(X)$ .

**Twierdzenie 8.8** (F. Riesz). Niech  $X$  będzie zwartą przestrzenią topologiczną Hausdorffa. Każdy ograniczony funkcyjonal liniowy  $\varphi$  na przestrzeni  $C(X)$  ma postać

$$\varphi(x) = \int_X f(x) d\mu(x)$$

dla pewnej zespolonej borelowskiej miary regularnej o wahanu ograniczonym na  $X$ .

Dowód. Patrz [9]. □

## 9 Słaba zbieżność w przestrzeniach unormowanych

### 9.1 Słaba zbieżność ciągów

Niech  $X^*$  oznacza przestrzeń sprzężoną do przestrzeni unormowanej  $X$ .

**Definicja 9.1.** Mówimy, że ciąg  $x_n \in X$  jest **słabo zbieżny** do elementu  $x \in X$ , jeśli dla dowolnego funkcyjonalu  $x^* \in X^*$  mamy  $x^*(x_n) \xrightarrow{n} x^*(x)$ .

**Uwaga 9.2.** Jeśli  $x_n \xrightarrow[n]{\text{w normie}} x$  w normie przestrzeni  $X$ , to  $x^*(x_n) \xrightarrow[n]{} x^*(x)$  dla  $x^* \in X^*$ .

**Twierdzenie 9.3.** *Każdy ciąg słabo zbieżny jest ograniczony.*

*Dowód.* Rozważmy ciąg  $x_n \in X$  słabo zbieżny do  $x$ . Elementy  $x_n$  wyznaczają funkcjonały liniowe  $\varphi_n$  na  $X^*$  wzorem

$$\varphi_n(x^*) = x^*(x_n).$$

Traktujemy  $\varphi_n$  jako operatory liniowe z przestrzeni Banacha  $X^*$  (por. Wniosek 2.15) w  $\mathbb{C}$ . Operatory  $\varphi_n$  są ograniczone punktowo, bo

$$\varphi_n(x^*) = x^*(x_n) \xrightarrow[n]{} x^*(x),$$

zatem ciąg liczb  $\varphi_n(x^*)$  jest ograniczony, jako ciąg zbieżny. Z twierdzenia Banacha-Steinhausa (bo  $\mathbb{C}$  jest przestrzenią zupełną) normy  $\|\varphi_n\|$  są wspólnie ograniczone. Ale z Wniosku 5.10 wynika, że

$$\|\varphi_n\| = \sup_{\|x^*\| \leq 1} |\varphi_n(x^*)| = \sup_{\|x^*\| \leq 1} |x^*(x_n)| = \|x_n\|.$$

□

**Przykład.** Niech  $\mathcal{H}$  będzie przestrzenią Hilberta z bazą ortonormalną  $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Ciąg  $x_n$  jest słabo zbieżny do  $x$  jeśli  $\langle x_n, y \rangle \xrightarrow[n]{} \langle x, y \rangle$  dla dowolnego  $y \in \mathcal{H}$ . Dla  $x \in \mathcal{H}$  mamy

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n, \quad \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2,$$

zatem  $\langle x, e_n \rangle \xrightarrow[n]{} 0$ . To oznacza, że ciąg  $e_n$  jest słabo zbieżny do zera.

**Fakt 9.4.** *Ciąg  $x_n$  w przestrzeni Hilberta  $\mathcal{H}$  jest słabo zbieżny do elementu  $x$  wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg liczb  $\|x_n\|$  jest ograniczony oraz  $\langle x_n, e_j \rangle \xrightarrow[n]{} \langle x, e_j \rangle$  dla  $j \in \mathbb{N}$ , gdzie  $\{e_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  jest bazą ortonormalną przestrzeni  $\mathcal{H}$ .*

*Dowód.* Implikacja ( $\Rightarrow$ ) wynika z Twierdzenia 9.3 oraz z faktu, że

$$\langle x_n, y \rangle \xrightarrow[n]{} \langle x, y \rangle$$

dla dowolnego  $y \in \mathcal{H}$ .

Dla dowodu implikacji ( $\Leftarrow$ ) niech  $c = \sup_n \|x_n\| + \|x\|$  oraz  $\mathcal{F} = \text{lin}\{e_n\}_{n=1}^\infty$ . Z założenia mamy

$$\langle x_n, y \rangle \xrightarrow{n} \langle x, y \rangle, \quad y \in \mathcal{F}.$$

$\mathcal{F}$  jest gęstą podprzestrzenią w  $\mathcal{H}$ . Niech  $y \in \mathcal{H}$  oraz  $\varepsilon > 0$ . Wtedy istnieje element  $y_0 \in \mathcal{F}$  taki, że  $\|y - y_0\| < \varepsilon/2c$ . Zatem

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle| &= |\langle x_n - x, y \rangle| \leq |\langle x_n - x, y - y_0 \rangle| + |\langle x_n - x, y_0 \rangle| \\ &\leq \|x_n - x\| \|y - y_0\| + |\langle x_n, y_0 \rangle - \langle x, y_0 \rangle| \leq \frac{\varepsilon}{2} + |\langle x_n, y_0 \rangle - \langle x, y_0 \rangle|. \end{aligned}$$

Wyberzmy teraz  $N > 0$  tak, aby dla  $n > N$  zachodziła nierówność

$$|\langle x_n, y_0 \rangle - \langle x, y_0 \rangle| < \varepsilon/2.$$

Wtedy

$$|\langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle| < \varepsilon \quad \text{dla } n > N.$$

□

**Fakt 9.5.** W przestrzeni  $C(X)$ , gdzie  $X$  jest zwartą przestrzenią Hausdorffa, ciąg funkcji  $f_n$  jest słabo zbieżny do funkcji  $f$  wtedy i tylko wtedy, gdy liczby  $\|f_n\|_\infty$  są wspólnie ograniczone oraz ciąg  $f_n$  jest zbieżny punktowo, tzn.  $f_n(x) \xrightarrow{n} f(x)$  dla  $x \in X$ .

*Dowód.*

( $\Rightarrow$ ) Z Twierdzenia 9.3 ciąg norm  $\|f_n\|_\infty$  jest ograniczony. Z założenia mamy

$$\int_X f_n(x) d\mu(x) \xrightarrow{n} \int_X f(x) d\mu(x),$$

dla dowolnej miary  $\mu \in M(X)$  (por Def. 8.7). Ustalmy  $x \in X$  i rozważmy miarę  $\mu = \delta_x$ , gdzie

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Ponieważ  $\delta_x \in M(X)$ , to

$$f_n(x) = \int_X f_n(t) d\delta_x(t) \xrightarrow{n} \int_X f(t) d\delta_x(t) = f(x).$$

( $\Leftarrow$ ) Wystarczy udowodnić, że

$$\int_X f_n(x) d\mu(x) \xrightarrow{n} \int_X f(x) d\mu(x) \quad (9.1)$$

dla miar nieujemnych  $\mu \in M(X)$ . Z założenia  $|f_n(x)| \leq c$  dla  $n \in \mathbb{N}$  oraz  $x \in X$ . Zatem z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej wynika (9.1).  $\square$

**Twierdzenie 9.6.** *Niech  $X$  będzie przestrzenią unormowaną. Jeśli przestrzeń  $X^*$  jest ośrodkowa, to  $X$  też jest ośrodkowa.*

*Dowód.* Niech  $\{x_n^*\}_{n=1}^\infty$  będzie gęstym podzbiorem w  $X^*$ . Wybierzmy elementy  $x_n \in X$  spełniające  $\|x_n\| = 1$  oraz  $|x_n^*(x_n)| \geq \frac{1}{2}\|x_n^*\|$ . Niech  $\mathcal{A}$  oznacza rodzinę wszystkich kombinacji liniowych, o zespolonych współczynnikach wymiernych, elementów ciągu  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ . Zbiór  $\mathcal{A}$  jest wtedy przeliczalny. Pokażemy, że zbiór  $\mathcal{A}$  leży gęsto w  $X$ . Rozważmy domknięcie  $\overline{\mathcal{A}}$  w  $X$ . Ten zbiór jest podprzestrzenią liniową, bo  $\overline{\mathcal{A}}$  zawiera skończone kombinacje liniowe elementów z  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ . Załóżmy, że  $\overline{\mathcal{A}} \subsetneq X$ . Wtedy z Wniosku 5.12 istnieje funkcjonal  $x^* \neq 0$  taki, że  $x^*|_{\overline{\mathcal{A}}} = 0$ . Zatem

$$\begin{aligned} \|x_n^* - x^*\| &\geq |(x_n^* - x^*)(x_n)| = |x_n^*(x_n) - \underbrace{x^*(x_n)}_0| \\ &= |x_n^*(x_n)| \geq \frac{1}{2}\|x_n^*\| \geq \frac{1}{2}(\|x^*\| - \|x_n^* - x^*\|). \end{aligned}$$

Po przekształceniu otrzymujemy

$$\|x_n^* - x^*\| \geq \frac{1}{3}\|x^*\| > 0$$

co jest sprzeczne z założeniem o gęstości ciągu  $\{x_n^*\}_{n=1}^\infty$ .  $\square$

**Uwaga 9.7.** Przestrzeń sprzężona do przestrzeni ośrodkowej nie musi być ośrodkowa. Np. niech  $X = \ell^1$ . Wtedy podzbiór

$$\mathcal{A} = \left\{ \{x_n\}_{n=1}^\infty : \sum_{n=1}^\infty |x_n| < \infty, x_n \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q} \right\}$$

jest przeliczalny i gęsty w  $X$ . Przestrzeń sprzężona  $X^* = \ell^\infty$  (patrz Rozdział 4) nie jest ośrodkowa. Istotnie dla podzbiorów  $B_1 \neq B_2 \subset \mathbb{N}$  mamy

$$\|\mathbb{I}_{B_1} - \mathbb{I}_{B_2}\|_\infty = 1.$$

W ten sposób otrzymujemy kontinuum elementów w  $\ell^\infty$  takich, że odległość pomiędzy każdymi dwoma elementami wynosi 1. Zatem  $\ell^\infty$  nie jest ośrodkowa. Przypomnijmy, że z rozdziału 4 wynika, że

$$c_0^* = \ell^1, \quad (\ell^1)^* = \ell^\infty.$$

**Definicja 9.8.** Rozważmy  $x_n^* \in X^*$  dla przestrzeni unormowanej  $X$ . Mówimy, że ciąg funkcyjałów  $x_n^*$  jest **\*-słabo zbieżny** do funkcyjału  $x^* \in X^*$ , jeśli  $x_n^*(x) \xrightarrow{n} x^*(x)$ , dla każdego elementu  $x \in X$ .

**Uwaga 9.9.** Bezpośrednio z twierdzenia Banacha-Steinhaus'a wynika, że każdy \*-słabo zbieżny ciąg funkcyjałów liniowych na przestrzeni Banacha jest ograniczony.

**Przykład.** Rozważmy przestrzeń  $C[0, 1]$  i funkcyjały związane miarami

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{\frac{k}{n}}.$$

Wtedy

$$\int_0^1 f(x) d\mu_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n} \int_0^1 f(x) dx.$$

To oznacza, że ciąg miar  $\mu_n$  jest \*-słabo zbieżny do miary Lebesgue'a na  $[0, 1]$ .

**Uwaga 9.10.** Przestrzeń unormowaną  $X$  można utożsamić z podprzestrzenią  $X^{**} = (X^*)^*$ . Istotnie, dla  $x \in X$  określamy funkcyjał  $\varphi_x$  na  $X^*$  wzorem

$$\varphi_x(x^*) = x^*(x).$$

Funkcyjał  $\varphi_x$  jest liniowy. Ponadto

$$\|\varphi_x\|_{X^{**}} = \sup_{\|x^*\|_{X^*} \leq 1} |\varphi_x(x^*)| = \sup_{\|x^*\|_{X^*} \leq 1} |x^*(x)| = \|x\|_X.$$

Zatem przestrzeń  $X$  można włożyć izometrycznie w  $X^{**}$ .

**Definicja 9.11.** Mówimy, że przestrzeń unormowana  $X$  jest **refleksywna** jeśli  $X^{**} = X$ .

**Przykład.** Rozważmy przestrzeń  $L^p(X, \mu)$  dla  $1 < p < \infty$ . Wtedy

$$(L^p)^* = L^q, \quad \text{gdzie } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad 1 < q < \infty.$$

zatem  $(L^q)^* = L^p$ , czyli  $L^p$  jest refleksywna.

Niech  $(X, \mu)$  będzie  $\sigma$ -skończona, ale przestrzeń  $L^1(X, \mu)$  ma nieskończony wymiar. Przestrzeń  $L^1(X, \mu)$  jest wtedy óśrodkowa. Mamy  $(L^1)^* = L^\infty$ . Ale przestrzeń  $L^\infty$  nie jest óśrodkowa, zatem z Twierdzenia 9.6 przestrzeń  $(L^\infty)^*$  również nie jest óśrodkowa. W związku z tym  $(L^\infty)^* \neq L^1$ , czyli  $L^1$  nie jest przestrzenią refleksywną.

**Twierdzenie 9.12** (Banach-Alaoglu). *Niech  $X$  będzie óśrodkową przestrzenią unormowaną. Z każdego ograniczonego ciągu  $x_n^*$  funkcyjnałów liniowych na  $X$  można wybrać podciąg  $*$ -słabo zbieżny.*

*Dowód.* Oznaczmy  $c = \sup_n \|x_n^*\|_{X^*}$ . Niech  $\{y_j\}_{j=1}^\infty$  będzie gęstym podzbiorem w  $X$ . Każdy z ciągów liczbowych  $\{x_n^*(y_j)\}_{n=1}^\infty$  jest ograniczony. Stosując metodę przekątniową można wybrać rosnący ciąg liczb naturalnych  $n_k$  taki, że każdy z ciągów  $\{x_{n_k}^*(y_j)\}_{k=1}^\infty$  jest zbieżny. Pokażemy, że podciąg  $x_{n_k}^*$  jest  $*$ -słabo zbieżny. W tym celu sprawdzimy, że dla dowolnego elementu  $x \in X$  ciąg liczb  $x_{n_k}^*(x)$  spełnia warunek Cauchy'ego. Ustalmy liczbę  $\varepsilon > 0$ . Z gęstości istnieje element  $y_j$  taki, że

$$\|x - y_j\| < \frac{\varepsilon}{4c}.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} |x_{n_k}^*(x) - x_{n_l}^*(x)| &\leq |x_{n_k}^*(x - y_j)| + |x_{n_k}^*(y_j) - x_{n_l}^*(y_j)| + |x_{n_l}^*(y_j - x)| \\ &\leq c \cdot \frac{\varepsilon}{4c} + |x_{n_k}^*(y_j) - x_{n_l}^*(y_j)| + c \cdot \frac{\varepsilon}{4c} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

dla dużych  $k$  i  $l$ . Zatem ciąg  $x_{n_k}^*(x)$  jest zbieżny. Określmy

$$\varphi(x) = \lim_k x_{n_k}^*(x).$$

Wtedy  $\varphi$  jest funkcyjnałem liniowym na  $X$ . Ponadto

$$|\varphi(x)| = \left| \lim_k x_{n_k}^*(x) \right| \leq c \|x\|.$$

Zatem  $\varphi \in X^*$ . □

**Uwaga 9.13.** Założenie óśrodkowości jest istotne. Rozważmy ciąg funkcyjnałów  $\{\delta_n\}_{n=1}^\infty$  na  $\ell^\infty$  określonych wzorem  $\delta_n(x) = x_n$  dla  $x \in \ell^\infty$ . Mamy  $\|\delta_n\|_{(\ell^\infty)^*} = 1$ . Jednak ciąg  $\{\delta_n\}_{n=1}^\infty$  nie zawiera podciągu  $*$ -słabo zbieżnego.



## 9.2 Słabe topologie

**Definicja 9.14.** *Słabą topologią w przestrzeni unormowanej  $X$  nazywamy najszlakszą topologię, w której wszystkie funkcjonały  $x^* \in X^*$  są ciągle względem metryki określonej przez normę przestrzeni  $X$ .*

**Uwaga 9.15.** Najszlaksza topologia to taka, która ma najmniej zbiorów otwartych.

Dla ustalonego funkcjonału  $x_0^* \in X^*$  oraz  $a \in \mathbb{C}$ ,  $\varepsilon > 0$  zbiór

$$V_{x_0^*; a, \varepsilon} = \{y \in X : |x_0^*(y) - a| < \varepsilon\}$$

jest otwarty w słabej topologii jako przeciwobraz otwartego koła  $\{z \in \mathbb{C} : |z - a| < \varepsilon\}$  przez funkcjonał  $x_0^*$ .

Dla elementu  $x \in X$  **bazą otoczeń** w słabej topologii jest rodzina zbiorów postaci:

$$U_{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*; \varepsilon}(x) = \{y \in X : \max_{1 \leq j \leq n} |x_j^*(y) - x_j^*(x)| < \varepsilon\}$$

gdzie  $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$  są ustalonymi funkcjonałami w  $X^*$  a liczba  $\varepsilon$  jest dodatnia. Zbiór ten jest otwarty, bo przyjmując oznaczenie  $a_j = x_j^*(x)$  mamy

$$U_{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*; \varepsilon}(x) = V_{x_1^*; a_1, \varepsilon} \cap V_{x_2^*; a_2, \varepsilon} \cap \dots \cap V_{x_n^*; a_n, \varepsilon}. \quad (9.2)$$

To oznacza, że element  $y$  leży „blisko” elementu  $x$  w słabej topologii, gdy mierzymy odległość za pomocą skończonej liczby funkcjonałów liniowych  $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ . Słaba topologia jest w szczególności szlaksza niż topologia w przestrzeni  $X$  wyznaczona przez metrykę.

**Twierdzenie 9.16.** *Kula  $B = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$  jest zbiorem domkniętym w słabej topologii.*

*Dowód.* Niech  $x \notin B$ , tzn.  $\|x\| > 1$ . Z Twierdzenia 5.23(c) istnieją rzeczywisty ograniczony funkcjonał liniowy  $\varphi$  oraz liczba rzeczywista  $\alpha$  takie, że

$$\varphi(x) < \alpha < \varphi(y), \quad y \in B.$$

Niech  $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) - i\varphi(ix)$ . Wtedy  $\tilde{\varphi}$  jest ograniczonym funkcjonałem liniowym względem  $\mathbb{C}$ . Rzeczywiście,  $\tilde{\varphi}$  jest liniowy względem  $\mathbb{R}$  oraz

$$\tilde{\varphi}(ix) = \varphi(ix) + i\varphi(x) = i\tilde{\varphi}(x).$$

Zatem  $\tilde{\varphi} \in X^*$ . Ponadto

$$\operatorname{Re} \tilde{\varphi}(x) < \alpha < \operatorname{Re} \tilde{\varphi}(y), \quad y \in B.$$

Niech

$$U = \{y \in X : \operatorname{Re} \tilde{\varphi}(y) < \alpha\}.$$

Wtedy  $U$  jest otwarty w słabej topologii, bo jeśli  $\tilde{\varphi}$  jest ciągły, to  $\operatorname{Re} \tilde{\varphi}$  też. Ponadto  $x \in U$  oraz  $U \cap B = \emptyset$ . Tzn.  $x$  leży poza zbiorem  $B$  wraz z pewnym otoczeniem, czyli  $B$  jest zbiorem domkniętym.  $\square$

**Uwaga 9.17.** Kula otwarta  $\{x \in X : \|x\| < 1\}$  nie jest zbiorem otwartym w słabej topologii, o ile przestrzeń  $X$  ma nieskończony wymiar. Istotnie pokażemy, że zbiór postaci (9.2) jest nieograniczony, tzn. zawiera elementy o dowolnie dużej normie. Rozważmy jeden taki zbiór. Istnieje element  $x \neq 0$  w  $X$  taki, że

$$x_1^*(x) = x_2^*(x) = \dots = x_n^*(x) = 0.$$

Wtedy  $\mathbb{R}x \subset U_{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, \varepsilon}(0)$ , ale  $\mathbb{R}x \not\subset B$ .

**Uwaga 9.18.** Niech  $\dim X = \infty$  oraz  $S = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ . Wtedy domknięcie  $S$  w słabej topologii jest równe  $B = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ . Rzeczywiście zbiór dla  $x \in X$  zbiór  $x + U_{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, \varepsilon}(0)$  jest otwartym otoczeniem punktu  $x$  i zawiera prostą przechodzącą przez  $x$ . Gdy  $\|x\| < 1$  ta prosta przecina  $S$ .

**Definicja 9.19.** *\*-słabą topologią na  $X^*$  nazywamy najszlakszą topologię, w której funkcjonały  $X^* \ni x^* \mapsto x^*(x) \in \mathbb{C}$  są ciągle dla każdego  $x \in X$ .*

**Uwaga 9.20.** \*-słaba topologia pokrywa się ze słabą topologią na  $X^*$  jeśli przestrzeń  $X$  jest refleksywna.

Dla  $x_0 \in X$  oraz liczb  $a \in \mathbb{C}$  i  $\varepsilon > 0$  zbiór

$$V_{x_0; a, \varepsilon} = \{y^* \in X^* : |y^*(x_0) - a| < \varepsilon\}$$

jest otwarty w \*-słabej topologii. Bazą otoczeń funkcyjonału  $x^*$  jest rodzina zbiorów

$$U_{x_1, x_2, \dots, x_n; \varepsilon}(x^*) = \{y^* \in Y^* : \max_{1 \leq j \leq n} |y^*(x_j) - x^*(x)| < \varepsilon\},$$

gdzie  $x_1, x_2, \dots, x_n$  są ustalonymi elementami w  $X$  a liczba  $\varepsilon$  jest dodatnia. Funkcjonał  $y^*$  leży „blisko” funkcyjonału  $x^*$  jeśli wartości funkcyjonałów w punktach  $x_1, x_2, \dots, x_n$  są bliskie sobie.

**Twierdzenie 9.21.** *Kula  $B^* = \{x^* \in X^* : \|x^*\| \leq 1\}$  jest domknięta w  $*$ -słabej topologii.*

**Uwaga 9.22.**  $*$ -słaba topologia na  $X^*$  jest słabsza niż słaba topologia na  $X^*$ , bo  $X \subset X^{**}$ .

*Dowód.* Niech  $x^* \notin B^*$ . Tzn.  $\|x^*\| > 1$ . Zatem istnieje element  $x \in X$  taki, że  $\|x\| = 1$  oraz  $|x^*(x)| > 1$ . Niech

$$U = \{y^* \in X^* : |y^*(x)| > 1\}.$$

Zbiór  $U$  jest otwarty w  $*$ -słabej topologii oraz  $x^* \in U$ . Ponadto dla  $y^* \in B^*$  mamy

$$|y^*(x)| \leq \|y^*\| \|x\| \leq 1.$$

Zatem  $U \cap B^* = \emptyset$ . □

**Twierdzenie 9.23** (Banach-Alaoglu). *Kula  $B^* = \{x^* \in X^* : \|x^*\| \leq 1\}$  jest zwarta w  $*$ -słabej topologii.*

*Dowód.* Niech

$$V = \prod_{x \in X} \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|x\|\}$$

będzie iloczynem kartezjańskim kół domkniętych w płaszczyźnie zespolonej z topologią produktową. Z Twierdzenia Tichonowa  $V$  jest zwartą przestrzenią topologiczną jako iloczyn kartezjański zbiorów zwartych. Rozważmy odwzorowanie  $\varphi : B^* \rightarrow V$  zadane wzorem

$$\varphi(x^*) = \{x^*(x)\}_{x \in X} \in V.$$

Warunek  $\varphi(x^*) \in V$  jest spełniony, bo

$$|x^*(x)| \leq \|x^*\| \|x\| \leq \|x\|.$$

Odwzorowanie  $\varphi$  jest ciągłe, gdy w  $B^*$  mamy  $*$ -słabą topologię, co wynika bezpośrednio z określenia tej topologii. Sprawdźmy, że obraz  $\varphi(B^*)$  jest domkniętym podzbiorem w  $V$ . W tym celu rozważmy ciąg uogólniony  $\varphi(x_\alpha^*)$  w  $\varphi(B^*)$ . Załóżmy, że ciąg uogólniony  $\varphi(x_\alpha^*)$  jest zbieżny w  $V$ . Ale

$$\varphi(x_\alpha^*) = \left( x_\alpha^*(x) \right)_{x \in X}.$$

To oznacza, że dla każdego elementu  $x \in X$  ciąg uogólniony liczb  $x_\alpha^*(x)$  jest zbieżny. Oznaczmy

$$\eta(x) = \lim_\alpha x_\alpha^*(x).$$

W ten sposób otrzymaliśmy funkcjonał  $\eta$  określony na  $X$ . Pokażemy, że  $\eta \in B^*$ . Sprawdźmy liniowość funkcjonału  $\eta$ . Dla  $x, y \in X$  oraz  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$  mamy

$$\begin{aligned} \eta(\lambda x + \mu y) &= \lim_\alpha x_\alpha^*(\lambda x + \mu y) = \lim_\alpha [\lambda x_\alpha^*(x) + \mu x_\alpha^*(y)] \\ &= \lambda \lim_\alpha x_\alpha^*(x) + \mu \lim_\alpha x_\alpha^*(y) = \lambda \eta(x) + \mu \eta(y). \end{aligned}$$

Wiemy, że  $|\eta(x)| \leq \|x\|$ , bo  $\|x_\alpha^*(x)\| \leq \|x\|$ . Zatem  $\|\eta\| \leq 1$ . Czyli  $\eta \in B^*$  co kończy dowód domkniętości zbioru  $\varphi(B^*)$ .

Zauważmy, że odwzorowanie  $\varphi$  jest różnowartościowe. Rzeczywiście, jeśli  $\varphi(x^*) = \varphi(y^*)$  to  $x^*(x) = y^*(x)$  dla wszystkich  $x \in X$ . Wtedy  $x^* = y^*$ . Z określenia \*-słabej topologii wynika zatem, że  $\varphi$  jest homeomorfizmem z  $B^*$  na  $\varphi(B^*)$ . Ale  $\varphi(B^*)$  jest zbiorem zwartym jako domknięty podzbiór zwartej przestrzeni topologicznej  $V$ . Zatem również  $B^*$  jest zwarty w \*-słabej topologii.  $\square$

**Przykład.** Rozważmy  $X = \ell^\infty$  i funkcjonały  $\delta_n \in X^*$  określone wzorem

$$\delta_n(x) = x_n, \quad x \in \ell^\infty.$$

Mamy  $\|\delta_n\|_{X^*} = 1$ , czyli  $\delta_n \in B^*$ . Wiemy, że  $B^*$  jest zbiorem zwartym w \*-słabej topologii. Ze zwartości ciąg  $\delta_n$  ma punkt skupienia w  $X^*$ . Jednakże  $\delta_n$  nie posiada podciągu zbieżnego \*-słabo. Istotnie, załóżmy nie wprost, że  $\delta_n$  ma podciąg \*-słabo zbieżny  $\delta_{n_k}$  dla  $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ . Określmy

$$x_n = \begin{cases} (-1)^k, & n = n_k \\ 0, & n \neq n_k \end{cases}.$$

Wtedy  $x \in \ell^\infty$ , ale  $\delta_{n_k}(x) = x_{n_k} = (-1)^k$  nie jest zbieżny. Tzn. ciąg  $\delta_{n_k}$  nie jest \*-słabo zbieżny.

## 10 Twierdzenie Arzeli-Ascoliego

Niech  $K$  będzie zwartą przestrzenią topologiczną Hausdorffa. Rozważamy przestrzeń  $C_{\mathbb{R}}(K)$  z normą

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in K} |f(x)|.$$

Przypomnimy znane twierdzenie z topologii.

**Twierdzenie 10.1.** *Podzbiór  $A$  w przestrzeni metrycznej  $(X, d)$  jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy z każdego ciągu elementów z  $A$  można wybrać podciąg zbieżny do pewnego elementu z  $A$ .*

**Definicja 10.2.** *Podzbiór  $A$  przestrzeni metrycznej nazywamy **warunkowo zwartym** jeśli domknięcie  $\bar{A}$  jest zbiorem zwartym.*

Symbolem  $B(x, \varepsilon)$  będziemy oznaczać otwartą kulę o środku w  $x$  i promieniu  $\varepsilon$  czyli

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}.$$

**Twierdzenie 10.3.** *Podzbiór  $A$  w przestrzeni metrycznej zupełnej  $(X, d)$  jest warunkowo zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest **całkowicie ograniczony**, tzn. dla dowolnej liczby  $\varepsilon > 0$  istnieją punkty  $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$  takie, że*

$$A \subset B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon) \cup \dots \cup B(x_n, \varepsilon).$$

**Uwaga 10.4.** Zbiór jest całkowicie ograniczony, jeśli można go pokryć skończoną liczbą kul o dowolnie małym promieniu.

*Dowód.*

( $\implies$ ) Ustalmy  $\varepsilon > 0$ . Wtedy

$$\bar{A} \subset \bigcup_{x \in X} B(x, \varepsilon).$$

Ze zwartości zbioru  $\bar{A}$  istnieje skończone podpokrycie

$$A \subset \bar{A} \subset B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon) \cup \dots \cup B(x_n, \varepsilon).$$

( $\impliedby$ ) Skorzystamy z Twierdzenia 10.1. Niech  $y_n$  będzie ciągiem elementów z  $A$ . Pokażemy, że  $y_n$  zawiera podciąg zbieżny. Dla  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  mamy z założenia

$$\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A \subset B(x_1, \frac{1}{2}) \cup B(x_2, \frac{1}{2}) \cup \dots \cup B(x_m, \frac{1}{2}).$$

Przynajmniej jedna z kul, np.  $B(x_j, \frac{1}{2})$  zawiera nieskończony podciąg  $\{y_n^{(1)}\}$  ciągu  $\{y_n\}$ . Dalej dla  $\varepsilon = 2^{-2}$  wiemy, że podciąg  $\{y_n^{(1)}\} \subset A$  jest zawarty w skończonej liczbie kul o promieniu  $2^{-2}$ . Zatem jedna z takich kul zawiera nieskończony podciąg  $\{y_n^{(2)}\}$  ciągu  $\{y_n^{(1)}\}$ . Postępując tak dalej otrzymamy

rodzinę podciągów  $\{y_n^{(m)}\}$  takich, że  $\{y_n^{(m+1)}\}$  jest podciągiem ciągu  $\{y_n^{(m)}\}$  oraz  $\{y_n^{(m)}\}$  jest zawarty w kuli o promieniu  $2^{-m}$ .

Stosując metodę przekątniową określimy ciąg  $z_n = y_n^{(n)}$ . Wtedy ciąg  $\{z_n\}$  jest podciągiem ciągu  $\{y_n\}$ . Sprawdźmy, że  $z_n$  spełnia warunek Cauchy'ego. Dla  $n > m$  elementy  $z_n$  i  $z_m$  leżą w kuli o promieniu  $2^{-m}$ , zatem

$$d(z_n, z_m) \leq \frac{2}{2^m}.$$

Z założenia zupełności ciąg  $z_n$  jest zbieżny. □

### Przykłady.

1. Rozważmy przestrzeń  $X = C_{\mathbb{R}}[0, 2\pi]$  oraz ciąg funkcji

$$f_n(x) = \sin nx.$$

Ponieważ

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\sin nx - \sin mx)^2 dx = 2$$

to

$$\|f_n - f_m\|_{\infty} \geq 1.$$

Zatem  $f_n$  nie posiada podciągu zbieżnego jednostajnie. Można udowodnić, że nawet nie istnieje podciąg zbieżny punktowo.

2. Niech  $X = C_{\mathbb{R}}[0, 1]$ . oraz

$$f_n(x) = \frac{x}{x + (1 - nx)^2}.$$

Wtedy  $f_n(x) \xrightarrow{n} 0$  dla  $0 \leq x \leq 1$ . Jednak  $f_n$  nie posiada podciągu zbieżnego jednostajnie, bo taki podciąg musiałby być zbieżny do 0, a przecież dla  $x = \frac{1}{n}$  mamy  $f_n(\frac{1}{n}) = 1$ .

**Definicja 10.5.** Rodzinę funkcji  $\mathcal{A} \subset C_{\mathbb{R}}(K)$  nazywamy **jednakowo ciągłą**, jeśli dla każdego punktu  $x \in K$  i liczby  $\varepsilon > 0$  istnieje otwarte otoczenie  $U$  punktu  $x$  takie, że

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon, \quad y \in U, \quad f \in \mathcal{A}.$$

**Uwaga 10.6.** Zbiór  $U$ , zależny od  $x$  oraz  $\varepsilon$ , jest wybrany dla wszystkich funkcji  $f \in \mathcal{A}$ . Na tym polega jednakowa ciągłość.

**Definicja 10.7.** Rodzina  $\mathcal{A} \subset C_{\mathbb{R}}(K)$  jest **ograniczona** jeśli istnieje stała liczba  $M$  taka, że

$$\|f\|_{\infty} \leq M, \quad f \in \mathcal{A}.$$

**Twierdzenie 10.8** (Arzelà-Ascoli). Rodzina funkcji  $\mathcal{A} \subset C_{\mathbb{R}}(K)$  jest warunkowo zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy  $\mathcal{A}$  jest jednakowo ciągła i ograniczona.

*Dowód.*

( $\Rightarrow$ ) Ustalmy liczbę  $\varepsilon > 0$ . Z Twierdzenia 10.3 istnieją funkcje  $f_1, f_2, \dots, f_n \in C_{\mathbb{R}}(K)$  takie, że

$$\mathcal{A} \subset B\left(f_1, \frac{\varepsilon}{3}\right) \cup B\left(f_2, \frac{\varepsilon}{3}\right) \cup \dots \cup B\left(f_n, \frac{\varepsilon}{3}\right). \quad (10.1)$$

W szczególności zbiór  $\mathcal{A}$  jest ograniczony przez

$$M = \max_{1 \leq j \leq n} \|f_j\|_{\infty} + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ustalmy  $x \in K$ . Istnieją otwarte otoczenia  $U_1, U_2, \dots, U_n$  takie, że

$$|f_j(y) - f_j(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad y \in U_j, j = 1, 2, \dots, n.$$

Niech  $U = U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n$ . Wtedy  $U$  jest otwartym otoczeniem punktu  $x$  oraz

$$|f_j(y) - f_j(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad y \in U, j = 1, 2, \dots, n.$$

Niech  $f \in \mathcal{A}$ . Wtedy z (10.1) mamy  $f \in B(f_j, \frac{\varepsilon}{3})$  dla pewnego  $j = 1, 2, \dots, n$ . Zatem dla  $y \in U$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} & |f(y) - f(x)| \\ & \leq |f(y) - f_j(y)| + |f_j(y) - f_j(x)| + |f_j(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

( $\Leftarrow$ ) Pokażemy, że rodzinę  $\mathcal{A}$  można pokryć skończoną liczbą kul o promieniu  $\varepsilon > 0$ . Rodzina  $\mathcal{A}$  jest ograniczona przez pewną stałą  $M$ , tzn.

$$|f(x)| \leq M, \quad f \in \mathcal{A}, \quad x \in K.$$

Rodzina  $\mathcal{A}$  jest jednakowo ciągła, więc dla każdego elementu  $x \in K$  istnieje otoczenie  $U_x \ni x$  takie, że mamy

$$|f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad f \in \mathcal{A}, \quad y \in U_x. \quad (10.2)$$

Ponieważ

$$K = \bigcup_{x \in K} U_x,$$

to ze zwartości zbioru  $K$  otrzymujemy

$$K \subset U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \dots \cup U_{x_n} \quad (10.3)$$

dla pewnych punktów  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Podzielmy przedział wartości  $[-M, M]$  na równe części punktami  $-M = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_m = M$  tak, że

$$y_j - y_{j-1} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Wykres każdej z funkcji  $f \in \mathcal{A}$  leży w iloczynie kartezjańskim  $K \times [-M, M]$ . Rozważmy ciąg  $n$  wskaźników  $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ , z których każdy pochodzi z  $\{1, 2, \dots, m\}$ . Dla takiego ciągu określamy podzbiór w  $C_{\mathbb{R}}(K)$  wzorem

$$B_{j_1, j_2, \dots, j_n} = \{f \in C_{\mathbb{R}}(K) : f(x_1) \in [y_{j_1-1}, y_{j_1}], \\ f(x_2) \in [y_{j_2-1}, y_{j_2}], \dots, f(x_n) \in [y_{j_n-1}, y_{j_n}]\}.$$

Każda funkcja z  $\mathcal{A}$  należy do pewnego zbioru postaci  $B_{j_1, j_2, \dots, j_n}$ , czyli

$$\mathcal{A} = \bigcup_{j_1, j_2, \dots, j_n=1}^m B_{j_1, j_2, \dots, j_n} \cap \mathcal{A}.$$

Zbadamy średnicę zbioru  $B_{j_1, j_2, \dots, j_n} \cap \mathcal{A}$ . Niech  $f, g \in B_{j_1, j_2, \dots, j_n} \cap \mathcal{A}$  oraz  $x \in K$ . Wtedy z (10.3) wynika, że  $x \in U_{x_k}$  dla pewnego  $k = 1, 2, \dots, n$ . Dalej z (10.2) i z określenia zbiorów  $B_{j_1, j_2, \dots, j_n}$  wnioskujemy, że

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - f(x_k)| + |f(x_k) - g(x_k)| + |g(x_k) - g(x)| \\ < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Zatem średnica zbioru  $B_{j_1, j_2, \dots, j_n} \cap \mathcal{A}$  jest nie większa niż  $\varepsilon$  co oznacza, że ten zbiór jest zawarty w pewnej kuli o promieniu  $\varepsilon$ .  $\square$



**Przykład.** Niech

$$\mathcal{A} = \{f \in C_{\mathbb{R}}[0, 1] : f \text{ różniczkowalna w } (0, 1), f(0) = 0, |f'(x)| \leq 1\}.$$

Wtedy zbiór  $\mathcal{A}$  jest warunkowo zwarty, bo z

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(\xi)| |x_1 - x_2| \leq |x_1 - x_2|$$

wynika jednakowa ciągłość funkcji z  $\mathcal{A}$ . Ponadto

$$|f(x)| = |f(x) - f(0)| \leq x \leq 1,$$

czyli rodzina  $\mathcal{A}$  jest ograniczona przez 1.

**Uwaga 10.9.** Twierdzenie Arzeli-Ascoliego pozostaje prawdziwe również dla  $\mathcal{A} \subset C(K)$ , czyli funkcji o wartościach zespolonych.

## 11 Odwzorowania zwężające i zastosowania

**Twierdzenie 11.1.** Niech  $(X, d)$  będzie przestrzenią metryczną zupełną a  $T : X \rightarrow X$  będzie odwzorowaniem **zwężającym**, tzn. istnieje stała  $0 < \theta < 1$ , taka, że

$$d(Tx, Ty) \leq \theta d(x, y), \quad x, y \in X.$$

Wtedy odwzorowanie  $T$  posiada jedyny punkt stały, tzn. punkt  $y \in X$  taki, że  $Ty = y$ .

**Uwaga 11.2.** Odwzorowanie zwężające jest ciągłe.

*Dowód.* Dla ustalonego punktu  $x \in X$  rozważmy ciąg iteracji  $x_n = T^n x$ . Mamy

$$d(x_k, x_{k+1}) = d(Tx_{k-1}, Tx_k) \leq \theta d(x_{k-1}, x_k).$$

Zatem

$$d(x_k, x_{k+1}) \leq \theta^k d(x_0, x_1).$$

Niech  $n > m$ . Wtedy

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \dots + d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq (\theta^m + \theta^{m+1} + \dots + \theta^{n-1})d(x_0, x_1) \leq \frac{\theta^m}{1 - \theta} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Zatem ciąg  $x_n$  spełnia warunek Cauchy'ego, więc jest zbieżny z założenia o zupełności przestrzeni  $X$ . Niech  $x_n \xrightarrow{n} y$ . Wtedy  $Tx_n \xrightarrow{n} Ty$ . Z drugiej strony  $Tx_n = x_{n+1} \xrightarrow{n} y$ . Stad  $Ty = y$ , czyli  $y$  jest punktem stałym odwzorowania  $T$ . Załóżmy, że również punkt  $y'$  jest stały, tzn.  $Ty' = y'$ . Wtedy

$$d(y, y') = d(Ty, Ty') \leq \theta d(y, y').$$

Zatem  $d(y, y') = 0$ , czyli  $y = y'$ . □

### 11.1 Twierdzenie o funkcji odwrotnej

Niech  $\varphi : U \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^n$ , gdzie  $U$  jest otwartym podzbiorem w  $\mathbb{R}^n$ . Załóżmy, że  $x_0 \in U$  oraz  $\det D\varphi(x_0) \neq 0$ . Pokażemy, że istnieje odwzorowanie odwrotne określone w otoczeniu punktu  $y_0 = \varphi(x_0)$ .

Poprzez zastosowanie przekształceń liniowych i przesunięć możemy założyć, że  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = \varphi(0) = 0$  oraz  $D\varphi(0) = I$ . Możemy też założyć, że  $U$  jest kulą otwartą o środku w 0.

Zapiszmy  $\varphi$  w postaci

$$\varphi(x) = x + f(x) = y. \tag{11.1}$$

Wtedy funkcja  $f$  jest klasy  $C^1$  oraz  $f(0) = 0$  i  $Df(0) = 0$ . Rozwiązania równania (11.1), czyli odwzorowania odwrotnego, będziemy szukać w postaci

$$x = y + g(y).$$

Z układu równań

$$x + f(x) = y \tag{11.2}$$

$$y + g(y) = x \tag{11.3}$$

usuwamy  $x$  i otrzymujemy

$$y + g(y) + f(y + g(y)) = y.$$

Zatem

$$g(y) = -f(y + g(y)).$$

Chcemy znaleźć funkcję  $g$  spełniającą powyższy wzór. Jeśli znajdziemy taką funkcję, to funkcja

$$\psi(y) = y + g(y)$$

będzie spełniać

$$\varphi(\psi(y)) = \psi(y) + f(\psi(y)) = \psi(y) + f(y + g(y)) = \psi(y) - g(y) = y.$$

W tym celu rozważmy przekształcenie

$$(Tg)(y) = -f(y + g(y)).$$

Zamierzamy znaleźć punkt stały przekształcenia  $T$ . Wiemy, że  $Df(0) = 0$ . Funkcja  $f$  jest klasy  $C^1$ , zatem istnieje liczba  $\delta > 0$  taka, że

$$\|Df(x)\| \leq \frac{1}{2}, \quad \|x\|_2 \leq 2\delta, \quad (11.4)$$

gdzie po lewej stronie występuje norma macierzy jako odwzorowania  $\mathbb{R}^n$  w  $\mathbb{R}^n$  z normą euklidesową w  $\mathbb{R}^n$ . Oznaczmy

$$B_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq \delta\}$$

oraz

$$X = \{g : B_\delta \rightarrow B_\delta : g \text{ jest ciągła}\}.$$

Określamy metrykę w  $X$  wzorem

$$d(g_1, g_2) = \sup_{x \in B_\delta} \|g_1(x) - g_2(x)\|_2.$$

Wtedy  $(X, d)$  jest przestrzenią metryczną zupełną, bo zbiór  $B_\delta$  jest zwarty a funkcje  $g \in X$  są ograniczone.

Pokażemy, że  $T$  odwzorowuje  $X$  w siebie i jest zwężające. Dla  $g \in X$  funkcja  $Tg$  jest ciągła. Ponadto dla  $\|y\|_2 \leq \delta$  mamy

$$\|Tg(y)\|_2 = \|f(y + g(y))\|_2, \quad \|y + g(y)\|_2 \leq 2\delta.$$

Dalej dla  $\|x\|_2 \leq 2\delta$  obliczamy

$$f(x) - f(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx) dt = \int_0^1 Df(tx) \cdot x dt.$$

Zatem

$$\|f(x)\|_2 \leq \int_0^1 \|Df(tx) \cdot x\|_2 dt \leq \int_0^1 \|Df(tx)\| \|x\|_2 dt \leq \frac{1}{2} \|x\|_2 \leq \delta.$$

Podstawiając  $x = y + g(y)$  otrzymamy  $\|Tg(y)\|_2 \leq \delta$  dla  $\|y\| \leq \delta$ , czyli  $Tg \in X$ . Sprawdzamy warunek zwężania. Mamy

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 Df(a + t(b-a)) \cdot (b-a) dt.$$

Zatem

$$\|f(b) - f(a)\|_2 \leq \int_0^1 \|Df(a + t(b-a))\| dt \|b-a\|_2.$$

Podstawiamy  $a = y + g_1(y)$  oraz  $b = y + g_2(y)$  dla  $g_1, g_2 \in X$  oraz  $y \in B_\delta$ . Wtedy  $a, b \in B_{2\delta}$  zatem  $a + t(b-a) \in B_{2\delta}$ . Korzystając z (11.4) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \|Tg_1(y) - Tg_2(y)\|_2 &= \|f(y + g_1(y)) - f(y + g_2(y))\|_2 \\ &\leq \int_0^1 \|Df(a + t(b-a))\| dt \|g_2(y) - g_1(y)\|_2 \leq \frac{1}{2} \|g_2(y) - g_1(y)\|_2. \end{aligned}$$

To oznacza, że

$$d(Tg_1, Tg_2) \leq \frac{1}{2} d(g_1, g_2).$$

Z Twierdzenia 11.1 wynika, że odwzorowanie  $T$  posiada punkt stały  $g \in B_\delta$ . Ale wtedy na podstawie wzorów (11.2) i (11.3) funkcja  $\psi(y) = y + g(y)$  jest odwzorowaniem odwrotnym do  $\varphi$ .

## 12 Twierdzenie Kreina-Millmana

Liniową przestrzeń topologiczną  $V$  nazywamy **lokalnie wypukłą** jeśli istnieje baza otoczeń zera złożona ze zbiorów wypukłych. Zauważmy, że przestrzeń unormowana  $X$  ze słabą topologią jest przestrzenią lokalnie wypukłą, bo

$$U_{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*; \varepsilon}(0) = \{y \in X : \max_{1 \leq j \leq n} |x_j^*(y)| < \varepsilon\}$$

są wypukłymi podzbiorem w  $X$ . Podobnie przestrzeń  $X^*$  z  $*$ -słabą topologią jest lokalnie wypukłą, bo

$$U_{x_1, x_2, \dots, x_n; \varepsilon}(0) = \{y^* \in Y^* : \max_{1 \leq j \leq n} |y^*(x_j)| < \varepsilon\}$$

są wypukłymi podzbioremami w  $X^*$ .

Niech  $K$  będzie wypukłym podzbiorem przestrzeni liniowej  $X$ . Punkt  $x$  z  $K$  nazywamy **ekstremalnym** jeśli  $x$  nie leży wewnątrz żadnego odcinka zawartego w  $K$ . Tzn. z warunku  $x = \alpha y_1 + (1 - \lambda)y_2$  dla  $0 < \lambda < 1$  wynika, że  $y_1 \notin K$  lub  $y_2 \notin K$ . Domknięty i wypukły podzbiór  $S$  zbioru wypukłego  $K$  nazywamy **zbiorem podpierającym** zbioru  $K$ , jeśli z warunków  $y_1, y_2 \in K$ ,  $0 < \lambda < 1$  oraz  $\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2 \in S$  wynika, że  $y_1, y_2 \in S$ . Tzn. jeśli punkt wewnętrzny odcinka zawartego w  $K$  leży w  $S$ , to cały odcinek leży w  $S$ . W szczególności punkt ekstremalny zbioru  $K$  jest jednopunktowym zbiorem podpierającym zbioru  $K$ .

**Lemat 12.1.** *Niech  $\varphi$  będzie ciągłym rzeczywistym funkcjonałem liniowym na przestrzeni lokalnie wypukłej  $X$  oraz  $K$  zwartym podzbiorem wypukłym w  $X$ . Zbiór  $S$  złożony z punktów zbioru  $K$ , w których funkcja*

$$K \ni x \mapsto \varphi(x)$$

*osiąga maksimum jest zwartym zbiorem podpierającym zbioru  $K$ .*

*Dowód.* Niech  $m = \max_{y \in K} \varphi(y)$ . Wtedy

$$S = \{x \in K : \varphi(x) = m\}.$$

Zatem  $S$  jest zwartym zbiorem wypukłym jako przekrój zbioru  $K$  z domkniętym zbiorem afinicznym  $\{x \in X : \varphi(x) = m\}$ .

Założmy, że  $\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2 \in S$  dla  $y_1, y_2 \in K$  oraz  $0 < \lambda < 1$ . Wtedy

$$m = \varphi(\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2) = \lambda \varphi(y_1) + (1 - \lambda)\varphi(y_2).$$

Zatem  $\varphi(y_1) = \varphi(y_2) = m$ , czyli  $y_1, y_2 \in S$ . □

Przekrój wszystkich domkniętych zbiorów wypukłych zawierających dany zbiór  $E$  jest domkniętym zbiorem wypukłym, zawartym w każdym domkniętym zbiorze wypukłym zawierającym  $E$ . Taki zbiór nazywamy **domkniętą wypukłą otoczką** zbioru  $E$ .

**Twierdzenie 12.2** (Krein-Millman). *Niech  $K$  będzie zwartym wypukłym podzbiorem lokalnie wypukłej przestrzeni topologicznej  $X$ . Wtedy  $K$  jest domkniętą wypukłą otoczką swoich punktów ekstremalnych.*

*Dowód.* (**Kelley**) Przekrój zbiorów podpierających zbioru  $K$  jest zbiorem podpierającym zbioru  $K$ . Ponadto jeśli  $S$  jest zbiorem podpierającym zbioru  $K$  oraz  $T$  jest zbiorem podpierającym zbioru  $S$ , to  $T$  jest zbiorem podpierającym zbioru  $K$ . Rzeczywiście, jeśli  $\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2 \in T \subset S$  dla pewnych punktów  $y_1, y_2 \in K$ , to  $y_1, y_2 \in S$ , bo  $S$  podpira  $K$ . Ale wtedy  $y_1, y_2 \in T$ , bo  $T$  podpira  $S$ .

Rodzina wszystkich zbiorów podpierających zbioru  $K$  jest częściowo uporządkowana przez zawieranie. Ponadto każdy łańcuch tej rodziny jest ograniczony od dołu przez przekrój zbiorów z łańcucha. Z lematu Kuratowskiego-Zorna istnieje najmniejszy zbiór podpierający  $S$  zbioru  $K$ . Pokażemy, że  $S$  jest jednopunktowy. Załóżmy, nie wprost, że  $x \neq y \in S$ . Wtedy z Twierdzenia 5.23(c) istnieje ciągły funkcjonal liniowy  $\varphi$  na  $X$  taki, że  $\varphi(x) > \varphi(y)$ . Wtedy podzbiór  $S_0$  zbioru  $S$  złożony z punktów, w których  $\varphi$  osiąga maksimum jest zbiorem podpierającym zbioru  $S$ , a zatem zbioru  $K$ . Zbiór  $S_0$  nie zawiera  $y$  zatem  $S_0 \subsetneq S$ .

Jeśli zbiór podpierający jest jednopunktowy  $S = \{x\}$ , to  $x$  jest punktem ekstremalnym w zbiorze  $K$ . Rzeczywiście, jeśli  $x = \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2$ , dla pewnych  $y_1, y_2 \in K$  oraz  $0 < \lambda < 1$ , to  $y_1, y_2 \in S$ , czyli  $y_1 = y_2 = x$ . Pokazaliśmy w ten sposób, że każdy niepusty zbiór podpierający zawiera punkt ekstremalny zbioru  $K$ .

Rozważmy ciągły rzeczywisty funkcjonal liniowy  $\varphi$ . Zbiór punktów z  $K$ , dla których ten funkcjonal osiąga maksimum jest podpierający, czyli maksimum funkcjonału  $\varphi$  na  $K$  jest osiągnięte w punkcie ekstremalnym. Tzn.

$$\max_{x \in K} \varphi(x) = \max_{x \in E} \varphi(x),$$

gdzie  $E$  oznacza zbiór punktów ekstremalnych zbioru  $K$ . Niech  $C$  oznacza domkniętą wypukłą otoczkę zbioru  $E$ . Załóżmy, że  $x \in K \setminus C$ . Wtedy z Twierdzenia 5.23(c) istnieje ciągły rzeczywisty funkcjonal liniowy  $\varphi$  taki, że

$$\varphi(x) > \max_{y \in C} \varphi(y) = \max_{y \in K} \varphi(y).$$

Otrzymaliśmy sprzeczność. □

**Uwaga.** Można przyjąć, że  $X$  jest przestrzenią unormowaną ze słabą topologią lub  $X$  jest przestrzenią sprzężoną do przestrzeni unormowanej, z  $*$ -słabą topologią.

**Przykład.** Rozważmy kulę jednostkową  $B$  w przestrzeni  $c_0$ . Kula nie posiada punktów ekstremalnych. Rzeczywiście załóżmy, że  $x \in B$ . Wtedy  $|x_{n_0}| \leq \frac{1}{2}$

dla pewnego wskaźnika  $n_0$ . Zatem ciągi  $u = x + \frac{1}{2}\delta_{n_0}$  oraz  $v = x - \frac{1}{2}\delta_{n_0}$  należą do  $B$ . Ponadto  $x = \frac{1}{2}(u + v)$ . Z twierdzenia Kreina-Millmana i z twierdzenia Banacha-Alaoglu wynika, że  $c_0$  nie jest przestrzenią sprzężoną do przestrzeni unormowanej. Można to uzyskać również z Wniosku 5.10. Przypuśćmy, nie wprost, że  $c_0 = X^*$ . Wtedy  $X$  byłaby nieskończenie wymiarową domkniętą podprzestrzenią przestrzeni  $X^{**} = c_0^* = \ell^1$ . W szczególności  $X$  byłaby przestrzenią Banacha. Z Wniosku 5.10 każdy element  $x$  z  $X \subset \ell^1$  osiąga swoją normę poprzez maksimum modułu na kuli jednostkowej w  $c_0$ . Niech  $x \in X$ . Załóżmy, że dla ciągu  $x = \{x_n\} \in \ell^1$  maksimum jest osiągnięte na ciągu  $y = \{y_n\}$  z kuli jednostkowej w  $c_0$ . Wtedy  $|y_n| \leq 1$  oraz  $|y_n| < \frac{1}{2}$  dla  $n \geq n_0$ . Zatem

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| |y_n| \\ &= \sum_{n=1}^{n_0} |x_n| |y_n| + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |x_n| |y_n| \\ &\leq \sum_{n=1}^{n_0} |x_n| + \frac{1}{2} \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |x_n| \end{aligned}$$

Zatem  $x_n = 0$  dla  $n \geq n_0$ . To oznacza, że

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n,$$

gdzie  $X_n$  oznacza przestrzeń ciągów w  $X$  zerujących się od miejsca  $n$ . W związku z tym  $X$  jest zbiorem I kategorii, co daje sprzeczność.

## 13 Zadania

1. Udowodnić nierówność Höldera

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q,$$

gdzie  $a, b \geq 0$ ,  $p, q \geq 1$  oraz  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Wyznaczyć, kiedy zachodzi równość. **Wskazówka:**

(Sposób I) Naszkicować wykres funkcji  $y = x^{p-1}$ . Porównać pole prostokąta  $[0, a] \times [0, b]$  z sumą pól dwu obszarów: (1) ograniczonego wykresem

funkcji, osią  $OX$ , i prostą  $x = a$ , (2) ograniczonego wykresem funkcji, osią  $OY$  i prostą  $y = b$ . (Sposób II) Przyjąć  $y = 1$  i pokazać, że funkcja  $f(x) = \frac{1}{p}x^p - x + \frac{1}{q}$  przyjmuje minimum w punkcie  $x = 1$ .

2. Pokazać nierówność Höldera

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{1/p} \left( \sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{1/q},$$

gdzie  $x_i, y_i \geq 0$ ,  $p, q$  jak poprzednio. Kiedy zachodzi równość? **Wskazówka:** Założyć, że obie sumy  $\sum_{i=1}^n x_i^p$  i  $\sum_{i=1}^n y_i^q$  nie przekraczają 1. Zastosować poprzednie zadanie do każdego z iloczynów  $x_i y_i$ .

3. Pokazać, że

$$\left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} = \max \left\{ \left| \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i \right| : \left( \sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{1/q} \leq 1 \right\},$$

gdzie  $x_i, y_i \in \mathbb{C}$ ,  $p$  i  $q$  jak poprzednio.

4. Pokazać nierówność trójkąta dla normy

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

określonej na  $\mathbb{C}^n$ . **Wskazówka:** Skorzystać z poprzedniego zadania.

5. Uogólnić trzy poprzednie zadania na sumy nieskończone.

6. Dla  $p_2 \geq p_1 \geq 1$  i  $n \in \mathbb{N}$  znaleźć najlepsze stałe w nierównościach

$$\left( \sum_{i=1}^n |x_i|^{p_1} \right)^{1/p_1} \leq c_1 \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^{p_2} \right)^{1/p_2}, \quad \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^{p_2} \right)^{1/p_2} \leq c_2 \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^{p_1} \right)^{1/p_1}.$$

7. Pokazać, że  $\ell^{p_1} \subset \ell^{p_2}$ , jeśli  $p_1 \leq p_2$ . **Wskazówka:** Jeśli  $\|x\|_{p_1} \leq 1$ , to  $|x_n| \leq 1$  dla wszystkich  $n$ .

8. Skonstruować ciąg  $x \in \ell^2$  taki, że  $x \notin \ell^p$  dla każdego  $p < 2$ .



9. Pokazać całkową nierówność Höldera

$$\int_{\Omega} f(x)g(x)d\mu(x) \leq \left( \int_{\Omega} f(x)^p \right)^{1/p} \left( \int_{\Omega} g(x)^q \right)^{1/q},$$

dla nieujemnych funkcji  $f(x)$  i  $g(x)$ ,  $p$  i  $q$  jak w zadaniu 1.

10. Pokazać nierówność trójkąta dla normy

$$\|f\|_p = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p},$$

gdzie  $f$  jest zespoloną funkcją na  $\Omega$  i  $p \geq 1$ . **Wskazówka:** Wyprowadzić wzór analogiczny do wzoru z zadania 3.

11. Wskazać normę w przestrzeni  $\mathbb{R}^n$  inną niż normy  $\|\cdot\|_p$  dla  $1 \leq p \leq \infty$ , ale taką, że  $\|e_i\| = 1$  dla każdego z wektorów standardowej bazy  $e_1, \dots, e_n$ .
12. Pokazać, że w przestrzeni liniowej unormowanej  $X$  zbiory

$$\{x \in X : \|x\| \leq 1\} \quad \{x \in X : \|x\| = 1\}$$

są domknięte.

13. Pokazać, że ciąg funkcji  $f_n$  jest zbieżny do funkcji  $f$  w normie przestrzeni  $C[0,1]$  (tzn.  $\|f_n - f\|_{\infty} \rightarrow 0$  przy  $n \rightarrow \infty$ ) wtedy i tylko wtedy, gdy  $f_n$  jest jednostajnie zbieżny do  $f$ .
14. Udowodnić zupełność przestrzeni  $C[0,1]$ . **Wskazówka:** Dla ciągu Cauchy'ego  $f_n$  pokazać zbieżność punktową korzystając z nierówności

$$|f_n(t) - f_m(t)| \leq \|f_n - f_m\|_{\infty}$$

i z zupełności  $\mathbb{C}$  (lub  $\mathbb{R}$ ). Niech  $f$  będzie granicą punktową ciągu  $f_n$ . Pokazać, że  $f$  jest jednostajną granicą ciągu  $f_n$  korzystając z nierówności

$$|f_n(t) - f(t)| \leq |f_m(t) - f(t)| + \|f_n - f_m\|_{\infty}.$$

Pokazać, że  $f$  jest ciągła, korzystając z nierówności

$$|f(t) - f(s)| \leq |f_n(t) - f_n(s)| + 2\|f_n - f\|_{\infty}.$$

**Uwaga:** Dowód przenosi się na przypadek  $C(K)$  przestrzeni funkcji ciągłych na zwartej przestrzeni metrycznej (lub topologicznej)  $K$ .

15. Niech  $c$  oznacza przestrzeń liniową ciągów zbieżnych o wyrazach zespolonych. Niech  $\|\{x_n\}\| = \sup_{n \geq 1} |x_n|$ . Pokazać, że  $c$  jest przestrzenią Banacha. Pokazać, że ciągi zbieżne do 0 tworzą domkniętą podprzestrzeń  $c_0$  w  $c$ . **Wskazówka:** Można utożsamić  $c$  z  $C(K)$ , gdzie  $K = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\} \cup \{0\}$ .
16. Udowodnić twierdzenie Weierstrassa o gęstości wielomianów w  $C[-1,1]$  korzystając z tego, że każda funkcja ciągła o okresie  $2\pi$  jest jednostajną granicą ciągu wielomianów trygonometrycznych. **Wskazówka:** Dla funkcji ciągłej  $f(x)$  określonej na  $[-1, 1]$  funkcja  $f(\cos t)$  ma okres  $2\pi$  i jest parzysta. Z tego powodu można ją aproksymować jednostajnie wielomianami trygonometrycznymi postaci

$$a_0 + a_1 \cos t + \dots + a_n \cos nt.$$

Zauważyć, że  $\cos nt$  jest wielomianem od  $\cos t$  tzn.

$$\cos nt = T_n(\cos t),$$

gdzie  $T_n$  jest wielomianem stopnia  $n$ . Pokazać, że funkcję  $f(x)$  można aproksymować jednostajnie wielomianami postaci

$$a_0 + a_1 T_1(x) + \dots + a_n T_n(x).$$

17. Dla funkcji ciągłej  $f$  na przedziale  $[0, 1]$  określamy wielomian Bernsteina wzorem

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) (1-x)^{n-k} x^k.$$

Pokazać, że  $B_n(f)$  jest jednostajnie zbieżny do  $f$ . **Wskazówka:** Zajrzeć do książki S. /Lojasiewicz, Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych (rozdział II §3, Twierdzenie 1).

18. Udowodnić, że jeśli  $x_n \rightarrow x$  oraz  $y_n \rightarrow y$  w przestrzeni unormowanej  $X$ , to  $x_n + y_n \rightarrow x + y$ . Pokazać, że jeśli  $\lambda_n \rightarrow \lambda$ , gdzie  $\lambda_n, \lambda \in \mathbb{C}$ , to  $\lambda_n x_n \rightarrow \lambda x$ .
19. Pokazać zupełność przestrzeni  $L^p(0, 1)$ , dla  $p \geq 1$ . **Wskazówka:** Postępować tak jak w przypadku  $p = 1$ . Skorzystać z nierówności

$$\left\| \sum |f_n| \right\|_p \leq \sum \|f_n\|_p.$$

20. W przestrzeni  $C_{\mathbb{R}}[0, 1]$  znaleźć odległość funkcji  $x^n$  od dwuwymiarowej podprzestrzeni  $E = \{ax + b : a, b \in \mathbb{R}\}$ .
21. Pokazać, że dla  $0 < p < 1$  funkcjonal  $\|(x_n)\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{1/p}$  określony na ciągach dla których szereg występujący w definicji jest zbieżny, nie jest normą, bo nie spełnia warunku trójkąta. Pokazać, że spełnione są nierówności

$$\|x + y\|_p^p \leq \|x\|_p^p + \|y\|_p^p, \quad \|x + y\|_p \leq 2^{1/p}(\|x\|_p + \|y\|_p).$$

22. Pokazać, że  $L^1(0, 1)$  zawiera dwie liniowo niezależne funkcje  $f$  i  $g$  takie, że  $\|f + g\|_1 = \|f\|_1 + \|g\|_1$ . Pokazać, że w normie przestrzeni  $L^p(0, 1)$ , dla  $1 < p < \infty$ , taka sytuacja nie jest możliwa.
23. Pokazać, że jeśli  $X$  i  $Y$  są przestrzeniami unormowanymi z normami  $\|\cdot\|_X$ ,  $\|\cdot\|_Y$ , to ich suma prosta  $X \oplus Y$  jest przestrzenią unormowaną z normą

$$\|x \oplus y\| = \|x\|_X + \|y\|_Y.$$

Pokazać, że jeśli  $X$  i  $Y$  są zupełne, to również  $X \oplus Y$  jest zupełna.

24. Dla ciągu  $X_n$  przestrzeni unormowanych z normami  $\|\cdot\|_{X_n}$  określamy sumę prostą  $X$

$$X = \left\{ \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \mid x_n \in X_n, \|\{x_n\}\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{X_n} < \infty \right\}.$$

Pokazać, że  $X$  jest przestrzenią unormowaną z normą  $\|\{x_n\}\|$ . Pokazać, że  $X$  jest zupełna jeśli wszystkie  $X_n$  są przestrzeniami zupełnymi.

25. Udowodnić, że jeśli podzbiory  $A \subset B$  przestrzeni metrycznej  $X$  spełniają warunek, że  $A$  jest gęsty w  $B$  oraz  $B$  jest gęsty w  $X$ , to  $A$  jest gęsty w  $X$ .
26. Wykorzystać poprzednie zadanie aby udowodnić, że wielomiany o współczynnikach wymiernych stanowią gęsty podzbiór przestrzeni  $C_{\mathbb{R}}[0, 1]$  z normie  $\|\cdot\|_{\infty}$ . Udowodnić, że ciągi  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  o skończenie wielu wyrazach niezerowych takich, że  $x_n \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$  stanowią gęsty podzbiór każdej przestrzeni  $\ell^p$  dla  $1 \leq p < \infty$ , w normie  $\|\cdot\|_p$ .

- \*27. Dla domkniętej podprzestrzeni  $M$  w przestrzeni Banacha  $X$  z normą  $\|\cdot\|_X$ , określamy przestrzeń ilorazową  $X/M$  jako przestrzeń klas równoważności względem relacji w  $X$

$$x \sim y \quad \text{jeśli} \quad x - y \in M.$$

Oznaczając klasę równoważności elementu  $x \in X$  przez  $[x]$  określamy dodawanie i mnożenie przez skalar wzorem

$$\alpha[x] + \beta[y] = [\alpha x + \beta y].$$

Pokazać, że ta definicja jest poprawna, tzn. prawa strona zależy jedynie od klas równoważności, z których pochodzą  $x$  i  $y$ , a nie od samych elementów  $x$  i  $y$ .

Określmy

$$\|[x]\| = \inf_{m \in M} \|x - m\|_X.$$

Pokazać, że ta funkcja ma własności normy. Pokazać, że  $X/M$  z tą normą jest przestrzenią Banacha. **Wskazówka:** Pokazać, że jeśli  $\sum \|[x_n]\| < \infty$ , to szereg  $\sum [x_n]$  jest zbieżny. W tym celu dla każdego  $n$  wybrać  $m_n \in M$  tak, aby

$$\|x_n - m_n\|_X \leq 2 \inf_{m \in M} \|x_n - m\|_X.$$

Zauważyć, że szereg  $\sum (x_n - m_n)$  jest zbieżny w  $X$ . Oznaczając jego sumę przez  $s$  pokazać, że  $[s] = \sum [x_n]$  w  $X/M$ .

28. Niech  $X = C[0, 1]$  i  $M = \{f \mid f(0) = f(1) = 0\}$ . Pokazać, że  $X/M$  można utożsamić z  $\mathbb{C}^2$ , z normą  $\|(x_1, x_2)\| = \max\{|x_1|, |x_2|\}$ .
- \*29.  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$  jest gęstym podzbiorem kuli jednostkowej w przestrzeni Banacha  $X$ . Określmy odwzorowanie  $J : \ell^1 \rightarrow X$ , wzorem

$$J : \{a_n\}_{n=0}^\infty \longmapsto \sum_{n=0}^\infty a_n x_n$$

- (a) Pokazać, że odwzorowanie  $J$  jest ciągle.
- (b) Pokazać, że  $\ker J$  jest domknięte i że  $J$  "podnosi" się do ciągłego odwzorowania  $\hat{J}$  z przestrzeni ilorazowej  $\ell^1/\ker J$  w  $X$ .

- (c) Pokazać, że  $\text{Im } \hat{J} = X$ . Wskazówka. Przy ustalonym  $x$ ,  $\|x\| = 1$ , wybrać indukcyjnie  $x_{n(i)}$  tak aby

$$\|x - \sum_{i=1}^k 2^{-i+1} x_{n(i)}\| < 2^{-k}.$$

- (d) Zamieniając w (c) liczbę 2 na 3, 4,  $\dots$ , pokazać, że  $\hat{J}$  jest izometrią.

30. Znaleźć normę operatora identycznościowego z  $L^p(a, b)$  w  $L^q(a, b)$ .
31. Rozważamy przestrzeń  $X = \mathbb{R}^n$  z normą  $\|\cdot\|_2$ . Niech  $A$  będzie macierzą symetryczną wymiaru  $n \times n$  o wyrazach rzeczywistych. Pokazać, że norma operatora liniowego związanego z  $A$  z przestrzeni  $X$  w siebie, jest równa największej z liczb  $|\lambda|$ , gdzie  $\lambda$  jest wartością własną macierzy  $A$ . Jaka jest norma operatora liniowego związanego z macierzą ortogonalną  $U$ , tzn. taką, że  $U^T = U^{-1}$ .
32. Dla jakich funkcji  $a(x)$  operator mnożenia przez  $a(x)$  jest ciągłym odwzorowaniem z  $L^p(0, 1)$  w  $L^q(0, 1)$  ?
33. Obliczyć normę operatora

$$s_n f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(x-t) dt$$

w przestrzeni  $C[-\pi, \pi]$  i w przestrzeni  $L^2(-\pi, \pi)$ , gdzie  $D_n(t) = 1 + 2 \cos t + \dots + 2 \cos nt$ .

34. Podzbiór  $A$  przestrzeni unormowanej  $X$  nazywamy ograniczonym, jeśli  $\sup_{a \in A} \|a\| < \infty$ . Pokazać, że operator liniowy  $T : X \rightarrow Y$  z przestrzeni unormowanej  $X$  w przestrzeń unormowaną  $Y$  jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy przekształca ograniczone podzbiory  $X$  w ograniczone podzbiory  $Y$ .
35.  $X, Y, Z$  są trzema przestrzeniami unormowanymi oraz  $T_1 : X \rightarrow Y$  i  $T_2 : Y \rightarrow Z$  są operatorami liniowymi ograniczonymi. Pokazać, że złożenie  $T_2 T_1$  jest operatorem ograniczonym z  $X$  do  $Z$  oraz  $\|T_2 T_1\| \leq \|T_1\| \|T_2\|$ . Pokazać, że jeśli  $T : X \rightarrow X$  jest operatorem liniowym ograniczonym, to dowolna potęga  $T^n$  (w sensie złożenia) jest operatorem ograniczonym oraz  $\|T^n\| \leq \|T\|^n$ .

36. Pokazać, że jeśli  $T \neq 0$  jest operatorem liniowym ograniczonym z  $X$  do  $Y$  oraz  $\|x\| < 1$  dla pewnego  $x \in X$ , to  $\|Tx\| < \|T\|$ .
37. Pokazać, że operator  $T : \ell^\infty \rightarrow \ell^\infty$  określony wzorem

$$T(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (x_1, \frac{1}{2}x_2, \dots, \frac{1}{n}x_n, \dots)$$

jest liniowy i ograniczony.

38. Pokazać, że obraz  $\text{Im } T$  operatora liniowego ograniczonego  $T : X \rightarrow Y$  nie musi być domkniętą podprzestrzenią w  $Y$ . **Wskazówka:** Poprzednie zadanie.
39. Pokazać, że jądro ograniczonego operatora liniowego  $T : X \rightarrow Y$ , tzn.  $\ker T = \{x \in X \mid Tx = 0\}$  jest domkniętą podprzestrzenią w  $X$ .
40. Pokazać, że odwzorowanie odwrotne  $T^{-1} : \text{Im } T \rightarrow X$  operatora  $T : X \rightarrow Y$  nie musi być ograniczone. **Wskazówka:** Zadanie 4.
41. Znaleźć obraz operatora  $T : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(y) dy.$$

Znaleźć operator odwrotny  $T^{-1} : \text{Im } T \rightarrow C[0, 1]$ . Czy  $T$  jest liniowy i ograniczony ?

42. Na  $C[0, 1]$  określamy operatory  $S$  i  $T$  wzorami

$$(Tf)(x) = x \int_0^1 f(t) dt \quad (Sf)(x) = xf(x).$$

Czy operatory  $T$  i  $S$  są przemienne, tzn. czy  $TS = ST$  ? Obliczyć normy operatorów  $S$ ,  $T$ ,  $ST$ , i  $TS$ .

43. Niech  $X$  będzie przestrzenią liniową wszystkich ograniczonych funkcji o wartościach rzeczywistych określonych na  $\mathbb{R}$  z normą

$$\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|.$$

Dla ustalonej liczby  $\delta$  określmy odwzorowanie  $(Tf)(x) = f(x - \delta)$ . Pokazać, że  $T$  jest ograniczonym operatorem liniowym  $X$  w siebie.

44. Pokazać, że normy w przestrzeniach  $\ell^p$  oraz  $L^p(0, 1)$  nie pochodzą od iloczynu skalarnego dla  $p \neq 2$ . **Wskazówka:** Wskazać dwa elementy, dla których nie zachodzi równość równoległoboku.
45. Pokazać, że jeśli  $\langle x, y \rangle = 0$ , to  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ . Czy odwrotna implikacja jest prawdziwa? Podać przykład.
46. W przestrzeni z iloczynem skalarnym warunek  $\|x\| = \|y\|$  implikuje  $\langle x + y, x - y \rangle = 0$ . Co to oznacza geometrycznie?
47. Sprawdzić tożsamość Apoloniusza w przestrzeni z iloczynem skalarnym.

$$\|z - x\|^2 + \|z - y\|^2 = \frac{1}{2}\|x - y\|^2 + 2\|z - \frac{1}{2}(x + y)\|^2.$$

Pokazać, że można ją uzyskać z równości równoległoboku.

48. Pokazać, że jeśli  $x, y \neq 0$  oraz  $\langle x, y \rangle = 0$ , to wektory  $x$  i  $y$  są liniowo niezależne. Rozszerzyć tę własność na większą liczbę wektorów.
49. Udowodnić, że jeśli  $x_n \xrightarrow{n} x$  oraz  $y_n \xrightarrow{n} y$ , to  $\langle x_n, y_n \rangle \xrightarrow{n} \langle x, y \rangle$ .
50. Pokazać, że  $\langle x, y \rangle = 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\|x + \alpha y\| \geq \|x\|$  dla wszystkich skalarów  $\alpha$ .
51. Podzbiór  $A$  przestrzeni liniowej nazywamy wypukłym, jeśli z warunku  $x, y \in A$  wynika, że  $\frac{1}{2}(x + y) \in A$ . Pokazać, że jeśli  $A$  jest niepustym, wypukłym i domkniętym podzbiorem przestrzeni Hilberta  $\mathcal{H}$ , to dla każdego wektora  $x \in \mathcal{H}$  istnieje jedyny wektor  $z \in A$  spełniający

$$\|x - z\| = \inf\{\|x - y\| : y \in A\}.$$

**Wskazówka:** Przeanalizować dowód z wykładu dotyczący przypadku, gdy  $A$  jest domkniętą podprzestrzenią liniową.

Pokazać, że teza nie jest prawdziwa dla przestrzeni Banacha, tzn. kres dolny może nie być osiągnięty. W szczególności teza nie jest spełniona dla domkniętych podprzestrzeni w  $C[0, 1]$  i w  $\ell^1$ .

52. Pokazać, że w niepustym i domkniętym zbiorze wypukłym  $A$  przestrzeni Hilberta istnieje element  $z$  taki, że

$$\|z\| = \inf\{\|y\| : y \in A\}.$$

53. Pokazać, że domknięcie zbioru wypukłego jest zbiorem wypukłym.
54. Pokazać, że zbiór  $M = \{x = (x_i) : \sum x_i = 1\}$  w przestrzeni  $\mathbb{C}^n$  jest wypukły i domknięty. Znaleźć w  $M$  element o najmniejszej normie euklidesowej.
55. Dla zbioru  $M$  w przestrzeni Hilberta  $\mathcal{H}$  przez  $M^\perp$  oznaczamy zbiór wektorów  $x$  takich, że  $\langle x, v \rangle = 0$  dla wszystkich  $v \in M$ . Pokazać, że  $M^\perp$  jest domkniętą podprzestrzenią liniową.
56. Pokazać, że jeśli  $A \subset B$ , to

$$A \subset A^{\perp\perp} \quad B^\perp \subset A^\perp \quad A^{\perp\perp\perp} = A^\perp$$

57. Pokazać, że dla podzbioru  $A$  w przestrzeni Hilberta,  $A^{\perp\perp}$  jest najmniejszą domkniętą podprzestrzenią zawierającą  $A$ .
58. Niech  $A$  oznacza podzbiór przestrzeni  $\ell^2$  złożony ciągów absolutnie sumowalnych o sumie współrzędnych równej 0. Pokazać, że  $A$  jest podprzestrzenią liniową w  $\ell^2$ . Znaleźć domknięcie zbioru  $A$  w przestrzeni  $\ell^2$ .
59. Pokazać, że jeśli  $M$  jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni Hilberta, to  $M^{\perp\perp} = M$ .
60. Podzbiór  $A$  unormowanej przestrzeni liniowej nazywamy liniowo gęstym jeśli przestrzeń  $\text{lin}A$  jest gęsta. Pokazać, że podzbiór  $A$  przestrzeni Hilberta jest liniowo gęsty wtedy i tylko wtedy, gdy  $A^\perp = \{0\}$ .
61. Udowodnić twierdzenie Jordana–von Neumanna dla przypadku rzeczywistego, tzn. pokazać, że norma spełniająca warunek równoległoboku na rzeczywistej przestrzeni liniowej pochodzi od rzeczywistego iloczynu skalarnego. **Wskazówka:** Zdefiniować funkcję

$$R(x, y) = \langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

Następnie pokazać, że ta funkcja określa iloczyn skalarny według poniższego schematu.

(a) Pokazać, że  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$  oraz  $\langle -x, y \rangle = -\langle x, y \rangle$ .



(b) Korzystając z równości równoległoboku wykazać, że

$$\langle x_1 + x_2, 2y \rangle = 2\langle x_1, y \rangle + 2\langle x_2, y \rangle.$$

(c) Na podstawie (b) udowodnić, że  $\langle x, 2y \rangle = 2\langle x, y \rangle = \langle 2x, y \rangle$ , a następnie

$$\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle.$$

(d) Udowodnić przez indukcję, że

$$\langle nx, y \rangle = n\langle x, y \rangle, \quad n \in \mathbb{N}$$

a następnie

$$\langle rx, y \rangle = r\langle x, y \rangle, \quad r \in \mathbb{Q}.$$

(e) Zauważyć, że jeśli  $x_n \xrightarrow{n} x$ , to  $\langle x_n, y \rangle \xrightarrow{n} \langle x, y \rangle$ . Pokazać, że zatem

$$\langle rx, y \rangle = r\langle x, y \rangle, \quad r \in \mathbb{R}.$$

62. Udowodnić twierdzenie Jordana–von Neumanna dla przypadku zespolonego. **Wskazówka:** Określmy  $R(x, y)$  jak w zadaniu 1. Następnie niech

$$\langle x, y \rangle = R(x, y) - iR(ix, y).$$

(a) Pokazać, że  $R(ix, y) = -R(x, iy)$  a następnie  $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$ .

(b) Pokazać, że  $\langle ix, y \rangle = i\langle x, y \rangle$  a następnie na podstawie zadania 1  $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda\langle x, y \rangle$  dla  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

63. Dla rzeczywistej przestrzeni liniowej unormowanej  $X$  określamy przestrzeń  $V = X + iX$  z normą  $\|x + iy\| = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$ , dla  $x, y \in X$ . Pokazać, że  $V$  jest zespoloną przestrzenią unormowaną. Pokazać, że jeśli norma w  $X$  spełnia warunek równoległoboku to również norma w  $V$  spełnia ten warunek.

64. Macierzą Grama układu wektorów  $\{x_i\}_{i=1}^n$  w przestrzeni z iloczynem skalarnym nazywamy macierz  $((x_i, x_j))_{i,j=1}^n$ . Pokazać, że wyznacznik macierzy Grama nie znika wtedy i tylko wtedy, gdy wektory  $\{x_i\}_{i=1}^n$  są liniowo niezależne. **Wskazówka:** Jeśli wektory są liniowo zależne, to wiersze macierzy są liniowo zależne. To dowodzi implikacji w jedną stronę. Dla dowodu w drugą stronę zastosować indukcję względem  $n$ .

Zauważyć, że wyznacznik Grama można zapisać jako iloczyn skalarny wektora  $x_n$  z wektorem

$$v_n = \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & (x_1, x_2) & \dots & (x_1, x_n) \\ (x_2, x_1) & (x_2, x_2) & \dots & (x_2, x_n) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ (x_{n-1}, x_1) & (x_{n-1}, x_2) & \dots & (x_{n-1}, x_n) \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{vmatrix}.$$

Pokazać, że  $v_n$  jest ortogonalny do wektorów  $x_1, \dots, x_{n-1}$ . Niech  $\Delta_k$  oznacza wyznacznik Grama pierwszych  $k$  wektorów układu. Pokazać, że  $(v_n, v_n) = \Delta_{n-1}\Delta_n$ . Jeśli wyznacznik Grama znika, to  $v_n = 0$ . To oznacza, że wektor  $x_n$  jest liniową kombinacją pozostałych wektorów, bo z założenia indukcyjnego współczynnik przy  $x_n$  jest niezerowy (współczynnik ten jest równy  $\Delta_{n-1}$ ).

Pokazać, że wyznacznik Grama jest zawsze nieujemny.

65. Niech  $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$  będzie układem wektorów liniowo niezależnych. Pokazać, że wektory

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{n-1}\Delta_n}}v_n$$

stanowią układ ortonormalny o własnościach:

- (a)  $y_n \perp \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ ;
- (b)  $(y_n, y_n) = 1$ ;
- (c)  $(y_n, x_n) > 0$ ;
- (d)  $\text{lin}\{y_1, \dots, y_n\} = \text{lin}\{x_1, \dots, x_n\}$ .

Pokazać, że warunki (a)–(d) wyznaczają układ  $\{y_n\}$ . Przejście od układu  $\{x_n\}$  do układu  $\{y_n\}$  nosi nazwę procesu ortogonalizacji Grama–Schmidta.

66. Niech  $\mathcal{H} = L^2(-1, 1)$  oraz  $x_n(t) = t^{n-1}$ , dla  $n = 1, 2, \dots$ . Pokazać, że układ  $x_n$  jest liniowo niezależny. Znaleźć  $y_1, y_2$  oraz  $y_3$ .

67. Niech

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}).$$

Pokazać, że  $H_n$  jest wielomianem stopnia  $n$ . Udowodnić, że

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2} dx = 0, \quad n \neq m,$$

tzn.  $H_n$  tworzą układ ortogonalny w  $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2} dx)$ .  $H_n$  nazywamy wielomianami Hermite'a.

68. Sprawdzić, że układ funkcji Haara  $h_{m,n}(x)$ ,  $m \geq 0$ ,  $1 \leq n \leq 2^m$ , gdzie  $h_{0,1} = 1$  oraz

$$h_{m,n}(x) = \begin{cases} 2^{m/2} & \frac{n-1}{2^m} \leq x < \frac{2n-1}{2^{m+1}}, \\ -2^{m/2} & \frac{2n-1}{2^m} \leq x < \frac{n}{2^m}, \\ 0 & x < \frac{n-1}{2^m} \text{ lub } x \geq \frac{n}{2^m}, \end{cases}$$

jest ortonormalny względem iloczynu skalarnego  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx$ . Czy istnieje niezerowa funkcja ciągła (całkowalna z kwadratem) na przedziale  $[0, 1]$  ortogonalna do wszystkich funkcji tego układu?

69. Znaleźć rzuty ortogonalne wektorów na podane podprzestrzenie:

(a)  $f(x) = x^3$ ,  $M = \text{lin}\{1, x\}$ ,  $\mathcal{H} = L^2(0, 1)$ .

(b)  $f(x) = x$ ,  $M = \text{lin}\{1, \cos x, \sin x\}$ ,  $\mathcal{H} = L^2(-\pi, \pi)$ .

70. Obliczyć normy funkcjonałów na przestrzeni  $\mathcal{H}$ .

(a)  $\varphi(f) = \int_0^1 xf(x)dx$ ,  $\mathcal{H} = L^2(0, 1)$ .

(b)  $\varphi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ ,  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2} dx)$ .

(c)  $\varphi(\{x_n\}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{n+1}$ ,  $\mathcal{H} = \ell^2$ .

71. Czy funkcjonał  $f \mapsto f(0)$  rozszerza się z  $C[-1, 1]$  do ograniczonego funkcjonału liniowego na przestrzeni Hilberta  $L^2(-1, 1)$ ?

72. Pokazać, że iloczyn skalarny na przestrzeni z iloczynem skalarnym jest ograniczoną formą półtoraliniową.

73. Formą hermitowską nazywamy formę półtoraliniową spełniającą

$$B(y, x) = \overline{B(x, y)}.$$

Pokazać, że ograniczona forma hermitowska jest postaci

$$B(x, y) = \langle x, Ay \rangle$$

dla ograniczonego operatora liniowego spełniającego  $A^* = A$ .

74. Formę półtoraliniową nazywamy nieujemną jeśli  $B(x, x) \geq 0$  dla wszystkich wektorów  $x \in \mathcal{H}$ . Pokazać, że forma nieujemna jest hermitowska oraz spełnia nierówność Schwarz'a

$$|B(x, y)|^2 \leq B(x, x)B(y, y).$$

75. Dla nieujemnej formy półtoraliniowej  $B(x, y)$  określmy  $p(x) = \sqrt{B(x, x)}$ . Pokazać, że  $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$  oraz  $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$ .

76. Pokazać, że  $\|A^*\| = \|A\|$  dla ograniczonego operatora liniowego  $A$  w przestrzeni Hilberta  $\mathbb{H}$ .

77. Dla zespolonej funkcji  $k(x, y)$  ciągłej określamy operator

$$Af(x) = \int_0^1 k(x, y)f(y) dy$$

dla  $f \in L^2(0, 1)$ . Sprawdzić, że  $A$  jest ograniczony. Znaleźć operator  $A^*$ .

78. Znaleźć operator sprzężony do operatora

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(y) dy$$

określonego na  $\mathcal{H} = L^2(0, 1)$ .

79. Pokazać, że odwzorowanie  $A \mapsto A^*$  na przestrzeni  $B(\mathcal{H}) := B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$  jest antyliniowe.

80. Pokazać, że dla  $A, B \in B(\mathcal{H})$  mamy  $(AB)^* = B^*A^*$ .

81. Niech  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  będzie ograniczonym operatorem odwracalnym. Pokazać, że  $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$ .
82. Niech  $A$  będzie ograniczonym operatorem na  $\mathcal{H}$  spełniającym  $A(M_1) \subset M_2$ , dla podprzestrzeni  $M_1, M_2 \subset \mathcal{H}$ . Pokazać, że  $A^*(M_2^\perp) \subset M_1^\perp$ .
83. Pokazać, że dla operatora  $A \in B(\mathcal{H})$  zachodzi

$$\ker A = (\operatorname{Im} A^*)^\perp \quad \operatorname{Im} A \subset (\ker A^*)^\perp.$$

84. Pokazać, że jeśli dwa operatory liniowe  $T_1, T_2$  spełniają  $\langle T_1x, x \rangle = \langle T_2x, x \rangle$  dla każdego  $x \in \mathcal{H}$ , to  $T_1 = T_2$ .
85. Dla ograniczonego operatora liniowego  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  określamy operator  $S = I + T^*T$ , gdzie  $I$  oznacza operator identycznościowy. Pokazać, że  $S$  spełnia

$$\|x\| \leq \|Sx\| \leq (1 + \|T\|^2)\|x\|.$$

Następnie pokazać, że  $S$  jest różnowartościowy i że podprzestrzeń  $\operatorname{Im} S$  jest domknięta. Korzystając z zadania 13 udowodnić, że  $\operatorname{Im} S$  jest gęsta w  $\mathcal{H}$ . Pokazać, że  $S$  jest odwracalny oraz  $\|S^{-1}\| \leq 1$ .

86.  $T_n$  jest ciągiem ograniczonych operatorów liniowych z przestrzeni unormowanej  $X$  w przestrzeń Banacha  $Y$ . Pokazać, że zbiór  $\{x \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} T_nx \text{ istnieje}\}$  jest równy  $X$  lub jest zbiorem I-jej kategorii. **Wskazówka.** Niech

$$\begin{aligned} A &= \{x \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} T_nx \text{ istnieje}\}, \\ B &= \{x \in X : \sup_n \|T_nx\| < +\infty\}. \end{aligned}$$

Mamy  $A \subset B$ . Jeśli  $A$  nie jest pierwszej kategorii to również  $B$  nie jest I-jej kategorii. Zatem normy  $\|T_n\|$  są wspólnie ograniczone. Pokazać, że wtedy  $A$  jest domknięty. Ponieważ nie jest I-jej kategorii, to zawiera kulę otwartą. Ale  $A$  jest podprzestrzenią liniową. Zatem  $A = X$ .

87. Niech  $T_n$  będą ograniczonymi operatorami liniowymi z przestrzeni Banacha  $X$  w przestrzeń unormowaną  $Y$ . Pokazać, że jeśli  $T_nx$  jest zbieżny dla każdego  $x$  z przestrzeni Banacha  $X$ , to normy  $\|T_n\|$  są wspólnie ograniczone. Pokazać, że operator określony wzorem

$$Tx = \lim_n T_nx$$

jest ograniczony oraz  $\|T\| \leq \liminf \|T_n\|$ .

88. Niech  $a_n$  będzie ciągiem o wyrazach zespolonych o własności, że szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$  jest zbieżny dla każdego ciągu  $\{x_n\} \in c_0$ . Pokazać, że  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$ . **Wskazówka:** Rozważyć funkcjonały  $\varphi_N(x) = \sum_{n=1}^N a_n x_n$  dla  $x \in c_0$ .
89. Ciąg  $x_n$  wektorów w przestrzeni Hilberta  $\mathcal{H}$  ma własność  $\sup_n |(y, x_n)| < +\infty$  dla dowolnego  $y \in \mathcal{H}$ . Pokazać, że  $\sup_n \|x_n\| < +\infty$ . **Wskazówka.** Rozważyć funkcjonały liniowe  $y \mapsto (y, x_n)$ .
90. \*  $\{a_{mn}\}_{n,m=0}^{\infty}$  jest macierzą zespoloną o własności: dla każdego  $m \in \mathbb{N}$  istnieje ciąg  $\{x_n^{(m)}\}_{n=0}^{\infty} \in \ell^2$ , dla którego szereg  $\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} x_n^{(m)}$  jest rozbieżny. Pokazać, że istnieje taki ciąg  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in \ell^2$ , że szereg  $\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} x_n$  jest rozbieżny dla wszystkich  $m \in \mathbb{N}$ .
91. Ciąg elementów  $x_n$  w przestrzeni unormowanej  $X$  ma własność, że ciąg liczbowy  $\varphi(x_n)$  jest ograniczony dla dowolnego ciągłego funkcjonału  $\varphi$  określonego na  $X$ . Pokazać, że ciąg  $\|x_n\|$  jest ograniczony.
92. Niech  $X$  oznacza przestrzeń unormowaną złożoną z ciągów zespolonych  $x = \{x_n\}$  dla których tylko skończenie wiele wyrazów jest różnych od zera, z normą  $\|x\| = \max_n \|x_n\|$ . Określmy operator liniowy  $T : X \rightarrow X$  wzorem
- $$Tx = (x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \dots).$$
- Pokazać, że  $T$  jest ograniczony, ale  $T^{-1}$  nie jest ograniczony. Czy to przeczy twierdzeniu o odwzorowaniu otwartym?
93.  $X$  jest przestrzenią Banacha względem dwu norm  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ , przy czym  $\|\cdot\|_1 \leq c\|\cdot\|_2$ , dla pewnej stałej  $c$ . Pokazać, że  $\|\cdot\|_2 \leq d\|\cdot\|_1$ , dla pewnej stałej  $d$ .
94.  $M, N$  są domkniętymi podprzestrzeniami przestrzeni Banacha  $X$  takimi, że każdy element  $x \in X$  ma jednoznaczne przedstawienie  $x = m+n$ ,  $m \in M, n \in N$ . Pokazać, że istnieje stała  $c$  taka, że  $\|m\| + \|n\| \leq c\|x\|$ , dla każdego  $x \in X$ .
95. Niech  $C_{per}(\mathbb{R})$  oznacza przestrzeń funkcji ciągłych o okresie  $2\pi$ . Pokazać, że każdy ograniczony funkcjonał liniowy na tej przestrzeni ma po-

stać  $\varphi(f) = \int_0^{2\pi} f(x)dg(x)$  dla pewnej funkcji lewostronnie ciągłej funkcji o wahanii ograniczonym na przedziale  $[0, 2\pi]$  oraz  $\|\varphi\| = \text{Var}(g)$ .

96. Operator  $T$  jest określony na  $C(\mathbb{T})$  następująco:

$$Tf = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n \widehat{f}(n) e^{inx},$$

dla pewnego ustalonego ciągu  $a_n$ , gdzie  $\widehat{f}(n) = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$ . Załóżmy, że  $Tf \in C(\mathbb{T})$  dla dowolnej  $f \in C(\mathbb{T})$ . Pokazać, że  $T$  jest ograniczonym operatorem liniowym na  $C(\mathbb{T})$ . **Wskazówka:** Sprawdzić, że  $T$  ma domknięty wykres.

97. Pokazać, jeśli operator  $T$  z przestrzeni unormowanej  $X$  w przestrzeń unormowaną  $Y$  ma domknięty wykres oraz  $T^{-1}$  istnieje, to również  $T^{-1}$  ma domknięty wykres. **Wskazówka:** Znaleźć związek pomiędzy wykresami operatorów  $T$  i  $T^{-1}$ .

98. Niech  $X$  i  $Y$  będą przestrzeniami unormowanymi oraz  $T_1 : X \rightarrow Y$  ma domknięty wykres natomiast  $T_2 : X \rightarrow Y$  jest ograniczony. Pokazać, że  $T_1 + T_2$  ma domknięty wykres.

99. Pokazać, że jądro operatora liniowego  $T : X \rightarrow Y$  o wykresie domkniętym jest domkniętą podprzestrzenią w  $X$ .

\*100. Niech  $T$  będzie ograniczonym różnowartościowym operatorem liniowym z przestrzeni Banacha  $X$  w przestrzeń Banacha  $Y$ . Pokazać, że jeśli obraz  $T(X)$  jest domknięty, to istnieje stała  $\varepsilon > 0$  taka, że dla  $S \in B(X, Y)$  jeśli  $\|T - S\| \leq \varepsilon$ , to  $S$  jest różnowartościowy. Pokazać, że jeśli obraz  $T(X)$  nie jest domknięty, to dla dowolnej liczby  $\varepsilon > 0$  istnieje operator  $S \in B(X, Y)$  taki, że  $\|S - T\| < \varepsilon$  oraz  $S$  nie jest różnowartościowy.

\*101. Niech  $T$  będzie ograniczonym operatorem liniowym z przestrzeni Banacha  $X$  na przestrzeń Banacha  $Y$ . Pokazać, że istnieje stała  $\varepsilon > 0$  taka, że dla  $S \in B(X, Y)$  jeśli  $\|T - S\| \leq \varepsilon$ , to  $S(X) = Y$ . **Wskazówka:** Wyznaczyć  $\varepsilon$  z twierdzenia o odwzorowaniu otwartym. Następnie dla  $y \in Y$  skonstruować  $x$  tak, aby  $Sx = y$  naśladowując dowód twierdzenia o odwzorowaniu otwartym.

102. Niech  $\mathcal{A}$  będzie samosprężoną podalgebrą w  $C(K)$  oraz  $a, b$  dwoma ustalonymi punktami w zwartej przestrzeni Hausdorffa  $K$ . Załóżmy, że  $\mathcal{A}$  nie znika w  $K$  oraz rozdziela dowolne dwa punkty  $x_1$  i  $x_2$  z wyjątkiem  $a$  i  $b$ . Udowodnić, że każdą funkcję  $f \in C(K)$  o własności  $f(a) = f(b)$  można jednostajnie przybliżyć funkcjami z  $\mathcal{A}$ .
103. Pokazać, że dla każdej funkcji  $f \in C_{\mathbb{R}}^1[0, 1]$  istnieje ciąg wielomianów  $p_n(x)$  taki, że

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |p_n(x) - f(x)| + \max_{0 \leq x \leq 1} |p'_n(x) - f'(x)| \xrightarrow{n} 0.$$

104. Czy każda funkcja ciągła z  $C([0, 1] \cup [2, 3])$  jest jednostajną granicą wielomianów?
105. Niech  $\mathcal{A}$  oznacza rodzinę wielomianów  $p(x)$  o własności  $p''(0) = 0$ . Czy każda funkcja ciągła z  $C[1, 2]$  jest jednostajną granicą elementów z  $\mathcal{A}$ ?
106. Czy dla  $\varepsilon > 0$  i funkcji  $f \in C[0, 1]$  można znaleźć wielomian  $p(x)$  taki, że  $\|f - p\|_{\infty} < \varepsilon$  oraz  $p(2) = 5$ ,  $p'(2) = 6$ ?
107. Rozważmy przestrzeń Hilberta  $\mathcal{H} = L^2((0, 1) \times (0, 1))$ . Pokazać, że jeśli funkcja  $h(x, y) \in \mathcal{H}$  spełnia

$$\int_0^1 \int_0^1 h(x, y) f(x) g(y) dx dy = 0, \quad f, g \in L^2(0, 1)$$

to  $h(x, y) = 0$  prawie wszędzie.

108. Funkcja  $f \in C[0, 1]$  spełnia

$$\int_0^1 x^{10n} f(x) dx = 0, \quad n \geq 10.$$

Pokazać, że  $f = 0$ .

109. Pokazać, że dla miary  $\sigma$ -skończonej  $\mu$  na zbiorze  $X$  przestrzenią sprzężoną do  $L^1(X, \mu)$  jest  $L^\infty(X, \mu)$ . Uwaga: W przestrzeni  $L^\infty(X, \mu)$  norma jest określona przez

$$\|f\|_{\infty} = \inf \left\{ \sup_{x \in X \setminus A} |f(x)| : A \subset X, \mu(A) = 0 \right\}.$$



110. Obliczyć normy funkcyjnałów na przestrzeni  $L^p(\mathbb{R}, \mu)$ .

$$(a) \quad \varphi(f) = \int_0^1 f(x) dx, \quad d\mu(x) = dx$$

$$(b) \quad \varphi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-x^2} dx, \quad d\mu(x) = e^{-x^2} dx.$$

$$(c) \quad \varphi(f) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)e^{-n}, \quad \mu = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n.$$

111. Które z funkcyjnałów określonych na wielomianach rozszerzają się do ograniczonych funkcyjnałów na  $C[0, 1]$  ?

$$(a) \quad \varphi(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) = a_0,$$

$$(b) \quad \varphi(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) = a_1,$$

$$(c) \quad \varphi(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) = a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \dots + \frac{1}{n+1}a_n,$$

$$(d) \quad \varphi(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) = a_0 + 2a_1 + 2^2a_2 + \dots + 2^na_n.$$

112.  $\Lambda$  jest ciągłym funkcyjnałem liniowym nad  $\mathbb{R}$  na przestrzeni funkcji  $C[0, 1]$  o wartościach zespolonych.  $\Lambda$  nazywamy samosprzężonym jeśli  $\Lambda(f) = \overline{\Lambda(f)}$ . Pokazać, że  $\Lambda$  jest samosprzężony wtedy i tylko wtedy, gdy  $\Lambda(f)$  przyjmuje wartości rzeczywiste dla rzeczywistych funkcji  $f$ . Pokazać, że każdy funkcyjnał  $\Lambda$  można rozłożyć na sumę  $\Lambda = \Lambda_1 + i\Lambda_2$ , gdzie  $\Lambda_1, \Lambda_2$  są samosprzężone, oraz rozkład ten jest jedyny.

113. Funkcyjnał  $\Lambda$  na rzeczywistej przestrzeni  $C_{\mathbb{R}}(X)$ , gdzie  $X$  jest zwartą przestrzenią topologiczną, nazywamy dodatnim jeśli  $\Lambda(f) \geq 0$ , dla każdej nieujemnej funkcji  $f$ . Pokazać, że  $\|\Lambda\| = \Lambda(\mathbf{1})$ , gdzie  $\mathbf{1}$  oznacza funkcję stale równą 1. **Wskazówka.** Skorzystać z nierówności  $-\|f\|_{\infty}\mathbf{1} \leq f \leq \|f\|_{\infty}\mathbf{1}$ . Pokazać, że jeśli funkcyjnał  $\Lambda$  spełnia  $\|\Lambda\| = \Lambda(\mathbf{1})$ , to  $\Lambda$  jest funkcyjnałem dodatnim. **Wskazówka.** Jeśli  $0 \leq f \leq 1$ , to  $\|2f - 1\| \leq 1$ .

114. Załóżmy, że liczby  $m_n$  mają własność

$$\forall x \in [0, 1] \quad \sum_{k=0}^n a_k x^k \geq 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^n a_k m_k \geq 0,$$

dla dowolnych  $n$  i  $a_k \in \mathbb{R}$ . Pokazać, że istnieje funkcja niemalejąca  $\sigma$  na przedziale  $[0, 1]$  taka, że

$$m_n = \int_0^1 x^n d\sigma(x).$$

**Wskazówka:** Określić funkcjonał  $\varphi$  na wielomianach wzorem

$$\varphi(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) = a_0m_0 + a_1m_1 + \dots + a_nm_n.$$

Z założenia  $\varphi$  jest dodatni. Pokazać, że  $|\varphi(p)| \leq m_0\|p\|_\infty$ , gdzie  $p$  jest wielomianem. Pokazać, że  $\varphi$  rozszerza się jednoznacznie do ograniczonego funkcjonału  $\Phi$  na  $C_{\mathbb{R}}[0, 1]$ . Zauważyć, że  $\Phi$  jest dodatni. Skorzystać z twierdzenia Riesz'a o postaci funkcjonałów na  $C_{\mathbb{R}}[0, 1]$ .

115. Niech  $\sigma$  będzie funkcją niemalejącą na  $[0, 1]$ . Dla  $n \geq 0$  liczby  $m_n = \int_0^1 x^n d\sigma(x)$  nazywamy momentami funkcji  $\sigma$ . Pokazać, że momenty są liczbami nieujemnymi oraz spełniają warunek

$$\Delta^N m_n \geq 0 \quad \text{dla } N \geq 1, n \geq 0,$$

gdzie  $\Delta m_n = m_n - m_{n+1}$  i  $\Delta^N = \Delta(\Delta^{N-1})$ . **Wskazówka:** Obliczyć  $\Delta^N x^n$  i zauważyć, że  $\Delta^N \varphi(x^n) = \varphi(\Delta^N x^n)$ , gdzie  $\varphi$  jest określone jak w zadaniu 15.

- \*116. Ciąg liczb nieujemnych  $m_n$ ,  $n \geq 0$  nazywamy całkowicie monotonicznym jeśli

$$\Delta^N m_n \geq 0 \quad \text{dla } N \geq 1, n \geq 0.$$

Pokazać, że istnieje funkcja niemalejąca  $\sigma$  na  $[0, 1]$  taka, że  $m_n = \int_0^1 x^n d\sigma(x)$ . **Wskazówka:** Pokazać, że funkcjonał  $\varphi$  określony na wielomianach wzorem

$$\varphi(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) = a_0m_0 + a_1m_1 + \dots + a_nm_n$$

jest dodatni. W tym celu udowodnić, że jeśli  $p$  jest wielomianem nieujemnym stopnia  $N$ , to wielomiany Bernsteina  $B_n(p)$  są wielomianami stopnia  $N$  dla  $n \geq N$ . Ponadto z założenia  $\varphi(B_n(p)) \geq 0$  oraz  $\varphi(p) = \lim_n B_n(p)$ .

## Literatura

- [1] N. I. Akhiezer, I. M. Glazman, Teoriia lineinykh operatorov v gilbertovom prostranstve I, Kharkov, Vyscha shkola, 1977-78 (ros.); Theory of Linear Operators in Hilbert Space, New York, Dover, 1993 (ang.).

- [2] J. Chmieliński, Analiza funkcjonalna Notatki do wykładu, Wydawnictwo: Wydawnictwo Naukowe Akademii Pedagogicznej 2004.
- [3] N. Dunford, J. T. Schwartz, Linear Operators, Part 1: General Theory (Vol 1) , New York, Wiley, 1958.
- [4] A. Friedman, Foundations of Modern Analysis, Dover Publications Inc. 1982.
- [5] J. Górnjak, T. Pytlik, Analiza funkcjonalna w zadaniach, Wyd. Pol. Wr., 1992.
- [6] E. Kreyszig, Introductory Functional Analysis with Applications, New York, Wiley 1989.
- [7] S. Prus, A. Stachura, Analiza funkcjonalna w zadaniach, Wydawnictwo Naukowe PWN Warszawa, 2007.
- [8] M. Reed, B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics: Functional Analysis, New York, Academic Press 1972
- [9] H. Royden, Real Analysis, MacMillan Publishing Co., 1968.
- [10] W. Rudin, Analiza funkcjonalna, PWN Wydawnictwo Naukowe 2001.
- [11] J. Rusinek: Zadania z analizy funkcjonalnej z rozwiązaniami, Wydawnictwo Uniwersytetu Kardynała Stefana Wyszyńskiego 2006.