

Analiza funkcjonalna I

Ryszard Szwarc*

Spis treści

1	Przestrzenie unormowane	2
1.1	Dodatek	12
2	Operatory liniowe	14
3	Przestrzenie Hilberta	26
3.1	Podstawowe własności	26
3.2	Proces ortogonalizacji Grama-Schmidta	33
4	Przestrzenie sprzężone	37
5	Twierdzenia Hahna-Banacha	40
5.1	Przedłużanie funkcjonałów liniowych	40
5.2	Granica Banacha	46
5.3	Przestrzeń sprzężona do	47
5.4	Wersja geometryczna	50
5.5	Wersja niezmiennicza	55
6	Twierdzenie Baire'a i zastosowania	61
6.1	Twierdzenie Baire'a	61
6.2	Twierdzenie Banacha-Steinhaus	62
6.3	Twierdzenia Banacha	67
7	Twierdzenie Stone'a-Weierstrassa	73

*Wykład prowadzony w semestrze zimowym 2007. Opracowany na podstawie notatek Magdaleny Świczewskiej

8	Przestrzenie sprzężone do L^p i do $C(X)$	81
8.1	Wersja rzeczywista	82
8.2	Wersja zespolona	89
8.3	Twierdzenie Riesz	90
9	Słaba zbieżność w przestrzeniach unormowanych	91
9.1	Słaba zbieżność ciągów	91
9.2	Słabe topologie	96
10	Twierdzenie Arzeli-Ascoliego	100
11	Odwzorowania zwężające i zastosowania	104
11.1	Twierdzenie o funkcji odwrotnej	105
12	Zadania	107

1 Przestrzenie unormowane

Definicja 1.1. Niech X będzie przestrzenią liniową nad \mathbb{C} (lub \mathbb{R}). Normą określoną na X nazywamy funkcję $X \ni x \mapsto \|x\| \in [0, \infty)$ spełniającą warunki

- (i) $\|x\| = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$.
- (ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, dla $\lambda \in \mathbb{C}$ oraz $x \in X$. (**jednorodność**)
- (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, dla $x, y \in X$. (**warunek trójkąta**)

Uwaga 1.2. Z nierówności trójkąta wynika, że

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

Określmy funkcję $d(x, y) = \|x - y\|$ dla $x, y \in X$. Wtedy $d(x, y)$ jest metryką i X staje się przestrzenią metryczną.

Przykłady.

- $X = \mathbb{C}^n$ (lub \mathbb{R}^n). Dla $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ możemy określić normy

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|,$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

2. $X = C[0, 1]$ (funkcje ciągłe o wartościach zespolonych). Określamy tzw. normę jednostajną

$$\|f\|_\infty = \max_{0 \leq t \leq 1} |f(t)|.$$

Ta przestrzeń ma nieskończony wymiar, bo jednomiany $1, x, x^2, x^3, \dots$ tworzą nieskończony układ liniowo niezależny. Jednakże układ ten nie jest bazą algebraiczną przestrzeni liniowej X . Możemy rozważać też inną normę:

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt.$$

3. $X = \ell^\infty = \{x = (x_n)_{n=1}^\infty : \sup_n |x_n| < \infty\}$.

$$\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|.$$

Zauważmy, że $|x_n| \leq \|x\|_\infty$.

Definicja 1.3. Przestrzeń metryczną nazywamy **zupelną**, jeśli każdy ciąg elementów tej przestrzeni spełniający warunek Cauchy'ego jest zbieżny.

Definicja 1.4. Przestrzeń unormowaną zupelną w metryce $d(x, y) = \|x - y\|$ nazywamy **przestrzenią Banacha**.

Przykład. Przestrzenie \mathbb{R} i \mathbb{C} są przestrzeniami Banacha.

Przykład. ℓ^∞ jest przestrzenią Banacha. W tym celu trzeba pokazać, że każdy ciąg Cauchy'ego $x^{(k)}$ w ℓ^∞ jest zbieżny do pewnego elementu x z ℓ^∞ . Ustalmy wskaźnik n . Wtedy

$$|x_n^{(k)} - x_n^{(l)}| \leq \sup_{m \in \mathbb{N}} |x_m^{(k)} - x_m^{(l)}| \leq \|x^{(k)} - x^{(l)}\|_\infty.$$

Zatem dla dowolnej liczby ε ciąg liczbowy $(x_n^{(k)})_{k=1}^\infty$ spełnia warunek Cauchy'ego. Zatem ten ciąg ma granicę $\lim_k x_n^{(k)} = x_n$. Otrzymujemy w ten sposób ciąg $x = (x_n)_{n=1}^\infty$. Pokażemy, że $x \in \ell^\infty$ oraz $\|x^{(k)} - x\|_\infty \xrightarrow{k} 0$. Ustalmy więc liczbę dodatnią ε . Z warunku Cauchy'ego istnieje wskaźnik k_0 taki, że dla $k, l \geq k_0$ mamy

$$|x_n^{(k)} - x_n^{(l)}| \leq \|x^{(k)} - x^{(l)}\|_\infty < \varepsilon.$$

Przechodząc do granicy po lewej stronie, gdy $l \rightarrow \infty$ otrzymamy

$$|x_n^{(k)} - x_n| \leq \varepsilon, \quad n = 1, 2, \dots$$

Zatem $x^{(k)} - x \in \ell^\infty$ oraz

$$\|x^{(k)} - x\| \leq \varepsilon \quad k \geq k_0. \quad (1.1)$$

Otrzymujemy, że x leży w ℓ^∞ jako suma dwu elementów z ℓ^∞

$$x = -(x^{(k_0)} - x) + x^{(k_0)}.$$

Ponadto (??) oznacza, że $x^{(k)}$ zbiega do x w ℓ^∞ .

Definicja 1.5. Mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ elementów z przestrzeni unormowanej X jest zbieżny, jeśli szereg sum częściowych

$$s_n = \sum_{k=1}^n x_k$$

jest zbieżny.

Mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ jest bezwzględnie zbieżny, jeśli zbieżny jest szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$.

Twierdzenie 1.6. Przestrzeń liniowa unormowana jest zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy każdy szereg bezwzględnie zbieżny jest zbieżny.

Dowód. (\Rightarrow) Załóżmy, że $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$. Dla $n > m$ mamy

$$\|s_n - s_m\| = \left\| \sum_{j=m+1}^n x_j \right\| \leq \sum_{j=m+1}^n \|x_j\| \leq \sum_{j=m+1}^{\infty} \|x_j\|.$$

Stąd wynika, że ciąg s_n spełnia warunek Cauchy'ego, zatem jest zbieżny.

(\Leftarrow) Niech x_n będzie ciągiem Cauchy'ego w X . Dla $\varepsilon = 2^{-k}$ istnieje liczba naturalna n_k taka, że dla $n, m > n_k$ mamy $\|x_n - x_m\| < 2^{-k}$. Można założyć, że $n_{k+1} > n_k$. Zatem

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < 2^{-k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Przyjmijmy $y_0 = x_{n_1}$ oraz $y_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$ dla $k \geq 1$. Wtedy szereg $\sum y_k$ jest bezwzględnie zbieżny. Zatem szereg ten jest zbieżny. Obliczamy sumy częściowe tego szeregu i otrzymujemy

$$\sum_{l=0}^{k-1} y_l = x_{n_k}.$$

Zatem podciąg x_{n_k} jest zbieżny. Oznaczmy $x = \lim_k x_{n_k}$. Pokażemy, że $x = \lim_n x_n$. Ustalmy liczbę $\varepsilon > 0$. Z warunku Cauchy'ego istnieje liczba k_0 taka, że

$$\|x_n - x_m\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad n, m \geq k_0.$$

Istnieje też liczba l_0 , dla której

$$\|x_{n_l} - x\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad l \geq l_0.$$

Niech $n \geq \max(k_0, l_0) = m_0$. Wtedy $n \geq k_0$ oraz $n_{m_0} \geq m_0 \geq k_0$. Zatem

$$\|x_n - x\| \leq \|x_n - x_{n_{m_0}}\| + \|x_{n_{m_0}} - x\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

□

Przykład. Rozważamy przestrzeń liniową

$$L^1_{\mathbb{R}}(0, 1) = \left\{ f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ mierzalna, } \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx < \infty \right\}.$$

Przyjmujemy, że dwie funkcje f i g są równe jeśli $f(x) = g(x)$ prawie wszędzie dla x z przedziału $(0, 1)$ względem miary Lebesgue'a. Pokażemy zupełność przestrzeni w normie $\|\cdot\|_1$. Wystarczy sprawdzić, że każdy szereg bezwzględnie zbieżny jest zbieżny. Niech $\sum \|f_n\|_1 < \infty$. Określmy funkcję

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|.$$

Jeśli szereg jest rozbieżny, przyjmujemy wartość ∞ . Funkcja g jest mierzalna i nieujemna jako granica punktowa sum częściowych funkcji mierzalnych i nieujemnych. Na podstawie twierdzenia Beppo-Leviego mamy

$$\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 |f_n(x)| dx = \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n(x)\|_1 < \infty$$

Zatem $g(x) < \infty$ prawie wszędzie, czyli szereg $\sum f_n(x)$ jest bezwzględnie zbieżny prawie wszędzie. To pozwala określić

$$h(x) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), & \text{jeśli szereg jest zbieżny;} \\ 0, & \text{jeśli szereg jest rozbieżny.} \end{cases}$$

Pokażemy, że $h \in L_{\mathbb{R}}^1(0, 1)$ oraz $\sum f_n = h$ w normie przestrzeni $L_{\mathbb{R}}^1(0, 1)$. Mamy

$$\int_0^1 |h(x)| dx = \int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right| dx \leq \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| dx = \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_1 < \infty.$$

Dalej

$$\begin{aligned} \left\| h - \sum_{k=1}^n f_k \right\|_1 &= \int_0^1 \left| h(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) \right| dx = \int_0^1 \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| dx \\ &\leq \int_0^1 \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| dx = \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k(x)\| \xrightarrow{n} 0. \end{aligned}$$

Tak samo dowodzi się, że przestrzeń $L_{\mathbb{R}}^1(X, \mu)$ jest zupełna dla przestrzeni X z miarą μ .

W przestrzeniach \mathbb{C}^n (lub \mathbb{R}^n oraz np. $C[0, 1]$) można określić wiele norm.

Definicja 1.7. Dwie normy $\|\cdot\|_1$ oraz $\|\cdot\|_2$ określone na przestrzeni liniowej X nazywamy **równoważnymi** jeśli te normy są porównywalne, tzn. istnieją liczby dodatnie c_1 i c_2 spełniające

$$c_2 \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq c_1 \|x\|_2$$

dla wszystkich x z X .

Uwaga 1.8. Równoważność norm oznacza zatem, że iloraz norm dla niezerowych elementów jest ograniczony od góry i od dołu przez liczbę dodatnią. Jeśli normy $\|\cdot\|_1$ oraz $\|\cdot\|_2$ są równoważne, to zbieżność ciągu x_n względem normy $\|\cdot\|_1$ jest równoważna zbieżności tego ciągu w normie $\|\cdot\|_2$. Rzeczywiście, wynika to z nierówności

$$c_2 \|x_n - x\|_2 \leq \|x_n - x\|_1 \leq c_1 \|x_n - x\|_2.$$

Implikacja odwrotna też jest prawdziwa, tzn. jeśli zbieżność ciągów w dwu normach jest równoważna, to normy te muszą być równoważne (por. Zadanie).

Przykład. Rozważmy $C[0, 1]$ i dwie normy

$$\|f\|_\infty = \max_{0 \leq t \leq 1} |f(t)|, \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt.$$

Mamy

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt \leq \int_0^1 \|f\|_\infty dt = \|f\|_\infty.$$

Niech $f_n(x) = x^n$. Wtedy

$$\|f_n\|_\infty = 1, \quad \|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1}.$$

Stąd normy te nie są równoważne, bo iloraz norm nie jest ograniczony.

Twierdzenie 1.9. W przestrzeni \mathbb{C}^n (lub \mathbb{R}^n) wszystkie normy są równoważne.

Dowód. Pokażemy, że dowolna norma $\|\cdot\|$ jest równoważna z normą $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$. Niech e_1, e_2, \dots, e_n oznacza elementy standardowej bazy w \mathbb{C}^n . Tzn. ciąg e_i składa się z $(n-1)$ zer i jedynki umieszczonej na i -tej pozycji. Wtedy

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\| \leq \left(\sum_{i=1}^n \|e_i\| \right) \|x\|_\infty$$

Przyjmując $c_1 = \sum_{i=1}^n \|e_i\|$ otrzymujemy $\|x\| \leq c_1 \|x\|_\infty$. Pozostaje udowodnić, że istnieje stała c_2 taka, że

$$c_2 \|x\|_\infty \leq \|x\|, \quad x \in \mathbb{C}^n.$$

Niech $S = \{y \in \mathbb{C}^n \mid \|y\|_\infty = 1\}$. Rozważmy funkcję $\varphi : S \rightarrow (0, \infty)$ określoną wzorem $\varphi(y) = \|y\|$. Zbiór S jest domknięty i ograniczony w \mathbb{C}^n . Z kolei funkcja φ jest ciągła, bo

$$|\varphi(y) - \varphi(y_0)| = \left| \|y\| - \|y_0\| \right| \leq \|y - y_0\| \leq c_1 \|y - y_0\|_\infty.$$

Z twierdzenia Weierstrassa funkcja φ przyjmuje wartość najmniejszą w pewnym punkcie zbioru S . W szczególności ta funkcja jest ograniczona od dołu przez pewną dodatnią stałą c_2 . Czyli $\|y\| \geq c_2$ dla $y \in S$. Niech $x \neq 0 \in \mathbb{C}^n$. Wtedy element $y = x/\|x\|_\infty$ należy do S . Z równości $x = \|x\|_\infty y$ otrzymujemy zatem

$$\|x\| = \|x\|_\infty \|y\| \geq c_2 \|x\|_\infty.$$

□

Uwaga 1.10. Z twierdzenia wynika, że przestrzeń \mathbb{C}^n (i \mathbb{R}^n) jest zupełna niezależnie od wyboru normy, bo ciągi zbieżne w jednej normie są zbieżne w każdej innej normie oraz ciągi Cauchy'ego w jednej normie są ciągami Cauchy'ego w każdej innej normie.

Wniosek 1.11.

(i) *Przestrzeń \mathbb{C}^n (\mathbb{R}^n) jest zupełna w dowolnej normie.*

(ii) *Przestrzeń unormowana skończonego wymiaru jest zawsze zupełna.*

Dowód. (ii) Niech X będzie tą przestrzenią oraz $\dim X = n$. Niech f_1, f_2, \dots, f_n będzie bazą przestrzeni X . Określmy odwzorowanie $\varphi : X \rightarrow \mathbb{C}^n$ wzorem

$$X \ni \sum_{k=1}^n x_k f_k \xrightarrow{\varphi} (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Wtedy φ jest izomorfizmem przestrzeni X i \mathbb{C}^n . Z pierwszej części wniosku wynika, że X jest zupełna. □

Wiadomo, że jeśli podzbiór Y w przestrzeni metrycznej X jest przestrzenią metryczną zupełną, to Y jest domkniętym podzbiorem w X . Stąd natychmiast otrzymujemy

Wniosek 1.12. *Jeśli E jest podprzestrzenią liniową skończonego wymiaru w przestrzeni unormowanej X , to E jest domknięta w X .*

Twierdzenie 1.13 (o najlepszej aproksymacji). *Niech E będzie podprzestrzenią liniową skończonego wymiaru w przestrzeni unormowanej X . Dla każdego elementu x z X istnieje element x_0 taki, że*

$$\|x - x_0\| = \inf_{y \in E} \|x - y\|.$$

Dowód. Oznaczmy $a = \inf_{y \in E} \|x - y\|$. Dla liczby n istnieje element $y_n \in E$ taki, że $\|x - y_n\| < a + \frac{1}{n}$. Wtedy

$$\|y_n\| \leq \|y_n - x\| + \|x\| < a + \|x\| + \frac{1}{n} \leq a + \|x\| + 1.$$

Zatem ciąg y_n jest ograniczony. Z twierdzenia Bolzano-Weierstrassa (bo $\dim E < \infty$) możemy wybrać podciąg y_{n_k} zbieżny np. do x_0 . Ponieważ E jest domknięta, to $x_0 \in E$. Dalej

$$a \leq \|x - x_0\| \leq \|x - y_{n_k}\| + \|y_{n_k} - x_0\| < a + \frac{1}{n_k} + \|y_{n_k} - x_0\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a.$$

Otrzymujemy $\|x - x_0\| = a$ co kończy dowód. \square

Uwaga 1.14. Jeśli norma spełnia

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \implies x = \alpha y \text{ dla } \alpha \in \mathbb{C},$$

to element x_0 z tezy twierdzenia jest jedyny. Istotnie, załóżmy, że istnieją dwa elementy x_0 oraz x_1 spełniające

$$\|x - x_0\| = \|x - x_1\| = a.$$

Wtedy

$$a \leq \left\| x - \frac{x_0 + x_1}{2} \right\| = \left\| \frac{x - x_0}{2} + \frac{x - x_1}{2} \right\| \leq \left\| \frac{x - x_0}{2} \right\| + \left\| \frac{x - x_1}{2} \right\| = a.$$

Zatem

$$\left\| \frac{x - x_0}{2} + \frac{x - x_1}{2} \right\| = \left\| \frac{x - x_0}{2} \right\| + \left\| \frac{x - x_1}{2} \right\|.$$

Wtedy

$$\frac{x - x_0}{2} = \alpha \frac{x - x_1}{2}$$

dla pewnej liczby α . Jeśli $\alpha = 1$, to $x_0 = x_1$. Jeśli zaś $\alpha \neq 1$, to obliczając x otrzymamy, że $x \in E$ i wtedy $x = x_0 = x_1$. Można też zauważyć, że liczba α musi być zawsze nieujemna. Jeśli $\|x\| = \|y\| \neq 0$, oraz $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ to $\alpha = 1$.

Definicja 1.15. Podzbiór przestrzeni metrycznej X nazywamy **gęstym**, jeśli dla dowolnego elementu x z X i dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje element a z A spełniający $d(x, a) < \varepsilon$. Przestrzeń metryczna jest **ośrodkowa**, jeśli posiada przeliczalny podzbiór gęsty.

Uwaga 1.16. Jeśli w przestrzeni metrycznej X znajdziemy nieprzeliczalną rodzinę rozłącznych otwartych kul (tzn. zbiorów postaci $B(x, r) = \{y \in Y \mid d(x, y) < r\}$), to X nie jest ośrodkowa.

Przykład. $X = \mathbb{R}^n$ (lub \mathbb{C}^n).

$$\begin{aligned} A_{\mathbb{R}} &= \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{Q}\} \\ A_{\mathbb{C}} &= \{(z_1, z_2, \dots, z_n) \mid z_i \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}\} \end{aligned}$$

Przykład. Rozważmy $X = C_{\mathbb{R}}[0, 1]$ z normą $\|f\|_{\infty} = \sup_{0 \leq t \leq 1} |f(t)|$. Z twierdzenia Weierstrassa dla dowolnej funkcji f istnieje ciąg wielomianów p_n taki, że $p_n(x)$ zbieżny jednostajnie do $f(x)$. Tzn. $\|p_n - f\|_{\infty} \rightarrow 0$, gdy $n \rightarrow \infty$. Zatem wielomiany \mathcal{P} tworzą gęsty podzbiór w X . Wtedy zbiór

$$\mathcal{P}_0 = \{p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \mid n \in \mathbb{N}, a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Q}\}$$

jest przeliczalnym i gęstym podzbiorem w \mathcal{P} a zatem również w X .

Przykład. Dla przestrzeni

$$\ell^2 = \left\{ (x_n)_{n=1}^{\infty} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty, x_n \in \mathbb{C} \right\}$$

zbiór

$$A = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \mid x_n \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}, x_n = 0 \text{ od pewnego miejsca}\}$$

jest przeliczalnym zbiorem gęstym.

Przykład. Rozważamy przestrzeń

$$\ell_{\mathbb{R}}^{\infty} = \left\{ x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \mid \|x\|_{\infty} = \sup_n |x_n| < \infty, x_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ta przestrzeń nie jest ośrodkowa. Rzeczywiście, dla podzbioru $A \in \mathbb{N}$ określmy

$$x_A(n) = \begin{cases} 1 & n \in A, \\ 0 & n \notin A. \end{cases}$$

Wtedy $\|x_A - x_B\|_{\infty} = 1$ o ile $A \neq B$. Rozważmy kule $B(x_A, \frac{1}{2})$ dla wszystkich $A \subseteq \mathbb{N}$. Te zbiory są rozłączne i jest ich continuum. Zatem $\ell_{\mathbb{R}}^{\infty}$ nie jest ośrodkowa.

Twierdzenie 1.17. *Każdą przestrzeń unormowaną można uzupełnić do przestrzeni Banacha.*

Dowód. Niech X_0 będzie przestrzenią unormowaną. Oznaczmy przez X rodzinę klas równoważności ciągów Cauchy'ego elementów z X_0 . Dwa ciągi Cauchy'ego (x_n) oraz (y_n) są **równoważne**, co zapisujemy $(x_n) \sim (y_n)$, gdy $\|x_n - y_n\| \xrightarrow{n} 0$. Przestrzeń X_0 utożsamiamy z podzbiorem X następująco

$$X_0 \ni x_0 \longmapsto [(x_0, x_0, \dots, x_0, \dots)]_{\sim} \in X,$$

gdzie $[(x_n)]_{\sim}$ oznacza klasę równoważności ciągu. Wiemy z topologii, że X jest przestrzenią metryczną zupełną z metryką

$$d_X([(x_n)]_{\sim}, [(y_n)]_{\sim}) = \lim_n d_{X_0}(x_n, y_n) = \lim_n \|x_n - y_n\|_{X_0}.$$

X jest przestrzenią liniową, bo

- (1) $[(x_n)]_{\sim} + [(y_n)]_{\sim} = [(x_n + y_n)]_{\sim}$.
- (2) $\lambda[(x_n)]_{\sim} = [(\lambda x_n)]_{\sim}$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Sprawdzimy, że definicja dodawania jest prawidłowa, tzn. nie zależy od wyboru reprezentantów w klasie równoważności. Niech $(x_n) \sim (x'_n)$ oraz $(y_n) \sim (y'_n)$. Wtedy $(x_n + y_n) \sim (x'_n + y'_n)$, bo

$$\|(x_n + y_n) - (x'_n + y'_n)\|_{X_0} \leq \|x_n - x'_n\|_{X_0} + \|y_n - y'_n\|_{X_0} \xrightarrow{n} 0.$$

Analogicznie sprawdzamy (2).

Określmy kandydata na normę w X wzorem

$$\|[(x_n)]_{\sim}\|_X = \lim_n \|x_n\|_{X_0}.$$

Definicja jest poprawna, tzn. nie zależy od wyboru reprezentantów, bo jeśli $(x_n) \sim (x'_n)$, to

$$|\|x_n\|_{X_0} - \|x'_n\|_{X_0}| \leq \|x_n - x'_n\|_{X_0} \xrightarrow{n} 0.$$

Zatem

$$\lim_n \|x_n\|_{X_0} = \lim_n \|x'_n\|_{X_0},$$

o ile granica istnieje.

Dla $[(x_n)]_\sim \in X$ mamy

$$| \|x_n\|_{X_0} - \|x_m\|_{X_0} | \leq \|x_n - x_m\|_{X_0}.$$

Zatem liczby $\|x_n\|_{X_0}$ tworzą ciąg Cauchy'ego. Czyli granica $\lim_n \|x_n\|_{X_0}$ istnieje. Pozostaje sprawdzić, że $\| \cdot \|_X$ jest normą oraz, że $\|[(x_0)]_\sim\|_X = \|x_0\|_{X_0}$.

Warunek trójkąta i jednorodność wynikają z własności normy $\| \cdot \|_{X_0}$. Sprawdzamy kiedy $\|[(x_n)]_\sim\|_X = 0$. Otrzymujemy, że $\lim \|x_n\|_{X_0} = 0$, tzn. $(x_n) \sim (0)$. Sprawdzamy jeszcze zgodność z metryką $d_X(\cdot, \cdot)$. Ale

$$d_X([(x_n)]_\sim, [(y_n)]_\sim) = \lim_n \|x_n - y_n\|_{X_0} = \|[(x_n)]_\sim - [(y_n)]_\sim\|_X.$$

□

1.1 Dodatek

Lemat 1.18 (F. Riesz). *Niech Y będzie domkniętą właściwą podprzestrzenią liniową unormowanej przestrzeni liniowej X . Dla dowolnej liczby $0 < \theta < 1$ istnieje element x w X spełniający $\|x\| = 1$ oraz*

$$d(x, Y) := \inf\{\|x - y\| : y \in Y\} \geq \theta.$$

Uwaga 1.19. Lemat mówi, że można znaleźć element x , dla którego iloraz odległości od domkniętej podprzestrzeni Y przez normę $\|x\|$ jest dowolnie bliski liczbie 1.

Dowód. Ustalmy liczbę $0 < \theta < 1$. Niech $x_0 \in X \setminus Y$. Oznaczmy

$$a = d(x_0, Y) = \inf\{\|x_0 - y\| : y \in Y\}.$$

Liczba a jest dodatnia, bo jeśli $a = 0$, to istnieje ciąg $y_n \in Y$ taki, że $\|x_0 - y_n\| \xrightarrow{n} 0$. Czyli $y_n \xrightarrow{n} x_0$. Ponieważ Y jest domknięta, to $x_0 \in Y$, co daje sprzeczność. Z dodatniości liczby a mamy $a < a/\theta$. Zatem istnieje element $y_0 \in Y$ spełniający

$$a \leq \|x_0 - y_0\| \leq \frac{a}{\theta}.$$

Niech

$$x = c(x_0 - y_0), \quad \text{gdzie } c = \frac{1}{\|x_0 - y_0\|}.$$

Wtedy $\|x\| = 1$. Ponadto, dla $y \in Y$ mamy

$$\|x - y\| = \|c(x_0 - y_0) - y\| = c\|x_0 - (y_0 + c^{-1}y)\| \geq ca = \frac{a}{\|x_0 - y_0\|} \geq \theta.$$

Zatem $d(x, Y) \geq \theta$. \square

Twierdzenie 1.20. *Niech X będzie unormowaną przestrzenią liniową nieskończonego wymiaru. Wtedy istnieje ciąg elementów x_n w X spełniający warunki: $\|x_n\| = 1$ oraz $\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}$ dla $n \neq m$.*

Dowód. Z założenia istnieje nieskończony układ liniowo niezależny y_1, y_2, y_3, \dots . Określmy $Y_n = \text{lin}\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$. Podprzestrzenie liniowe Y_n spełniają

$$Y_1 \subsetneq Y_2 \subsetneq \dots \subsetneq Y_n \subsetneq \dots$$

Stosując lemat Riesz dla $Y_{n-1} \subsetneq Y_n$ i $\theta = \frac{1}{2}$ otrzymujemy element $x_n \in Y_n$ o własności $\|x_n\| = 1$ oraz $d(x_n, X_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$. Niech $n > m$. Wtedy $x_m \in X_m \subset X_{n-1}$. Zatem $\|x_n - x_m\| \geq d(x_n, X_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$. \square

Wniosek 1.21. *W nieskończonej wymiarowej liniowej przestrzeni unormowanej X kula jednostkowa $B : \|x \in X : \|x\| \leq 1\}$ nie jest zbiorem zwartym.*

Dowód. Wyrazy ciągu x_n z poprzedniego twierdzenia leżą w kuli B , ale ciąg ten nie zawiera podciągu zbieżnego. \square

Wniosek 1.22. *Założmy, że przestrzeń Banacha X ma nieskończony wymiar. Wtedy baza przestrzeni X jest nieprzeliczalna.*

Dowód. Założmy, że przestrzeń X posiada przeliczalną bazę e_1, e_2, e_3, \dots . Niech $X_n = \text{lin}\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Zatem

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n,$$

bo każdy element x w X należy do pewnej przestrzeni X_n . Na podstawie dowodu poprzedniego twierdzenia istnieją elementy $x_n \in X_n$ takie, że $\|x_n\| = 1$ oraz $d(x_n, X_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$. Wtedy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n}x_n$ jest bezwzględnie zbieżny, zatem jest zbieżny (por. Twierdzenie ??). Oznaczmy

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n}x_n.$$

Element y leży w X_{n_0} dla pewnej liczby n_0 . Zatem

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} 4^{-n}x_n = y - \sum_{n=1}^{n_0} 4^{-n}x_n \in X_{n_0}.$$

Zatem

$$y_0 := \sum_{n=n_0+1}^{\infty} 4^{n_0+1-n}x_n \in X_{n_0}.$$

W konsekwencji otrzymujemy

$$\frac{1}{2} \leq d(x_{n_0+1}, X_{n_0}) \leq \|y_0 - x_{n_0+1}\|$$

$$\left\| \sum_{n=n_0+2}^{\infty} 4^{n_0+1-n}x_n \right\| \leq \sum_{n=n_0+2}^{\infty} 4^{n_0+1-n} = \frac{1}{3}.$$

Otrzymaliśmy sprzeczność. \square

2 Operatory liniowe

Niech $X = \mathbb{C}^n$, $Y = \mathbb{C}^m$ oraz A będzie macierzą wymiaru $m \times n$ o wyrazach zespolonych. Wtedy A możemy traktować jako odwzorowanie z X do Y poprzez wzór

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, \quad \text{gdzie } y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j.$$

Odwzorowanie A spełnia

$$\begin{aligned} A(x + x') &= Ax + Ax' & \text{gdzie } x, x' \in X, \\ A(\lambda x) &= \lambda Ax & \text{gdzie } \lambda \in \mathbb{C}, x \in X. \end{aligned}$$

Definicja 2.1. Operatorem liniowym T z przestrzeni liniowej X w przestrzeń liniową Y nazywamy odwzorowanie $T : X \rightarrow Y$ spełniające:

$$\begin{aligned} T(x + x') &= Tx + Tx' \\ T(\lambda x) &= \lambda Tx. \end{aligned}$$

Załóżmy dodatkowo, że X i Y są przestrzeniami unormowanymi. Operator liniowy $T : X \rightarrow Y$ nazywamy ograniczonym jeśli istnieje stała liczba $C > 0$ taka, że

$$\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X, \quad x \in X.$$

Twierdzenie 2.2. Dla operatora liniowego $T : X \rightarrow Y$, pomiędzy przestrzeniami unormowanymi X i Y następujące warunki są równoważne.

- (a) T jest ciągłym odwzorowaniem w jednym punkcie.
- (b) T jest odwzorowaniem ciągłym w każdym punkcie.
- (c) T jest operatorem ograniczonym.

Dowód. (c) \implies (b)

Niech $x \in X$ oraz $x_n \xrightarrow{n} x$. Wtedy z liniowości mamy

$$\|Tx_n - Tx\| = \|T(x_n - x)\| \leq C\|x_n - x\| \xrightarrow{n} 0.$$

Stąd $Tx_n \xrightarrow{n} Tx$ w normie przestrzeni Y , czyli T jest ciągły w punkcie x .

(b) \implies (a)

To wynika jest oczywiste.

(a) \implies (c)

Pokażemy, że operator T jest ciągły w 0 wiedząc, że jest ciągły w jakimś punkcie x_0 . Niech $x_n \xrightarrow{n} 0$. Wtedy $u_n = x_n + x_0 \xrightarrow{n} x_0$. Z założenia mamy

$$Tx_n + Tx_0 = T(x_n + x_0) = Tu_n \xrightarrow{n} Tx_0.$$

Zatem $Tx_n \xrightarrow{n} 0 = T0$.

Załóżmy nie wprost, że nie istnieje stała spełniająca warunek (c). To oznacza, że dla dowolnej liczby naturalnej n można znaleźć element $x_n \in X$ taki, że

$$\|Tx_n\| > n\|x_n\|.$$

W szczególności $x_n \neq 0$. Określmy

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{x_n}{\|x_n\|}.$$

Wtedy $\|u_n\| = 1/\sqrt{n}$. Zatem $u_n \xrightarrow{n} 0$. Dalej

$$\|Tu_n\| = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\|Tx_n\|}{\|x_n\|} > \frac{1}{\sqrt{n}} n = \sqrt{n} \xrightarrow{n} \infty.$$

To przeczy ciągłości operatora T w punkcie 0. □

Jeśli T jest ograniczonym operatorem liniowym, to dla pewnej stałej C i dla wszystkich $x \neq 0$ mamy

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq C.$$

Zatem

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq C.$$

Definicja 2.3. Liczbę

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

nazywamy **normą** operatora ograniczonego T .

Zauważmy, że dla $x \in X$ mamy

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \|T\|, \quad x \neq 0.$$

Czyli $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$ dla $x \in X$ włącznie z $x = 0$. Zatem $C = \|T\|$ jest najmniejszą liczbą nieujemną, dla której nierówność $\|Tx\| \leq C\|x\|$ jest spełniona.

Twierdzenie 2.4.

$$\|T\| = \sup_{\|u\| \leq 1} \|Tu\|.$$

Dowód. Dla $x \neq 0$ norma elementu $x/\|x\|$ jest równa 1, to

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \left\| T \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \leq \sup_{\|u\| \leq 1} \|Tu\|.$$

Z drugiej strony

$$\sup_{\|u\| \leq 1} \|Tu\| = \sup_{0 < \|u\| \leq 1} \|Tu\| \leq \sup_{0 < \|u\| \leq 1} \frac{\|Tu\|}{\|u\|} \leq \sup_{u \neq 0} \frac{\|Tu\|}{\|u\|} = \|T\|.$$

□

Przykład. Rozważamy $X = \mathbb{C}^n$ i $Y = \mathbb{C}^m$ z normami euklidesowymi. Niech e_1, e_2, \dots, e_n i f_1, f_2, \dots, f_m oznaczają standardowe bazy w przestrzeniach X i Y odpowiednio. Niech T będzie operatorem liniowym z X do Y . Wtedy

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= \left\| T \left(\sum_{j=1}^n x_j e_j \right) \right\| = \left\| \sum_{j=1}^n x_j T e_j \right\| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \|T e_j\| \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^n \|T e_j\|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right)^{1/2} = c \|x\|, \end{aligned}$$

gdzie $c = \left(\sum_{j=1}^n \|T e_j\|^2 \right)^{1/2}$. Zatem

$$\|T\| \leq \left(\sum_{j=1}^n \|T e_j\|^2 \right)^{1/2}.$$

Zapiszmy T w postaci macierzowej, tzn.

$$T e_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i.$$

Wtedy

$$\sum_{j=1}^n \|T e_j\|^2 = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m |a_{ij}|^2,$$

czyli norma $\|T\|$ jest oszacowana z góry przez pierwiastek z sumy kwadratów wartości bezwzględnych wszystkich wyrazów macierzy związanej z T .

Uwaga 2.5. Z przykładu wynika, że każdy operator liniowy określony na przestrzeni skończenie wymiarowej jest ograniczony. Rzeczywiście obraz takiego operatora ma skończony wymiar, więc można go utożsamić z operatorem pomiędzy \mathbb{C}^n i \mathbb{C}^m dla pewnych n i m . Ponieważ normy na tych przestrzeniach są równoważne normie euklidesowej, to operator musi być ograniczony.

Przykład. Rozważamy przestrzeń $C[0, 1]$ z normą $\|f\|_\infty = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$. Niech $k(x, y)$ będzie funkcją ciągłą dwu zmiennych $0 \leq x, y \leq 1$. Określamy odwzorowanie $T : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ wzorem

$$(Tf)(x) = \int_0^1 k(x, y) f(y) dy, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Mamy

$$\begin{aligned} |(Tf)(x)| &\leq \int_0^1 |k(x, y)| |f(y)| dy \leq \|f\|_\infty \int_0^1 |k(x, y)| dy \\ &\leq \|f\|_\infty \sup_{0 \leq x \leq 1} \int_0^1 |k(x, y)| dy. \end{aligned}$$

Zatem dla $c = \sup_{0 \leq x \leq 1} \int_0^1 |k(x, y)| dy$ mamy

$$\|Tf\|_\infty = \sup_{0 \leq x \leq 1} |(Tf)(x)| \leq c \|f\|_\infty.$$

Ostatecznie

$$\|T\| \leq \sup_{0 \leq x \leq 1} \int_0^1 |k(x, y)| dy.$$

Wielkość po prawej stronie jest skończona, bo z twierdzenia Weierstrassa funkcja $k(x, y)$ jest ograniczona.

Założmy, że $k(x, y) \geq 0$. Wtedy dla funkcji stałe równej 1 mamy $\|1\|_\infty = 1$ oraz

$$(T1)(x) = \int_0^1 k(x, y) dy.$$

Zatem

$$\|T1\|_\infty = \sup_{0 \leq x \leq 1} \int_0^1 k(x, y) dy.$$

Stąd wynika, że

$$\|T\| \geq \sup_{0 \leq x \leq 1} \int_0^1 k(x, y) dy.$$

Reasumując otrzymujemy, że

$$\|T\| = \sup_{0 \leq x \leq 1} \int_0^1 k(x, y) dy.$$

Funkcja $k(x, y)$ nie musi być ciągła, aby odpowiadający jej operator T przekształcał $C[0, 1]$ w $C[0, 1]$. Na przykład operatorowi funkcji pierwotnej

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(y) dy$$

odpowiada funkcja

$$k(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq y \leq x, \\ 0, & x < y \leq 1. \end{cases}$$

Ponieważ $k(x, y) \geq 0$, to

$$\|T\| = \sup_{0 \leq x \leq 1} \int_0^1 k(x, y) dy = \sup_{0 \leq x \leq 1} x = 1.$$

Przykład. Niech $X = C^1[0, 1]$ oraz $Y = C[0, 1]$. W obu przestrzeniach wprowadzamy normę $\| \cdot \|_\infty$. Rozważamy operator pochodnej $Tf = f'$. Dla $f_n(x) = x^n$ mamy $\|f_n\|_\infty = 1$, ale $\|Tf_n\|_\infty = \|nx^{n-1}\|_\infty = n$. Zatem operator T nie jest ograniczony.

W przestrzeni $X = C^1[0, 1]$ bardziej naturalne będzie wprowadzenie normy

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

Po tej zmianie operator $Tf = f'$ jest ograniczony, bo

$$\|Tf\|_\infty = \|f'\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = \|f\|.$$

Zatem norma operatora T nie przekracza liczby 1.

Twierdzenie 2.6. Niech X_0 będzie gęstą podprzestrzenią liniową przestrzeni unormowanej X . Załóżmy, że operator liniowy $T_0 : X_0 \rightarrow Y$, gdzie Y jest przestrzenią Banacha, jest ograniczony. Wtedy istnieje rozszerzenie operatora T_0 do operatora T ograniczonego z przestrzeni X w Y .

Uwaga 2.7. Rozszerzenie T jest jednoznaczne.

Przykład. Niech $X_0 = L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, $X = L^2(\mathbb{R})$ oraz $Y = L^2(\mathbb{R})$. W przestrzeniach X i Y wprowadzamy normę

$$\|f\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Wtedy przestrzeń Y jest zupełna (por. dowód zupełności dla $L^1(0, 1)$). Podprzestrzeń $X_0 = L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ jest gęsta w $X = L^2(\mathbb{R})$. Rzeczywiście dla $f \in L^2(\mathbb{R})$ określamy $f_n(x) = f(x)\mathbf{1}_{[-n, n]}(x)$. Wtedy $f_n \in L^2([-n, n]) \subset L^1([-n, n]) \subset L^1(\mathbb{R})$. Rzeczywiście

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x)| dx &= \int_{-n}^n |f(x)| dx \leq \left(\int_{-n}^n |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{-n}^n dx \right)^{1/2} \\ &\leq (2n)^{1/2} \left(\int_{-n}^n |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Ponadto $f_n \xrightarrow[n]{L^2} f$ w $L^2(\mathbb{R})$. Istotnie

$$\|f_n - f\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - f(x)|^2 dx = \int_{|x|>n} |f(x)|^2 dx \xrightarrow[n]{} 0.$$

Z równości Plancherela mamy

$$\|Tf\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\lambda)|^2 d\lambda = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = 2\pi \|f\|_2^2,$$

dla $f \in L^1 \cap L^2$. Zatem $\|Tf\|_2 = \sqrt{2\pi} \|f\|_2$, dla $f \in L^1 \cap L^2$. Z Twierdzenia ?? transformata Fouriera rozszerza się do operatora $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$. Operator \mathcal{F} jest ograniczony i spełnia $\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \sqrt{2\pi} \|f\|_2$.

Powracamy do dowodu Twierdzenia ??.

Dowód. Niech $x \in X$. Z założenia istnieje ciąg elementów x_n z X_0 zbieżny do x . Badamy ciąg T_0x_n .

$$\|T_0x_n - T_0x_m\| = \|T_0(x_n - x_m)\| \leq \|T_0\| \|x_n - x_m\| \xrightarrow[n, m \rightarrow \infty]{} 0.$$

Zatem T_0x_n jest ciągiem Cauchy'ego w Y . Ciąg T_0x_n jest więc zbieżny, np. do elementu y . Określmy operator T wzorem $Tx = y = \lim_n T_0x_n$. Trzeba sprawdzić, że ta definicja jest poprawna, tzn. wynik y nie zależy od wyboru ciągu x_n zbieżnego do x . Załóżmy, że inny ciąg x'_n jest zbieżny do x . Utwórzmy nowy ciąg $x_1, x'_1, x_2, x'_2, \dots$. Ten ciąg jest zbieżny do x . Zatem, podobnie jak dla ciągu x_n , ciąg wartości $Tx_1, Tx'_1, Tx_2, Tx'_2, \dots$ jest zbieżny. Ale podciąg

wyrazów o numerach nieparzystych jest zbieżny do y , zatem również podciąg o numerach parzystych, czyli Tx'_n też jest zbieżny do y .

T jest rozszerzeniem operatora $T - 0$, bo jeśli $x_0 \in X_0$ to możemy przyjąć $x_n \equiv x_0$. Wtedy

$$Tx_0 = \lim_n T_0x_n = T_0x_0.$$

Sprawdzamy liniowość. Niech $x_n \xrightarrow{n} x$ oraz $x'_n \xrightarrow{n} x'$, gdzie $x_n, x'_n \in X_0$. Wtedy $x_n + x'_n \xrightarrow{n} x + x'$. Zatem

$$\begin{aligned} T(x + x') &= \lim_n T_0(x_n + x'_n) = \lim_n (T_0x_n + T_0x'_n) \\ &= \lim_n T_0x_n + \lim_n T_0x'_n = Tx + Tx' \end{aligned}$$

$$T(\lambda x) = \lim_n T_0(\lambda x_n) = \lambda \lim_n T_0(x_n) = \lambda Tx.$$

Sprawdzamy ograniczoność.

$$\|Tx\| = \left\| \lim_n T_0(x_n) \right\| = \lim_n \|T_0x_n\| \leq \|T_0\| \lim_n \|x_n\| = \|T_0\| \|x\|.$$

Otrzymaliśmy $\|T\| \leq \|T_0\|$. Ale oczywiście mamy $\|T\| \geq \|T_0\|$ bo kres górny występujący w określeniu normy oblicza się po większym zbiorze elementów. Reasumując $\|T\| = \|T_0\|$. \square

Uwaga 2.8. Stosowanie Twierdzenia ?? dla przestrzeni skończenie wymiarowych nie ma sensu, bo taka przestrzeń nie posiada właściwych gęstych podprzestrzeni liniowych.

Definicja 2.9. Mówimy, że ograniczony operator liniowy $T : X \rightarrow Y$ pomiędzy unormowanymi przestrzeniami liniowymi jest **odwracalny**, jeśli istnieje ograniczony operator liniowy $S : Y \rightarrow X$ spełniający

$$\begin{aligned} STx &= x, \quad \text{dla } x \in X, \\ TSy &= y, \quad \text{dla } y \in Y. \end{aligned}$$

W szczególności odwzorowanie T musi być różnowartościowe i obraz przez T musi być równy Y .

Uwaga 2.10. Jeśli T jest odwzorowaniem różnowartościowym i "na", to istnieje odwzorowanie odwrotne S . Ponieważ T jest operatorem liniowym, to również S jest operatorem liniowym. W definicji odwracalności dodatkowo żądamy, aby odwzorowanie odwrotne było ograniczone (równoważnie: ciągłe).

Przykład. Niech $X = \mathbb{C}^n$ oraz $Y = \mathbb{C}^m$. Rozważmy operator liniowy $T : X \rightarrow Y$. Odwzorowanie T nie może być odwracalne, gdy $n \neq m$, bo gdy $m < n$, to T nie jest różnowartościowe. Z kolei, gdy $m > n$, to odwzorowanie T nie jest "na".

Jeśli $n = m$, to z kursu algebry liniowej wiemy, że T jest różnowartościowe wtedy i tylko wtedy, gdy to odwzorowanie jest "na", co z kolei jest równoważne warunkowi $\det T \neq 0$.

Przykład. Niech $X = Y = \ell^1$, gdzie ℓ^1 oznacza przestrzeń ciągów $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ bezwzględnie sumowalnych z normą

$$\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|.$$

Rozważamy operator

$$T(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots).$$

Wtedy

$$\|Tx\|_1 = \|x\|_1.$$

Zatem $\|T\| = 1$. Operator T jest różnowartościowy, ale nie jest odwracalny, bo ciąg $(1, 0, 0, \dots)$ nie należy do obrazu operatora T . Rozważmy operator

$$S(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots).$$

Mamy

$$\|Sx\|_1 = \sum_{n=2}^{\infty} |x_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \|x\|_1.$$

Zatem $\|S\| \leq 1$. Tym razem operator S nie jest różnowartościowy, bo

$$S(1, 0, 0, \dots) = (0, 0, \dots) = S(0, 0, \dots).$$

Obraz operatora S jest równy ℓ^1 , bo

$$S(0, x_1, x_2, \dots) = (x_1, x_2, \dots).$$

Fakt 2.11. Załóżmy, że ograniczony operator liniowy $T : X \rightarrow Y$ jest odwzorowaniem $1-1$ i "na". T jest odwracalny wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnej dodatniej liczby c spełniona jest nierówność $\|Tx\| \geq c\|x\|$, dla wszystkich x w X .

Dowód. Oznaczmy symbolem S operator odwrotny do T .

\Rightarrow . Załóżmy, że T jest odwracalny. Wtedy S jest ograniczony, zatem

$$\|x\| = \|STx\| \leq \|S\| \|Tx\|.$$

Stąd

$$\|Tx\| \geq c\|x\|, \quad c = \frac{1}{\|S\|}.$$

\Leftarrow . Załóżmy, że dla $c > 0$ mamy $\|Tx\| \geq c\|x\|$. Wtedy dla $y \in Y$ mamy

$$\|y\| = \|TSy\| \geq c\|Sy\|.$$

Po przekształceniu otrzymujemy

$$\|Sy\| \leq \frac{1}{c}\|y\|.$$

To oznacza, że S jest ograniczony. \square

Przykład. Niech $X = c_0$ oraz $Y = c_0$, gdzie c_0 oznacza przestrzeń wszystkich zbieżnych ciągów, natomiast c_0 oznacza przestrzeń ciągów zbieżnych do zera. W obu przestrzeniach wprowadzamy normę

$$\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|, \quad x = (x_n)_{n=1}^\infty.$$

Dla $x \in X$ niech $x_\infty = \lim_n x_n$. Określmy operator $T : X \rightarrow Y$ wzorem

$$T(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (x_\infty, x_1 - x_\infty, x_2 - x_\infty, \dots, x_n - x_\infty, \dots).$$

Łatwo stwierdzić, że T jest operatorem liniowym z X do Y . Sprawdźmy ograniczoność. Mamy $|x_\infty| \leq \|x\|_\infty$ oraz

$$|x_n - x_\infty| \leq |x_n + |x_\infty|| \leq \|x\|_\infty + \|x\|_\infty = 2\|x\|_\infty.$$

Zatem

$$\|Tx\|_\infty \leq 2\|x\|_\infty,$$

czyli $\|T\| \leq 2$. Określmy operator $S : Y \rightarrow X$ wzorem

$$S(y_0, y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) = (y_1 + y_0, y_2 + y_0, \dots, y_n + y_0, \dots).$$

S jest operatorem liniowym z Y do X oraz

$$\|Sy\|_\infty = \sup_{n \geq 1} |y_n + y_0| \leq 2 \sup_{n \geq 0} |y_n| = 2\|y\|_\infty.$$

Ponadto $STx = x$ oraz $TSy = y$. Zatem T jest operatorem odwracalnym.

Definicja 2.12. Dwie unormowane przestrzenie liniowe X i Y nazywamy **izomorficznymi**, jeśli istnieje ograniczony i odwracalny operator liniowy z X na Y .

Uwaga 2.13. Ostatni przykład pokazuje, że przestrzenie c i c_0 są izomorficzne. Można udowodnić, że te przestrzenie nie są izometryczni izomorficzne, tzn. nie istnieje operator liniowy T z X na Y spełniający $\|Tx\|_\infty = \|x\|_\infty$ dla wszystkich x z X .

Dla dwu unormowanych przestrzeni liniowych X i Y symbolem $B(X, Y)$ będziemy oznaczać zbiór wszystkich ograniczonych operatorów liniowych z X w Y . Dla $T_1, T_2 \in B(X, Y)$ określamy

$$\begin{aligned}(T_1 + T_2)x &= T_1x + T_2x, \\ (\lambda T_1)x &= \lambda(T_1x), \quad , \lambda \in \mathbb{C}.\end{aligned}$$

Wtedy operatory $T_1 + T_2$ oraz λT_1 są liniowe. Sprawdzamy ich ograniczoność.

$$\begin{aligned}\|(T_1 + T_2)x\| &= \|T_1x + T_2x\| \leq \|T_1x\| + \|T_2x\| \\ &\leq \|T_1\| \|x\| + \|T_2\| \|x\| = (\|T_1\| + \|T_2\|) \|x\|.\end{aligned}$$

Zatem $\|T_1 + T_2\| \leq \|T_1\| + \|T_2\|$. Dalej

$$\|(\lambda T_1)x\| = \|\lambda(T_1x)\| = |\lambda| \|T_1x\|.$$

W konsekwencji otrzymujemy

$$\|\lambda T_1\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|(\lambda T_1)x\| = |\lambda| \sup_{\|x\| \leq 1} \|T_1x\| = |\lambda| \|T_1\|.$$

Z obliczeń wynika, że $B(X, Y)$ jest unormowaną przestrzenią liniową z normą operatorową $\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|$.

Przykład. Niech $X = \mathbb{C}^n$ oraz $Y = \mathbb{C}^m$. Wtedy $B(X, Y)$ można utożsamić z macierzami zespolonymi wymiaru $m \times n$. Czyli przestrzeń $B(X, Y)$ jest izomorficzna z \mathbb{C}^{mn} .

Twierdzenie 2.14. Jeśli Y jest przestrzenią Banacha, a X jest unormowaną przestrzenią unormowaną, to $B(X, Y)$ jest przestrzenią Banacha.

Dowód. Trzeba pokazać zupełność przestrzeni $B(X, Y)$. Niech T_n będzie ciągiem Cauchy'ego w $B(X, Y)$, tzn.

$$\|T_n - T_m\| \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0.$$

Dla $x \in X$ mamy

$$\|T_n x - T_m x\| = \|(T_n - T_m)x\| \leq \|T_n - T_m\| \|x\|.$$

Zatem $T_n x$ jest ciągiem Cauchy'ego w Y . Ponieważ Y jest przestrzenią Banacha, to ciąg $T_n x$ jest zbieżny. Oznaczmy

$$Tx = \lim_n T_n x.$$

Wtedy T odwzorowuje X w Y . Odwzorowanie T jest liniowe, bo

$$\begin{aligned} T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) &= \lim_n T_n(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lim_n (\lambda_1 T_n x_1 + \lambda_2 T_n x_2) \\ &= \lambda_1 \lim_n T_n x_1 + \lambda_2 \lim_n T_n x_2 = \lambda_1 T x_1 + \lambda_2 T x_2. \end{aligned}$$

Pozostaje pokazać, że T jest ograniczony oraz, że $\|T_n - T\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Ustalmy liczbę $\varepsilon > 0$. Z założenia istnieje liczba N taka, że dla $n, m \geq N$ mamy $\|T_n - T_m\| < \varepsilon$. Niech $n \geq N$. Wtedy

$$\|(T_n - T)x\| = \|T_n x - Tx\| = \lim_m \|T_n x - T_m x\|.$$

Z drugiej strony jeśli $m \geq N$, to

$$\|T_n x - T_m x\| = \|(T_n - T_m)x\| \leq \|T_n - T_m\| \|x\| \leq \varepsilon \|x\|.$$

Zatem

$$\|(T_n - T)x\| \leq \varepsilon \|x\|, \quad n \geq N. \quad (2.1)$$

czyli

$$\|T_n - T\| \leq \varepsilon$$

dla $n > N$. W szczególności operator $T_N - T$ jest ograniczony. Ponieważ $T = T_N - (T_N - T)$, to również T jest ograniczony. Ponadto z (2.1) otrzymujemy, że $T_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T$ w normie operatorowej. \square

Wniosek 2.15. *Jeśli $Y = \mathbb{C}$ (lub \mathbb{R}), to $B(X, Y)$ jest przestrzenią Banacha.*

3 Przestrzenie Hilberta

3.1 Podstawowe własności

Będziemy rozważać zespolone przestrzenie liniowe X z iloczynem skalarnym $\langle x, y \rangle$. Z kursu algebry liniowej wiemy, że wyrażenie $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ jest normą. Iloczyn skalarny można wyrazić poprzez normę wzorem polaryzacyjnym.

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 \|x + i^k y\|^2 i^k.$$

Spełniona jest nierówność Schwarz'a

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Norma pochodząca od iloczynu skalarnego spełnia równość równoległoboku.

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Przypomnimy wzór

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re} \langle x, y \rangle.$$

Z kursu algebry liniowej wiemy, że

Twierdzenie 3.1 (Jordan, von Neumann). *Norma przestrzeni liniowej pochodzi od iloczynu skalarnego wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek równoległoboku.*

Przykłady.

$$\begin{aligned} (1) \quad X = \mathbb{C}^n & & \langle x, y \rangle &= \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k} \\ (2) \quad X = \ell^2 & & \langle x, y \rangle &= \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k} \\ (3) \quad X = L^2(0, 2\pi) & & \langle f, g \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx \end{aligned}$$

Definicja 3.2. *Przestrzeń zupełną z iloczynem skalarnym nazywamy **przestrzenią Hilberta**.*

Lemat 3.3 (o najlepszej aproksymacji). *Niech M będzie podprzestrzenią domkniętą przestrzeni Hilberta \mathcal{H} . Wtedy dla $x \in \mathcal{H}$ istnieje jedyny element $x_0 \in M$ spełniający warunek*

$$\|x - x_0\| = d(x, M) = \inf_{v \in M} \|x - v\|.$$

Dowód. Niech $d = d(x, M)$. Wtedy istnieje element $v_n \in M$ taki, że

$$d \leq \|x - v_n\| \leq d + \frac{1}{n}.$$

Pokażemy, że ciąg v_n jest zbieżny. Korzystając z równości równoległoboku mamy

$$\begin{aligned} \|v_n - v_m\|^2 &= \|(x - v_m) - (x - v_n)\|^2 \\ &= 2\|x - v_m\|^2 + 2\|x - v_n\|^2 - \|(x - v_m) + (x - v_n)\|^2 \\ &= 2\|x - v_m\|^2 + 2\|x - v_n\|^2 - 4\left\|x - \frac{1}{2}(v_m + v_n)\right\|^2 \\ &\leq 2\left(d + \frac{1}{m}\right)^2 + 2\left(d + \frac{1}{n}\right)^2 - 4d^2 \xrightarrow{n,m} 0. \end{aligned}$$

Zatem v_n jest ciągiem Cauchy'ego. Niech $v_0 = \lim_n v_n$. Wtedy

$$\|x - v_0\| = \lim_n \|x - v_n\| = d.$$

Ponadto $v_0 \in M$, bo M jest domkniętą podprzestrzenią. Z obliczeń wynika, że element v_0 jest jedyny. Istotnie, załóżmy, że również $\tilde{v}_0 \in M$ spełnia $\|x - \tilde{v}_0\| = d$. Rozważmy ciąg v_n postaci $v_0, \tilde{v}_0, v_0, \tilde{v}_0, \dots$. Z obliczeń wynika, że taki ciąg jest zbieżny. Zatem $\tilde{v}_0 = v_0$. \square

Definicja 3.4. *Niech M będzie podzbiorem przestrzeni \mathcal{H} . Określamy **dopełnienie ortogonalne** M^\perp wzorem*

$$M^\perp = \{x \in \mathcal{H} : \langle x, y \rangle = 0, \text{ dla wszystkich } y \in M\}.$$

Z własności iloczynu skalarnego wynika, że zbiór M^\perp jest podprzestrzenią liniową. Co więcej, M^\perp jest domknięty, bo jeśli $x_n \rightarrow x$ oraz $x_n \in M^\perp$, to dla $y \in M$ mamy

$$|\langle x, y \rangle| = |\langle x, y \rangle - \langle x_n, y \rangle| = |\langle x - x_n, y \rangle| \leq \|x - x_n\| \|y\| \xrightarrow{n} 0.$$

Zatem $\langle x, y \rangle = 0$ dla $y \in M$, czyli $x \in M^\perp$.

Twierdzenie 3.5. Niech M będzie domkniętą podprzestrzenią liniową w \mathcal{H} . Wtedy każdy element x w \mathcal{H} ma jednoznaczne przedstawienie w postaci

$$x = x_0 + x_1, \quad \text{gdzie } x_0 \in M, x_1 \in M^\perp.$$

Tzn. $\mathcal{H} = M \oplus M^\perp$.

Dowód. Mamy $M \cap M^\perp = \{0\}$, bo jeśli $x \in M \cap M^\perp$, to $\langle x, x \rangle = 0$, czyli $x = 0$. Stąd wynika jednoznaczność rozkładu. Rzeczywiście jeśli $x_0 + x_1 = x'_0 + x'_1$, dla $x_0, x'_0 \in M$ oraz $x_1, x'_1 \in M^\perp$, to element $x_0 - x'_0 = x'_1 - x_1$ leży w $M \cap M^\perp$. Stąd $x_0 = x'_0$ i $x_1 = x'_1$. Niech $x \in \mathcal{H}$. Z poprzedniego lematu istnieje element $x_0 \in M$ taki, że $d = \|x - x_0\| = d(x, M)$. Niech $x_1 = x - x_0$. Wtedy $x = x_0 + x_1$. Pokażemy, że $x_1 \in M^\perp$. Niech $0 \neq y \in M$. Trzeba udowodnić, że $\langle x, y \rangle = 0$. Wtedy dla $t \in \mathbb{C}$ mamy

$$\begin{aligned} d^2 &\leq \|x - (x_0 + ty)\|^2 = \|(x - x_0) - ty\|^2 \\ &= \|x - x_0\|^2 + |t|^2 \|y\|^2 - 2\operatorname{Re} \langle x - x_0, ty \rangle \\ &= \|x - x_0\|^2 + |t|^2 \|y\|^2 - 2\operatorname{Re} \bar{t} \langle x - x_0, y \rangle \end{aligned}$$

Podstawmy

$$t = \frac{\langle x - x_0, y \rangle}{\|y\|^2}.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} \|x - x_0\|^2 &\leq \|x - x_0\|^2 + \frac{|\langle x - x_0, y \rangle|^2}{\|y\|^4} \|y\|^2 - 2 \frac{|\langle x - x_0, y \rangle|^2}{\|y\|^2} \\ &= \|x - x_0\|^2 - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2} \end{aligned}$$

Zatem $\langle x, y \rangle = 0$. □

Uwaga 3.6. Dla $x \in \mathcal{H}$ element x_0 nazywamy rzutem ortogonalnym na podprzestrzeń M .

W przestrzeni z iloczynem skalarnym elementy x, y nazywamy ortogonalnymi jeśli $\langle x, y \rangle = 0$. Stosujemy wtedy zapis $x \perp y$. Rodzinę elementów o normie jeden i parami ortogonalnych nazywamy układem ortonormalnym. Maksymalny, ze względu na zawieranie, układ ortonormalny nazywamy bazą ortonormalną. Z kursu algebry liniowej wiemy, że

Twierdzenie 3.7. *Każda przestrzeń liniowa z iloczynem skalarnym posiada bazę ortonormalną.*

Uwaga 3.8. Baza ortonormalna nie jest bazą przestrzeni liniowej, tzn. nie jest maksymalnym układem elementów liniowo niezależnych chyba, że przestrzeń ma skończony wymiar.

Lemat 3.9. *Baza ortonormalna w ośrodkowej przestrzeni Hilberta jest przeliczalna.*

Dowód. Niech $\{e_i\}_{i \in I}$ będzie bazą ortonormalną. Wtedy dla $i, j \in I$ takich, że $i \neq j$ mamy

$$\|e_i - e_j\|^2 = \|e_i\|^2 + \|e_j\|^2 = 2.$$

Czyli $\|e_i - e_j\| = \sqrt{2}$. Zatem kule $(B(e_i, \frac{1}{2}))_{i \in I}$ są parami rozłączne. Z ośrodkowości ilość tych kul jest przeliczalna. Tzn. zbiór I jest przeliczalny. \square

Twierdzenie 3.10 (Nierówność Bessela). *Jeśli e_1, e_2, \dots, e_n jest układem ortonormalnym w przestrzeni X , to dla $x \in X$ mamy*

$$\sum_{j=1}^n |\langle x, e_j \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Dowód. Użyjemy prostego faktu, że jeśli elementy x_1, x_2, \dots, x_n są parami ortogonalne, to

$$\|x_1 + x_2 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \dots + \|x_n\|^2.$$

Rozważmy

$$s_n = \sum_{j=1}^n \langle x, e_j \rangle e_j.$$

Wtedy dla $1 \leq k \leq n$ mamy

$$\langle x - s_n, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \langle s_n, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \langle x, e_k \rangle \langle e_k, e_k \rangle = 0.$$

To oznacza, że $x - s_n \perp e_1, e_2, \dots, e_n$. Zatem $x - s_n \perp s_n$. Otrzymujemy zatem

$$\|x\|^2 = \|x - s_n\|^2 + \|s_n\|^2 = \|x - s_n\|^2 + \sum_{j=1}^n |\langle x, e_j \rangle|^2 \geq \sum_{j=1}^n |\langle x, e_j \rangle|^2.$$

\square

Lemat 3.11. *Jeśli $\langle x, y \rangle = \langle x', y \rangle$ dla wszystkich $y \in X$, to $x = x'$.*

Dowód. Z założenia $\langle x - x', y \rangle = 0$ dla $y \in X$. W szczególności dla $y := x - x'$ otrzymujemy $\|x - x'\|^2 = 0$, czyli $x = x'$. \square

Lemat 3.12.

$$\|x\| = \sup_{\|y\| \leq 1} |\langle x, y \rangle|.$$

Dowód. Możemy założyć, że $x \neq 0$. Z nierówności Schwarzera mamy

$$\sup_{\|y\| \leq 1} |\langle x, y \rangle| \leq \|x\|.$$

Niech $y_0 = x/\|x\|$. Wtedy $\|y_0\| = 1$ oraz $\langle x, y_0 \rangle = \|x\|$. Zatem

$$\sup_{\|y\| \leq 1} |\langle x, y \rangle| \geq \|x\|.$$

\square

Twierdzenie 3.13. *Załóżmy, że przestrzeń Hilberta \mathcal{H} posiada przeliczalną bazę ortonormalną $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$. Wtedy dla każdego elementu $x \in \mathcal{H}$ mamy*

$$(i) \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n.$$

$$(ii) \quad \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2.$$

Dowód. Ustalmy liczbę n . Z nierówności Bessela mamy

$$\sum_{n=1}^N |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2,$$

dla dowolnej liczby N . Przechodząc do granicy $N \rightarrow \infty$ otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Zbadamy zbieżność szeregu w (i). W tym celu sprawdzimy warunek Cauchy'ego dla ciągu sum częściowych $s_n = \sum_{j=1}^n \langle x, e_j \rangle e_j$. Niech $n > m$. Wtedy

$$\begin{aligned} \|s_n - s_m\|^2 &= \left\| \sum_{j=m+1}^n \langle x, e_j \rangle e_j \right\|^2 = \sum_{j=m+1}^n |\langle x, e_j \rangle|^2 \\ &\leq \sum_{j=m+1}^{\infty} |\langle x, e_j \rangle|^2 \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Zatem szereg jest zbieżny. Oznaczmy

$$x' = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n.$$

Chcemy pokazać, że $x' = x$. Mamy

$$\begin{aligned} \langle x - x', e_k \rangle &= \langle x, e_k \rangle - \langle x', e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \lim_n \langle s_n, e_k \rangle \\ &= \langle x, e_k \rangle - \langle x, e_k \rangle \langle e_k, e_k \rangle = 0. \end{aligned}$$

Czyli $x - x' \perp e_k$ dla każdego k . Ponieważ $\{e_k\}$ jest maksymalnym układem ortogonalnym, to $x - x' = 0$. To dowodzi (i).

Przechodząc do granicy $n \rightarrow \infty$ we wzorze

$$\|x\|^2 = \|x - s_n\|^2 + \sum_{n=1}^N |\langle x, e_n \rangle|^2$$

i korzystając z $s_n \rightarrow x$ otrzymujemy (ii). \square

Uwaga 3.14. Z dowodu twierdzenia wynika, że warunki (i) i (ii) są równoważne dla pojedynczego elementu x .

Wniosek 3.15. *Przestrzeń Hilberta z przeliczalną bazą ortonormalną jest ośrodkowa.*

Dowód. Każdy element przestrzeni jest granicą sum częściowych s_n , które są kombinacjami liniowymi elementów bazy ortonormalnej. Tzn. skończone kombinacje liniowe elementów bazy e_1, e_2, \dots leżą gęsto w \mathcal{H} . Z kolei każda taka skończona kombinacja liniowa jest granicą kombinacji liniowych ze współczynnikami z przeliczalnego zbioru $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$. Ostatecznie kombinacje liniowe o współczynnikach z $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ leżą gęsto w \mathcal{H} . Takich kombinacji jest tylko przeliczalnie wiele. \square

Twierdzenie 3.16 (Równość Parsewala). *Dla przestrzeni Hilberta z przeliczalną bazą ortonormalną (e_n) mamy*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \overline{\langle y, e_n \rangle}.$$

Dowód. Niech $x_n = \sum_{j=1}^n \langle x, e_j \rangle e_j$ oraz $y_n = \sum_{j=1}^n \langle y, e_j \rangle e_j$. Wiemy, że $x_n \xrightarrow{n} x$ i $y_n \xrightarrow{n} y$. Zatem

$$\langle x, y \rangle = \lim_n \langle x_n, y_n \rangle = \lim_n \sum_{j=1}^n \langle x, e_j \rangle \overline{\langle y, e_j \rangle}$$

□

Wniosek 3.17. *Niech M będzie domkniętą podprzestrzenią przestrzeni Hilberta \mathcal{H} . Załóżmy, że układ $(e_n)_{n=1}^N$, gdzie $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, jest bazą ortonormalną w M . Dla każdego elementu x w \mathcal{H} jego rzut ortogonalny na M wyraża się wzorem*

$$P_M x = \sum_{n=1}^N \langle x, e_n \rangle e_n.$$

Dowód. Z założenia $P_M x$ leży w M . Zatem z Twierdzenia ?? zastosowanego do M oraz z Twierdzenia ?? mamy

$$P_M x = \sum_{n=1}^N \langle P_M x, e_n \rangle e_n = \sum_{n=1}^N \langle x, e_n \rangle e_n.$$

□

Twierdzenie 3.18. *Każda ośrodkowa przestrzeń Hilberta nieskończonego wymiaru jest izometrycznie izomorficzna z ℓ^2 .*

Dowód. Z Lematu ?? przestrzeń \mathcal{H} posiada przeliczalną bazę ortonormalną $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Rozważmy odwzorowanie $U : \mathcal{H} \rightarrow \ell^2$ określone wzorem

$$Ux = \{\langle x, e_n \rangle\}_{n=1}^{\infty}.$$

U jest odwzorowaniem liniowym. Ponadto z Twierdzenia ??(ii) wnosimy, że $\|Ux\|_{\ell^2} = \|x\|$, tzn. U jest izometrią. W szczególności U jest różnowartościowe. Pozostaje sprawdzić, że U jest "na". Niech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$. Wtedy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ jest zbieżny w \mathcal{H} , bo jego sumy częściowe spełniają warunek Cauchy'ego. Oznaczmy $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$. Wtedy $\langle x, e_n \rangle = a_n$. Czyli $Ux = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. □

Przykład. Rozważamy $\mathcal{H} = L^2(0, 2\pi)$. Niech $e_n(t) = e^{int}$, gdzie $n \in \mathbb{Z}$. Wiadomo z kursu szeregów Fouriera, że $\{e_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ jest bazą ortonormalną w \mathcal{H} . Ponadto

$$\langle f, e_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt = \hat{f}(n).$$

Przyporządkowanie

$$f \longmapsto \{\hat{f}(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$$

jest izometrycznym izomorfizmem z \mathcal{H} na ℓ^2 .

3.2 Proces ortogonalizacji Grama-Schmidta

Niech $\{u_n\}_{n=1}^N$ będzie układem liniowo niezależnym w przestrzeni \mathcal{H} . Naszym celem jest skonstruowanie układu ortonormalnego $\{v_n\}_{n=1}^N$ o własności

$$L_n := \text{lin} \{u_1, u_2, \dots, u_n\} = \text{lin} \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

oraz $\langle v_n, u_n \rangle > 0$ dla wszystkich n .

Określamy $v_1 = u_1 / \|u_1\|$. Załóżmy, że elementy v_1, v_2, \dots, v_{n-1} zostały już skonstruowane. Aby określić v_n rozważamy podprzestrzeń $L_{n-1} = \text{lin} \{u_1, u_2, \dots, u_{n-1}\}$. Niech u'_n oznacza rzut ortogonalny elementu u_n na L_{n-1} . Wtedy $u_n \neq u'_n$, bo $u_n \notin L_{n-1}$. Określamy

$$v_n = \frac{u_n - u'_n}{\|u_n - u'_n\|}.$$

Z konstrukcji otrzymujemy $v_n \in L_n$ oraz $v_n \perp L_{n-1}$. Zatem dla $m < n$ mamy $v_m \in L_m \subset L_{n-1}$ oraz $v_n \perp L_{n-1}$. To oznacza, że $v_m \perp v_n$ czyli otrzymaliśmy układ ortonormalny. Dalej

$$\langle v_n, u_n \rangle = \frac{\langle u_n - u'_n, u_n \rangle}{\|u_n - u'_n\|} = \frac{\langle u_n - u'_n, u_n - u'_n \rangle}{\|u_n - u'_n\|} = \|u_n - u'_n\| > 0.$$

Uwaga 3.19. Elementy v_n można określić bezpośrednim wzorem wyznacznikowym, w którym występują iloczyny skalarne $\langle u_j, u_k \rangle$ (por. Zadanie ??).

Funkcjonały liniowe

Definicja 3.20. Przestrzeń $B(\mathcal{H}, \mathbb{C})$ nazywamy przestrzenią ograniczonych funkcjonałów liniowych na przestrzeni Hilberta \mathcal{H} .

Przykład. Dla ustalonego elementu $y \in \mathcal{H}$ określamy $f(x) = \langle x, y \rangle$ dla $x \in \mathcal{H}$. Wtedy

$$|f(x)| = |\langle x, y \rangle| \leq \|y\| \|x\|.$$

Ponadto z Lematu ?? mamy

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)| = \|y\|.$$

Twierdzenie 3.21 (Lemat Riesz). *Dla każdego ograniczonego funkcjonatu liniowego $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ istnieje jedyny element $y \in \mathcal{H}$ spełniający $f(x) = \langle x, y \rangle$ dla wszystkich $x \in \mathcal{H}$.*

Dowód. Zbiór $N = \{x \in \mathcal{H} \mid f(x) = 0\}$ jest domkniętą podprzestrzenią liniową w \mathcal{H} . Jeśli $N = \mathcal{H}$, to możemy przyjąć $y = 0$. Załóżmy, że $N \neq \mathcal{H}$. Zatem z Twierdzenia ?? istnieje element $y_0 \neq 0$ taki, że $y_0 \perp N$. Ponadto $f(y_0) \neq 0$, bo $y_0 \notin N$. Niech $y_1 = y_0/f(y_0)$. Wtedy $f(y_1) = 1$ oraz $y_1 \perp N$. Dla $x \in \mathcal{H}$ mamy

$$x = (x - f(x)y_1) + f(x)y_1. \quad (3.1)$$

Pierwszy składnik rozkładu należy do N a drugi do N^\perp . Mnożąc skalarnie obie strony (??) przez $y_1 \in N^\perp$ otrzymamy

$$\langle x, y_1 \rangle = \langle f(x)y_1, y_1 \rangle = f(x)\|y_1\|^2.$$

Zatem

$$f(x) = \frac{\langle x, y_1 \rangle}{\|y_1\|^2}.$$

Możemy więc określić $y = y_1/\|y_1\|^2$. Jedyność elementu y wynika z Lematu ??.

Wniosek 3.22. *Przestrzeń $B(\mathcal{H}, \mathbb{C})$ można utożsamić z \mathcal{H} . Przyporządkowanie*

$$\mathcal{H} \ni y \longmapsto f_y \in B(\mathcal{H}, \mathbb{C}), \quad \text{gdzie } f_y(x) = \langle x, y \rangle$$

jest antyliniowe, tzn.

$$\begin{aligned} f_{y_1+y_2} &= f_{y_1} + f_{y_2}, \\ f_{\lambda y} &= \bar{\lambda} f_y. \end{aligned}$$

Definicja 3.23. *Formą półtoraliniową F na $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ nazywamy odwzorowanie $F : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ spełniające*

$$(i) \quad F(\lambda x + \mu y, z) = \lambda F(x, z) + \mu F(y, z).$$

$$(ii) \quad F(z, \lambda x + \mu y) = \bar{\lambda} F(z, x) + \bar{\mu} F(z, y).$$

Mówimy, że forma F jest ograniczona, jeśli dla pewnej stałej c mamy

$$|F(x, y)| \leq c \|x\| \|y\|, \quad x, y \in \mathcal{H}.$$

Przykład. Dla $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ każda forma półtoraliniowa ma postać

$$F(x, y) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i \bar{y}_j.$$

Rzeczywiście

$$F(x, y) = F\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{i=1}^n y_i e_i\right) = \sum_{i,j=1}^n F(e_i, e_j) x_i \bar{y}_j,$$

zatem $a_{ij} = F(e_i, e_j)$. Forma $F(x, y)$ jest ograniczona, bo z nierówności Schwarz'a

$$\begin{aligned} |F(x, y)| &= \left| \sum_{i,j=1}^n a_{ij} (x_i \bar{y}_j) \right| \leq \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i,j=1}^n |x_i|^2 |y_j|^2 \right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} \|x\| \|y\|. \end{aligned}$$

Przykład. Niech $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ będzie operatorem ograniczonym. Określmy $F(x, y) = \langle x, Ay \rangle$. Wtedy F jest ograniczoną formą półtoraliniową, bo

$$|F(x, y)| = |\langle x, Ay \rangle| \leq \|x\| \|Ay\| \leq \|A\| \|x\| \|y\|.$$

Twierdzenie 3.24. Każda ograniczona forma półtoraliniowa na \mathcal{H} ma postać

$$F(x, y) = \langle x, Ay \rangle$$

dla pewnego ograniczonego operatora liniowego $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$. Operator A jest jedyny.

Dowód. Ustalmy $y \in \mathcal{H}$ i rozważmy odwzorowanie φ_y

$$\mathcal{H} \ni x \xrightarrow{\varphi_y} F(x, y) \in \mathbb{C}.$$

Wtedy φ_y jest funkcjonałem liniowym. Ponadto

$$|\varphi_y(x)| = |F(x, y)| \leq c\|y\| \|x\|.$$

Zatem φ_y jest ograniczony oraz $\|\varphi_y\| \leq c\|y\|$. Z lematu Riesz'a istnieje jedyny wektor Ay taki, że

$$F(x, y) = \varphi_y(x) = \langle x, Ay \rangle.$$

Pokażemy, że przyporządkowanie $y \mapsto Ay$ jest liniowe. Mamy

$$\begin{aligned} \langle x, A(y_1 + y_2) \rangle &= F(x, y_1 + y_2) = F(x, y_1) + F(x, y_2) \\ &= \langle x, Ay_1 \rangle + \langle x, Ay_2 \rangle = \langle x, Ay_1 + Ay_2 \rangle \end{aligned}$$

Zatem $A(y_1 + y_2) = Ay_1 + Ay_2$. Podobnie pokazujemy, że $A(\lambda y) = \lambda Ay$. Pozostaje sprawdzić ograniczoność operatora A . Mamy

$$\begin{aligned} \|Ay\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle x, Ay \rangle| = \sup_{\|x\| \leq 1} |F(x, y)| \\ &\leq \sup_{\|x\| \leq 1} (c\|x\| \|y\|) = c\|y\| \end{aligned}$$

Zatem $\|A\| \leq c$. □

Wniosek 3.25. Dla ograniczonego operatora liniowego $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ istnieje jedyny operator $A^* : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ spełniający

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle \quad x, y \in \mathcal{H}.$$

Operator A^* nazywamy operatorem sprzężonym do operatora A .

Dowód. Funkcja $F(x, y) = \langle Ax, y \rangle$ jest ograniczoną formą półtoraliniową. Zatem istnieje ograniczony operator liniowy A^* taki, że

$$\langle Ax, y \rangle = F(x, y) = \langle x, A^*y \rangle.$$

□

Uwaga 3.26. Jeśli $\langle A_1x, y \rangle = \langle A_2x, y \rangle$, to $A_1 = A_2$.

Przykład. Niech $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ oraz $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, będzie odwzorowaniem liniowym zadany macierzą (a_{ij}) gdzie $a_{ij} = \langle Ae_j, e_i \rangle$. Wtedy

$$\langle A^*x, y \rangle = \langle x, Ay \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle e_i, Ae_j \rangle x_i \overline{y_j}.$$

Z drugiej strony mamy

$$\langle A^*x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle A^*e_i, e_j \rangle x_i \overline{y_j}.$$

Ponieważ

$$\langle A^*e_i, e_j \rangle = \langle e_i, Ae_j \rangle,$$

to

$$a_{ij}^* = \overline{a_{ji}},$$

czyli $A^* = \overline{A^T}$, gdzie T oznacza transpozycję macierzy.

4 Przestrzenie sprzężone

Definicja 4.1. Przestrzeń $B(X, \mathbb{C})$ (czyli przestrzeń ograniczonych funkcjonalów liniowych, nazywamy **przestrzenią sprzężoną** do przestrzeni unormowanej X i oznaczamy symbolem X^* .

Przykład. Z lematu Rieszego mamy $\mathcal{H}^* = \mathcal{H}$. Istotnie każdy funkcjonal liniowy na \mathcal{H} ma postać $\varphi_y(x) = \langle x, y \rangle$ dla pewnego elementu $y \in \mathcal{H}$. Przyporządkowanie $\mathcal{H} \ni \varphi_y \in \mathcal{H}^*$ spełnia

$$\begin{aligned} \varphi_{y_1+y_2} &= \varphi_{y_1} + \varphi_{y_2}, \\ \varphi_{\lambda y} &= \overline{\lambda} \varphi_y. \end{aligned}$$

Przykład. Niech $X = c_0$ oznacza przestrzeń ciągów zbieżnych do zera z normą supremum wartości bezwzględnej wyrazów. Wykażemy, że $X^* = \ell^1$. Niech Λ oznacza funkcjonal z X^* . Każdy element x z c_0 zapisujemy w postaci

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n,$$

gdzie

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots), e_n = (0, \dots, 0, \frac{1}{n}, 0, \dots).$$

Szereg jest zbieżny, bo ogon szeregu dąży do zera w normie przestrzeni c_0 .
Zatem

$$\Lambda(x) = \Lambda\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(x_n e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \Lambda(e_n).$$

Oznaczmy $\lambda_n = \Lambda(e_n)$. Wtedy

$$\Lambda(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n,$$

tzn. każdy funkcjonal liniowy na c_0 ma postać jak wyżej dla pewnego ciągu $\lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$. Załóżmy, że $\lambda \in \ell^1$. Wtedy dla $x \in c_0$ mamy

$$|\Lambda(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| |x_n| \leq \sup_n |x_n| \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| = \|\lambda\|_1 \|x\|_{\infty}.$$

Zatem $\Lambda \in X^*$ oraz $\|\Lambda\| \leq \|\lambda\|_1$.

Odwrotnie, załóżmy, że $\Lambda \in X^*$. Chcemy pokazać, że ciąg $\lambda_n = \Lambda(e_n)$ leży w ℓ^1 . Dla ustalonej naturalnej liczby N określmy ciąg

$$f_N = (\overline{\operatorname{sgn}(\lambda_1)}, \overline{\operatorname{sgn}(\lambda_2)}, \dots, \overline{\operatorname{sgn}(\lambda_N)}, 0, 0, \dots) \in c_0.$$

Ponieważ $\|f_N\|_{\infty} \leq 1$, to

$$\sum_{n=1}^N |\lambda_n| = |\Lambda(f_N)| \leq \|\Lambda\| \|f_N\|_{\infty} \leq \|\Lambda\|.$$

Przechodząc do granicy z N otrzymujemy

$$\|\lambda\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \leq \|\Lambda\|.$$

Z wcześniejszego rozumowania wynika równość $\|\Lambda\| = \|\lambda\|_1$.

Przykład. Można udowodnić, że dla $1 < p < \infty$ mamy $(\ell^p)^* = \ell^q$, gdzie $q = p/(p-1)$ oraz $(\ell^1)^* = \ell^{\infty}$. Przeprowadzimy szkic dowodu dla $1 < p < \infty$. Ponieważ dla $x \in \ell^p$ szereg $x = \sum x_n e_n$ jest zbieżny w ℓ^p , to dla funkcjonału $\Lambda \in (\ell^p)^*$ mamy

$$\Lambda(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(e_n) x_n.$$

Założmy, że ciąg $\lambda_n = \Lambda(e_n)$ leży w ℓ^q . Wtedy z nierówności Höldera mamy

$$\begin{aligned} \|\Lambda(x)\| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| |x_n| \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^q \right)^{1/q} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} = \|\lambda\|_q \|x\|_p. \end{aligned}$$

Zatem $\|\Lambda\| \leq \|\lambda\|_q$.

Odwrotnie, założmy, że $\Lambda \in (\ell^p)^*$. Pokażemy, że $\lambda \in \ell^q$ oraz $\|\lambda\|_q \leq \|\Lambda\|$. W tym celu rozważmy ciąg

$$f_N = (\overline{\operatorname{sgn}(\lambda_1)} |\lambda_1|^{q-1}, \overline{\operatorname{sgn}(\lambda_2)} |\lambda_2|^{q-1}, \dots, \overline{\operatorname{sgn}(\lambda_N)} |\lambda_N|^{q-1}, 0, 0, \dots) \in \ell^p.$$

Mamy

$$\Lambda(f_N) = \Lambda \left(\sum_{n=1}^N \overline{\operatorname{sgn}(\lambda_n)} |\lambda_n|^{q-1} e_n \right) = \sum_{n=1}^N \overline{\operatorname{sgn}(\lambda_n)} |\lambda_n|^{q-1} \Lambda(e_n) = \sum_{n=1}^N |\lambda_n|^q. \quad (4.1)$$

Dalej obliczamy

$$\|f_N\|_p^p = \sum_{n=1}^N |\lambda_n|^{(q-1)p} = \sum_{n=1}^N |\lambda_n|^q. \quad (4.2)$$

Z ograniczoności funkcjonału Λ mamy

$$\|\Lambda(f_N)\| \leq \|\Lambda\| \|f_N\|_p.$$

Na podstawie (??) i (??) otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^N |\lambda_n|^q \leq \|\Lambda\| \left(\sum_{n=1}^N |\lambda_n|^q \right)^{1/p}.$$

Po przekształceniu mamy

$$\left(\sum_{n=1}^N |\lambda_n|^q \right)^{1/q} \leq \|\Lambda\|.$$

Ostatecznie $\|\lambda\|_q \leq \|\Lambda\|$.

5 Twierdzenia Hahna-Banacha

5.1 Przedłużanie funkcjonałów liniowych

Założmy, że Y jest podprzestrzenią liniową przestrzeni liniowej X . Na podprzestrzeni Y mamy określony funkcjonał liniowy λ . Naszym celem jest przedłużenie go do funkcjonału liniowego Λ określonego na przestrzeni X . Będziemy chcieli zachować pewne własności funkcjonału λ .

Definicja 5.1. Funkcję $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy **wypukłą**, jeśli

$$p(\alpha x + \beta y) \leq \alpha p(x) + \beta p(y) \quad \text{dla } x, y \in X, \alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1.$$

Przykład. Jeśli X jest unormowaną przestrzenią liniową, to $p(x) = \|x\|$ jest funkcją wypukłą.

Twierdzenie 5.2 (Hahn-Banach). *Niech X będzie rzeczywistą przestrzenią liniową oraz $p(x)$ będzie funkcją wypukłą na X . Założmy, że λ jest rzeczywistym funkcjonałem liniowym określonym na podprzestrzeni liniowej $Y \subset X$, spełniającym*

$$\lambda(y) \leq p(y), \quad y \in Y.$$

Wtedy istnieje funkcjonał liniowy Λ określony na X i spełniający

$$\begin{aligned} \Lambda(y) &= \lambda(y), & y \in Y, \\ \Lambda(x) &\leq p(x), & x \in X. \end{aligned}$$

Dowód. Założmy, że $Y \subsetneq X$. Wybierzmy $x_0 \in X \setminus Y$. Wtedy $x_0 \neq 0$. Określmy przestrzeń

$$X_0 = \text{lin}\{x_0, Y\} = \{\alpha x_0 + y : y \in Y, \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Każdy element z X_0 ma jednoznaczny zapis w postaci $\alpha x_0 + y$. Rzeczywiście, jeśli $\alpha x_0 + y = \alpha' x_0 + y'$, to

$$(\alpha - \alpha')x_0 = y' - y \in Y.$$

Ponieważ $x_0 \notin Y$, to $\alpha = \alpha'$ i wtedy $y = y'$.

Niech $\tilde{\lambda}$ oznacza rozszerzenie funkcjonału λ na X_0 . Funkcjonał $\tilde{\lambda}$ jest wyznaczony przez liczbę $\tilde{\lambda}(x_0)$, bo

$$\tilde{\lambda}(\alpha x_0 + y) = \alpha \tilde{\lambda}(x_0) + \tilde{\lambda}(y) = \alpha \tilde{\lambda}(x_0) + \lambda(y).$$

Chcemy dobrać wartość $\tilde{\lambda}(x_0)$ tak, aby spełniony był warunek

$$\tilde{\lambda}(\alpha x_0 + y) \leq p(\alpha x_0 + y), \quad \alpha \in \mathbb{R}, y \in Y.$$

Czyli chcemy, aby

$$\alpha \tilde{\lambda}(x_0) + \lambda(y) \leq p(\alpha x_0 + y).$$

Dla $\alpha = 0$ warunek jest spełniony z założenia. Rozważmy $\alpha \neq 0$. Dla $\alpha > 0$ musi zachodzić

$$\tilde{\lambda}(x_0) \leq \frac{1}{\alpha} [p(\alpha x_0 + y) - \lambda(y)].$$

Z kolei dla $\alpha = -\beta$, $\beta > 0$ musi być spełniony warunek

$$\tilde{\lambda}(x_0) \geq \frac{1}{\beta} [\lambda(y) - p(y - \beta x_0)].$$

Obie nierówności muszą być spełnione dla wszystkich $y \in Y$ oraz wszystkich dodatnich liczb α i β zatem liczba $\tilde{\lambda}(x_0)$ musi spełniać warunek

$$\sup_{\beta > 0} \sup_{y \in Y} \frac{1}{\beta} [\lambda(y) - p(y - \beta x_0)] \leq \tilde{\lambda}(x_0) \leq \inf_{\alpha > 0} \inf_{y' \in Y} \frac{1}{\alpha} [p(\alpha x_0 + y') - \lambda(y')]. \quad (5.1)$$

Liczba $\tilde{\lambda}(x_0)$ da się znaleźć tylko wtedy, gdy liczba po lewej stronie (??) jest nie większa niż liczba po prawej stronie. W tym celu wystarczy udowodnić, że dla dowolnych liczb $\alpha, \beta > 0$ oraz dowolnych $y, y' \in Y$ mamy

$$\frac{1}{\beta} [\lambda(y) - p(y - \beta x_0)] \leq \frac{1}{\alpha} [p(\alpha x_0 + y') - \lambda(y')].$$

Mnożąc obie strony przez $\alpha\beta$, odpowiednio przekształcając, i wreszcie dzieląc obie strony przez $\alpha + \beta$ otrzymamy równoważną postać pożądaną nierówności:

$$\lambda \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} y' + \frac{\beta}{\alpha + \beta} y \right) \leq \frac{\alpha}{\alpha + \beta} p(y' - \beta x_0) + \frac{\beta}{\alpha + \beta} p(\alpha x_0 + y). \quad (5.2)$$

Niech $y_1 = y' - \beta x_0$ oraz $y_2 = \alpha x_0 + y$. Wtedy

$$\frac{\alpha}{\alpha + \beta} y_1 + \frac{\beta}{\alpha + \beta} y_2 = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} y' + \frac{\beta}{\alpha + \beta} y.$$

Zatem

$$\begin{aligned} \lambda\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}y' + \frac{\beta}{\alpha+\beta}y\right) &= \lambda\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}y_1 + \frac{\beta}{\alpha+\beta}y_2\right) \\ &\leq p\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}y_1 + \frac{\beta}{\alpha+\beta}y_2\right) \leq \frac{\alpha}{\alpha+\beta}p(y_1) + \frac{\beta}{\alpha+\beta}p(y_2) \\ &= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}p(y' - \beta x_0) + \frac{\beta}{\alpha+\beta}p(\alpha x_0 + y), \end{aligned}$$

co kończy dowód pożądaney nierówności (??).

Uwaga 5.3. Jeśli skrajne liczby w nierówności (??) są równe, to rozszerzenie $\tilde{\lambda}$ jest jednoznaczne. W przeciwnym wypadku rozszerzenie nie jest jednoznaczne.

Niech \mathcal{E} oznacza rodzinę wszystkich rozszerzeń $(\tilde{\lambda}, \tilde{X})$ funkcjonału (λ, Y) spełniających warunek $\tilde{\lambda}(x) \leq p(x)$, $\text{quad } x \in \tilde{X}$, gdzie \tilde{X} jest podprzestrzenią X zawierającą Y . Rodzina takich rozszerzeń jest częściowo uporządkowana:

$$(\tilde{\lambda}_1, \tilde{X}_1) \prec (\tilde{\lambda}_2, \tilde{X}_2)$$

jeśli $\tilde{X}_1 \subset \tilde{X}_2$ oraz $\tilde{\lambda}_2(x) = \tilde{\lambda}_1(x)$ dla $x \in \tilde{X}_1$. Pokażemy, że każdy łańcuch w \mathcal{E} (czyli rodzina liniowo uporządkowana) jest ograniczony. Niech $(\tilde{\lambda}_i, \tilde{X}_i)_{i \in I}$ będzie łańcuchem. Określmy $\tilde{X} = \sum_{i \in I} \tilde{X}_i$. Wtedy \tilde{X} jest przestrzenią liniową. Określamy funkcjonał $\tilde{\lambda}$ na \tilde{X} następująco:

$$\tilde{\lambda}(x) = \tilde{\lambda}_i(x), \quad \text{jeśli } x \in \tilde{X}_i.$$

Definicja jest poprawna, bo jeśli $x \in \tilde{X}_i \cap \tilde{X}_j$, to $\tilde{X}_i \subset \tilde{X}_j$ lub $\tilde{X}_j \subset \tilde{X}_i$. W każdym przypadku $\tilde{\lambda}_i(x) = \tilde{\lambda}_j(x)$. Nietrudno sprawdzić, że $\tilde{\lambda}$ jest funkcjonałem liniowym na \tilde{X} . Ponadto

$$\tilde{\lambda}(x) = \tilde{\lambda}_i(x) \leq p(x), \quad \text{dla } x \in \tilde{X}_i.$$

Z konstrukcji rozszerzenie $(\tilde{\lambda}, \tilde{X})$ jest większe niż $(\tilde{\lambda}_i, \tilde{X}_i)$ dla wszystkich $i \in I$. Zatem z lematu Kuratowskiego-Zorna rodzina \mathcal{E} zawiera element maksymalny $(\tilde{\lambda}, \tilde{X})$. Jeśli $\tilde{X} \subsetneq X$, to z pierwszej części dowodu można rozszerzyć $\tilde{\lambda}$ o jeden wymiar, co przeczyłoby maksymalności rozszerzenia $(\tilde{\lambda}, \tilde{X})$. Zatem $\tilde{X} = X$. \square

Definicja 5.4. Mówimy, że funkcja $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ jest **absolutnie wypukła** jeśli

$$p(\alpha x + \beta y) \leq |\alpha|p(x) + |\beta|p(y)$$

dla $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $|\alpha| + |\beta| = 1$, $x, y \in X$.

Uwaga 5.5. Warunek dotyczy przestrzeni liniowych nad \mathbb{C} i jest mocniejszy od wypukłości. Norma $p(x) = \|x\|$ jest absolutnie wypukła.

Twierdzenie 5.6 (Hahn-Banach). Niech λ będzie funkcjonałem liniowym na podprzestrzeni Y zespolonej przestrzeni liniowej X . Załóżmy, że λ spełnia

$$|\lambda(y)| \leq p(y), \quad y \in Y$$

dla pewnej absolutnie wypukłej funkcji $p : X \rightarrow \mathbb{R}_+$. Wtedy istnieje funkcjonal liniowy $\Lambda : X \rightarrow \mathbb{C}$ spełniający

$$\begin{aligned} \Lambda(y) &= \lambda(y), \quad y \in Y, \\ |\Lambda(x)| &\leq p(x), \quad x \in X. \end{aligned}$$

Dowód. Niech $\ell(y) = \operatorname{Re} \lambda(y)$. Wtedy $\ell(y)$ jest rzeczywistym funkcjonałem liniowym na Y . Ponadto

$$\ell(y) = \operatorname{Re} \lambda(y) \leq |\ell(y)| \leq p(y), \quad y \in Y.$$

Zatem z poprzedniego twierdzenia istnieje funkcjonal rzeczywisty \mathcal{L} określony na X i spełniający

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y) &= \ell(y), \quad y \in Y, \\ \mathcal{L}(x) &\leq p(x), \quad x \in X. \end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$\ell(iy) = \operatorname{Re} \lambda(iy) = \operatorname{Re} [i\lambda(y)] = -\operatorname{Im} \lambda(y).$$

Zatem

$$\lambda(y) = \operatorname{Re} \lambda(y) + i\operatorname{Im} \lambda(y) = \ell(y) - i\ell(iy). \quad (5.3)$$

Określmy

$$\Lambda(x) = \mathcal{L}(x) - i\mathcal{L}(ix), \quad x \in X. \quad (5.4)$$

Wtedy Λ jest funkcjonałem liniowym nad \mathbb{R} określonym na X , bo L jest takim funkcjonałem. Dalej

$$\Lambda(ix) = L(ix) - iL(-x) = L(ix) + iL(x) = i[L(x) - iL(ix)] = i\Lambda(x).$$

Zatem Λ jest funkcjonałem liniowym nad \mathbb{C} . Ze wzorów (??) i (??) i z faktu, że L jest rozszerzeniem ℓ wynika, że

$$\Lambda(y) = \lambda(y), \quad y \in Y.$$

Zapiszmy

$$\Lambda(x) = |\Lambda(x)|e^{i\theta}.$$

Wtedy

$$|\Lambda(x)| = e^{-i\theta}\Lambda(x) = \Lambda(e^{-i\theta}x) = L(e^{-i\theta}x) \leq p(e^{-i\theta}x) = p(x).$$

Ostatnia równość wynika z absolutnej wypukłości funkcji p . Wystarczy przyjąć $\beta = 0$. \square

Wniosek 5.7. *Załóżmy, że Y jest podprzestrzenią liniową przestrzeni unormowanej X , oraz λ jest ograniczonym funkcjonałem liniowym na Y . Wtedy istnieje ograniczony funkcjonał liniowy Λ określony na X i spełniający*

$$\begin{aligned} \Lambda(y) &= \lambda(y), \quad y \in Y, \\ \|\Lambda\|_{X^*} &= \|\lambda\|_{Y^*}. \end{aligned}$$

Dowód. Określmy $p(x) = \|\lambda\|_{Y^*}\|x\|$. Wtedy $p(x)$ jest funkcją absolutnie wypukłą na X . Ponadto

$$|\lambda(y)| \leq \|\lambda\|_{Y^*}\|y\| = p(y), \quad y \in Y.$$

Z poprzedniego twierdzenia istnieje funkcjonał liniowy $\Lambda : X \rightarrow \mathbb{C}$ spełniający

$$\begin{aligned} \Lambda(y) &= \lambda(y), \quad y \in Y, \\ |\Lambda(x)| &\leq p(x) = \|\lambda\|_{Y^*}\|x\|. \end{aligned}$$

Zatem $\|\Lambda\|_{X^*} \leq \|\lambda\|_{Y^*}$. Ale $\|\Lambda\|_{X^*} \geq \|\lambda\|_{Y^*}$, bo Λ jest rozszerzeniem funkcjonału λ . \square

Uwaga 5.8. Jeśli M jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni Hilberta \mathcal{H} i φ jest ograniczonym funkcjonałem liniowym na M , to *varphi* ma postać

$$\varphi(y) = \langle y, v \rangle, \quad y \in M,$$

dla pewnego wektora $v \in M$. Wtedy rozszerzenie Φ na X ma postać

$$\Phi(x) = \langle x, v \rangle.$$

W tym wypadku jest to jedyne rozszerzenie nie podwyższające normy funkcjonału.

Wniosek 5.9. Niech x_0 będzie niezerowym elementem przestrzeni unormowanej X . Wtedy istnieje funkcjonał $\Lambda \in X^*$ taki, że

$$\Lambda(x_0) = \|x_0\|, \quad \|\Lambda\|_{X^*} = 1.$$

Dowód. Rozważmy prostą, czyli podprzestrzeń jednowymiarową, $Y = \mathbb{C}x_0$. Określmy funkcjonał $\lambda : Y \rightarrow \mathbb{C}$ wzorem

$$\lambda(\alpha x_0) = \alpha \|x_0\|.$$

Zatem $|\lambda(\alpha x_0)| = \|\alpha x_0\|$. To oznacza, że $\|\lambda\|_{Y^*} = 1$. Z poprzedniego wniosku istnieje funkcjonał $\Lambda : X \rightarrow \mathbb{C}$ spełniający $\|\Lambda\|_{X^*} = \|\lambda\|_{Y^*} = 1$ oraz $\Lambda(x_0) = \lambda(x_0) = \|x_0\|$. \square

Wniosek 5.10. Niech X będzie przestrzenią unormowaną. Wtedy dla $x \in X$ mamy

$$\|x\| = \sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in X^*, \|\varphi\|_{X^*} \leq 1\}.$$

Uwaga 5.11. Wniosek jest uogólnieniem własności przestrzeni z iloczynem skalarnym:

$$\|x\| = \sup\{|\langle x, y \rangle| : \|y\| \leq 1\}.$$

Dowód. Dla $\|\varphi\|_{X^*} \leq 1$ mamy

$$|\varphi(x)| \leq \|\varphi\|_{X^*} \|x\| \leq \|x\|.$$

Stąd

$$\sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in X^*, \|\varphi\|_{X^*} \leq 1\} \leq \|x\|.$$

Dla $x \in X$ istnieje funkcjonał φ_0 taki, że $\|\varphi_0\|_{X^*} = 1$ oraz $\varphi_0(x) = \|x\|$. Zatem

$$\sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in X^*, \|\varphi\|_{X^*} \leq 1\} \geq \varphi_0(x) = \|x\|.$$

\square

Wniosek 5.12. Niech Y będzie podprzestrzenią liniową przestrzeni unormowanej X oraz $x_0 \in X \setminus Y$. Istnieje funkcjonal $\Lambda \in X^*$ spełniający

$$\Lambda|_Y = 0, \quad \Lambda(x_0) = d,$$

gdzie $d = d(x_0, Y) = \inf\{\|y - x_0\| : y \in Y\}$, oraz $\|\Lambda\|_{X^*} \leq 1$.

Uwaga 5.13. Dla $Y = \{0\}$ otrzymujemy Wniosek ??

Dowód. Niech $X_0 = \text{lin}\{x_0, Y\} = \{\alpha x_0 + y : \alpha \in \mathbb{C}, y \in Y\}$. Określmy funkcjonal $\lambda : X_0 \rightarrow \mathbb{C}$ wzorem

$$\lambda(\alpha x_0 - y) = \alpha d.$$

Sprawdzamy ograniczoność funkcjonału λ .

$$\sup_{\alpha \neq 0, y} \frac{|\lambda(\alpha x_0 - y)|}{\|\alpha x_0 - y\|} = \sup_{\alpha \neq 0, y} \frac{|\alpha| d}{\|\alpha x_0 - y\|} = \sup_{\alpha \neq 0, y} \frac{d}{\|x_0 - \alpha^{-1}y\|} \leq 1.$$

Zatem $\|\lambda\|_{X_0^*} \leq 1$. Z twierdzenia Hahna-Banacha istnieje funkcjonal $\Lambda \in X^*$ taki, że $\|\Lambda\|_{X^*} \leq 1$ oraz

$$\begin{aligned} \Lambda(y) &= \lambda(y) = 0, & y \in Y, \\ \Lambda(x_0) &= \lambda(x_0) = d. \end{aligned}$$

□

5.2 Granica Banacha

Rozważmy podprzestrzeń $c \subset \ell^\infty$, gdzie złożoną z ciągów zbieżnych. W podprzestrzeni c określamy funkcjonal

$$\lambda(x) = \lim_n x_n, \quad x \in c.$$

Ten funkcjonal jest niezmienniczy na przesunięcia, tzn.

$$\lambda(x) = \Lambda(s(x)), \quad \text{gdzie } s(x)_n = x_{n+1}.$$

Mamy

$$|\lambda(x)| \leq \sup_n \|x_n\| = \|x\|_\infty.$$

Zatem $\|\lambda\|_{c^*} = 1$. Chcemy znaleźć rozszerzenie Λ funkcjonału λ na ℓ^∞ tak, aby funkcjonał Λ był też niezmienniczy na przesunięcia. Niech Y oznacza podprzestrzeń ciągów ograniczonych y takich, że granica

$$\lim_n \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}$$

istnieje. Wiemy, że $c \subset Y$. W przestrzeni Y określamy funkcjonał λ wzorem

$$\lambda(y) = \lim_n \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}, \quad y \in Y.$$

Mamy

$$|\lambda(y)| \leq \sup_n \frac{|y_1 + y_2 + \dots + y_n|}{n} \leq \sup_n \frac{|y_1| + |y_2| + \dots + |y_n|}{n} \leq \sup_n |y_n| = \|y\|_\infty.$$

Z twierdzenia Hahna-Banacha istnieje funkcjonał $\Lambda : X \rightarrow \mathbb{C}$ taki, że $\|\Lambda\|_{(\ell^\infty)^*} = 1$ oraz $\Lambda(x) = \lim_n x_n$ dla $x \in c$, bo $c \subset Y$ oraz $\lambda(x) = \lim_n x_n$ jeśli $x \in c$. Pozostaje wykazać, że $\Lambda(x) = \Lambda(s(x))$. W tym celu zauważmy, że dla dowolnego ciągu $x \in \ell^\infty$ ciąg $y = x - s(x)$ leży w Y oraz $\lambda(x - s(x)) = 0$. Rzeczywiście

$$\frac{1}{n}(y_1 + y_2 + \dots + y_n) = \frac{1}{n}(x_1 - x_{n+1}) \rightarrow 0.$$

Zatem

$$\Lambda(x) = \Lambda(s(x)) + \Lambda(x - s(x)) = \Lambda(s(x)) + \lambda(x - s(x)) = \Lambda(s(x)).$$

5.3 Przestrzeń sprzężona do

Twierdzenie 5.14 (F. Riesz). *Każdy ograniczony funkcjonał liniowy φ na $C[a, b]$ (lub $C_{\mathbb{R}}[a, b]$) ma postać*

$$\varphi(f) = \int_a^b f(x) dw(x)$$

dla pewnej funkcji $w(x)$ o wahanii ograniczonym na $[a, b]$.

Dowód. Rozważmy funkcjonal $\varphi \in C[a, b]^*$. Symbolem $B[a, b]$ oznaczamy przestrzeń wszystkich ograniczonych funkcji określonych na przedziale $[a, b]$ z normą $\|f\|_\infty = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|$. Wtedy $C[a, b] \subset B[a, b]$. Istnieje rozszerzenie Φ funkcjonału ϕ na przestrzeń $B[a, b]$ takie, że $\|\Phi\|_{B^*} = \|\varphi\|_C^*$. Określmy funkcję

$$w(x) = \begin{cases} 0 & x = a, \\ \Phi(\chi_{[a, x]}) & a < x \leq b. \end{cases}$$

Zbadamy wachanie funkcji $w(x)$. W tym celu dzielimy przedział punktami $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Wtedy

$$\sum_{j=1}^n |w(x_j) - w(x_{j-1})| = |\Phi(\chi_{[x_0, x_1]})| + \sum_{j=2}^n |\Phi(\chi_{(x_{j-1}, x_j]})|.$$

Oznaczmy $g_1 = \chi_{[x_0, x_1]}$, $g_j = \chi_{(x_{j-1}, x_j]}$ dla $j \geq 2$, oraz niech $a_j = \overline{\text{sgn } \Phi(g_j)}$. Wtedy

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |w(x_j) - w(x_{j-1})| &= \sum_{j=1}^n |\Phi(g_j)| = \sum_{j=1}^n a_j \Phi(g_j) \\ &= \Phi \left(\sum_{j=1}^n a_j g_j \right) \leq \|\Phi\|_{B^*} \left\| \sum_{j=1}^n a_j g_j \right\|_\infty \leq \|\Phi\|_{B^*} = \|\varphi\|_C^* \end{aligned}$$

Zatem

$$\text{Var}_{[a, b]}(w) \leq \|\varphi\|_C^*.$$

Podzielmy przedział $[a, b]$ punktami $x_k = a + (b - a)k/n$. Dla funkcji $f \in C[a, b]$ określamy ciąg funkcji

$$f_n(x) = \sum_{j=1}^n f(x_j) \chi_{I_j}, \quad I_1 = [x_0, x_1], \quad I_j = (x_{j-1}, x_j], \quad j \geq 2.$$

Wiadomo, że $f_n \xrightarrow[n]{\Rightarrow} f$, tzn. $f_n \xrightarrow[n]{\rightarrow} f$ w normie przestrzeni $B[a, b]$. W związku z tym $\Phi(f_n) \xrightarrow[n]{\rightarrow} \Phi(f) = \varphi(f)$. Ale

$$\Phi(f_n) = \sum_{j=1}^n f(x_j) \Phi(\chi_{I_j}) = \sum_{j=1}^n f(x_j) [w(x_j) - w(x_{j-1})] \xrightarrow[n]{\rightarrow} \int_a^b f(x) dw(x).$$

Zatem

$$\varphi(f) = \int_a^b f(x) dw(x).$$

Ponadto

$$\begin{aligned} |\Phi(f_n)| &= \left| \sum_{j=1}^n f(x_j)[w(x_j) - w(x_{j-1})] \right| \leq \sum_{j=1}^n |f(x_j)| |w(x_j) - w(x_{j-1})| \\ &\leq \|f\|_\infty \sum_{j=1}^n |w(x_j) - w(x_{j-1})| \leq \text{Var}_{[a,b]}(w) \|f\|_\infty \end{aligned}$$

Zatem

$$|\varphi(f)| = |\Phi(f)| = \lim_n |\Phi(f_n)| \leq \text{Var}_{[a,b]}(w) \|f\|_\infty.$$

Stąd $\|\varphi\|_{C^*} \leq \text{Var}_{[a,b]}(w)$, czyli

$$\|\varphi\|_{C^*} = \text{Var}_{[a,b]}(w).$$

□

Uwaga 5.15. Różne funkcje w mogą wyznaczyć ten sam funkcjonal na $C[a, b]$ nawet jak przyjmiemy $w(a) = 0$. Na przykład dla $0 \leq \alpha \leq 1$ niech

$$w_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \alpha, & x = \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Wtedy

$$\int_0^1 f(x) dw_\alpha(x) = f\left(\frac{1}{2}\right).$$

Każda funkcja o wahanii ograniczonym posiada granice jednostronne w każdym punkcie, bo jest kombinacją liniową czterech funkcji rosnących. Dla funkcji w o wahanii ograniczonym określamy

$$\tilde{w}(x) = \begin{cases} w(a), & x = a \\ w(b), & x = b \\ \lim_{t \rightarrow x^-} w(t), & a < x < b. \end{cases}$$

Wtedy \tilde{w} jest lewostronnie ciągła wewnątrz przedziału oraz nadal ma wahanie ograniczone (bo jeśli w jest rosnąca, to \tilde{w} też jest rosnąca). Ponadto

$$\int_a^b f(x) d\tilde{w}(x) = \int_a^b f(x) dw(x).$$

Co więcej jeśli w_1 i w_2 są różnymi funkcjami o wahaniu ograniczonym, lewostronnie ciągłymi na (a, b) oraz $w_1(a) = w_2(a)$, to funkcjonały wyznaczone przez te funkcje są różne, tzn. dla pewnej funkcji $f \in C[a, b]$ mamy

$$\int_a^b f(x) dw_1(x) \neq \int_a^b f(x) dw_2(x).$$

5.4 Wersja geometryczna

Definicja 5.16. Podzbiór $V \subset X$ nazywamy *bit wypukłym* jeśli dla $x, y \in V$ oraz $0 \leq t \leq 1$ mamy $tx + (1-t)y \in V$. To oznacza, że zbiór V zawiera elementy x i y wraz z całym odcinkiem łączącym x z y .

Przykład. $V = \{x \in X : \|x\| \leq r\}$.

Przykład. Niech φ będzie rzeczywistym funkcjonałem liniowym na przestrzeni unormowanej X . Wtedy zbiór

$$V_\alpha = \{x \in X : \varphi(x) > \alpha\}$$

jest wypukły dla $\alpha \in \mathbb{R}$.

Założmy, że zbiór wypukły $V \subset X$ jest otwarty i zawiera punkt 0. Zatem dla pewnej liczby $\varepsilon > 0$ mamy $B_\varepsilon(0) \subset V$. Zatem dla dowolnego elementu $x \in X$ istnieje liczba $t > 0$ taka, że $t^{-1}x \in V$. Rzeczywiście wystarczy, aby $\|t^{-1}x\| < \varepsilon$, czyli $t > \varepsilon^{-1}\|x\|$.

Definicja 5.17. Dla otwartego, wypukłego zbioru V , zawierającego 0, określamy **funkcjonał Minkowskiego** wzorem

$$p_V(x) = \inf\{t > 0 : t^{-1}x \in V\}.$$

Przykład. Niech $V = \{x \in X : \|x\| \leq r\}$. Dla dowolnego elementu $x \in X$ mamy $t^{-1}x \in V$ wtedy i tylko wtedy, gdy $t > r^{-1}\|x\|$. Zatem $p_V(x) = r^{-1}\|x\|$.

Przykład. Na płaszczyźnie $X = \mathbb{R}^2$ z normą euklidesową rozważmy elipsę

$$V = \{(x, y) : x^2 + 4y^2 \leq 1\}.$$

Elementy $u = (2, 0)$ i $w = (0, 2)$ mają tę samą normę, ale

$$p_V(u) = 2 \neq 4 = p_V(w).$$

Lemat 5.18.

- (a) $p_V(0) = 0$.
- (b) $p_V(sx) = sp_V(x)$ dla $s > 0$.
- (c) $p_V(x + y) \leq p_V(x) + p_V(y)$.
- (d) $\{x \in X : p_V(x) < 1\} \subset V \subset \{x \in X : p_V(x) \leq 1\}$.
- (e) Jeśli $W \subset V$, to $p_W(x) \geq p_V(x)$.

Dowód.

(a) Mamy $t^{-1}0 = 0 \in V$ dla $t > 0$. Zatem $p_V(0) = 0$.

(b) Warunek $t^{-1}x \in V$ jest równoważny z warunkiem $(st)^{-1}(sx) \in V$ dla $s > 0$. Stąd $p_V(sx) = sp_V(x)$.

(c) Załóżmy, że $t^{-1}x \in V$ oraz $s^{-1}y \in V$. Wtedy z wypukłości zbioru V mamy

$$(s + t)^{-1}(x + y) = \frac{t}{s + t}(t^{-1}x) + \frac{s}{s + t}(s^{-1}y) \in V.$$

Zatem $p_V(x + y) \leq s + t$. Biorąc kres dolny względem s i t spełniających $t^{-1}x \in V$ oraz $s^{-1}y \in V$ otrzymamy

$$p_V(x + y) \leq p_V(x) + p_V(y).$$

(d) Niech $p_V(x) < 1$. Zatem istnieje liczba $0 < t < 1$ spełniająca $t^{-1}x \in V$. Wtedy z wypukłości V i z warunku $0 \in V$ wynika, że

$$x = t(t^{-1}x) = (1 - t)0 \in V.$$

To dowodzi pierwszego zawierania w (d). Załóżmy, że $x \in V$. Wtedy $1^{-1}x \in V$, czyli $p_V(x) \leq 1$. Stąd otrzymujemy drugą część (d). \square

Uwaga 5.19. Z lematu wynika, że funkcja $p_V(x)$ jest wypukła.

Definicja 5.20. Mówimy, że dwa zbiory A i B w przestrzeni unormowanej X można **rozdzielić hiperpłaszczyzną** jeśli istnieją ograniczony funkcjonal liniowy $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ oraz liczba $\alpha \in \mathbb{R}$ takie, że

$$\begin{aligned}\varphi(x) &\leq \alpha, & \text{dla } x \in A, \\ \varphi(y) &\geq \alpha, & \text{dla } y \in B.\end{aligned}$$

Jeśli obie nierówności są ostre, to mówimy, że zbiory A i B są **ściśle rozdzielone**.

Uwaga 5.21. Niech X będzie przestrzenią wymiaru n nad \mathbb{R} . Dla niezerowego funkcjonału liniowego φ na X zbiór

$$X_0 = \{x \in X : \varphi(x) = 0\}$$

jest $(n - 1)$ -wymiarową podprzestrzenią w X . Jeśli e_1, e_2, \dots, e_n jest bazą w X oraz $a_j = \varphi(e_j)$, to φ ma postać

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{j=1}^n x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j \varphi(e_j) = \sum_{j=1}^n a_j x_j,$$

Wtedy

$$X_0 = \{(x_j)_{j=1}^n : a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0\}$$

jest hiperprzestrzenią natomiast hiperpłaszczyzna $X_\alpha = \{x \in X : \varphi(x) = \alpha\}$ ma postać $X_\alpha = X_0 + x_\alpha$, gdzie x_α jest ustalonym wektorem spełniającym $\varphi(x_\alpha) = \alpha$.

Twierdzenie 5.22. Niech A i B będą wypukłymi i rozłącznymi podzbiórami unormowanej przestrzeni liniowej X . Wtedy

- (a) Jeśli A jest otwarty, to zbiory A i B można rozdzielić hiperpłaszczyzną.
- (b) Jeśli A i B są otwarte, to można je rozdzielić ściśle.
- (c) Jeśli A jest zwarty a B jest domknięty, to można je rozdzielić ściśle.

Dowód.

(a) Niech $A - B = \{a - b : a \in A, b \in B\}$, tzn. $A - B$ jest różnicą kompleksową zbiorów A i B . Wtedy $0 \notin A - B$, bo A i B są rozłączne. Wybierzmy $-x_0 \in A - B$ i określmy

$$C = x_0 + (A - B).$$

Z konstrukcji mamy $0 \in C$ oraz $x_0 \notin C$. Zbiór C jest wypukły jako przesunięcie różnicy kompleksowej zbiorów wypukłych. Zbiór C jest otwarty, bo jeśli $x \in x_0 + (A - B)$, to $x = x_0 + a - b$ dla pewnych $a \in A$ oraz $b \in B$. Z otwartości zbioru A mamy $a \in B_\varepsilon(a) \subset A$ dla pewnej liczby $\varepsilon > 0$. Zatem

$$B_\varepsilon(x) = B_\varepsilon(x_0 + a - b) = x_0 + B_\varepsilon(a) - b \subset x_0 + A - B = C.$$

Uwaga 5.23. Dowód otwartości można przeprowadzić nie korzystając z normy. Zapisujemy

$$C = x_0 + A - B = \bigcup_{b \in B} [(x_0 - b) + A]$$

i zauważamy, że każdy składnik sumy mnogościowej jest zbiorem otwartym.

Niech $X_0 = \mathbb{R}x_0$, tzn. X_0 jest prostą przechodzącą przez 0 oraz x_0 . Określmy funkcjonal ℓ na X_0 wzorem

$$\ell(\lambda x_0) = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

W szczególności z Lematu ??(d) wynika $\ell(x_0) = 1 \leq p_C(x_0)$, bo $x_0 \notin C$. Zatem dla $\lambda \geq 0$ mamy

$$\ell(\lambda x_0) = \lambda \leq \lambda p_C(x_0) = p_C(\lambda x_0).$$

Z kolei dla $\lambda < 0$ otrzymujemy

$$\ell(\lambda x_0) = \lambda < p_C(\lambda x_0).$$

Reasumując udowodniliśmy, że

$$\ell(x) \leq p_C(x), \quad \text{dla } x \in X_0.$$

Funkcja p_C spełnia założenia twierdzenia Hahna-Banacha. Zatem istnieje funkcjonal $L : X \rightarrow \mathbb{R}$ taki, że

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x_0) &= \ell(x_0) = 1 \\ \mathcal{L}(x) &\leq p_C(x) \quad \text{dla } x \in X. \end{aligned}$$

Pokażemy, że \mathcal{L} rozdziela A i B . Niech $x \in C$. Wtedy z Lematu ??(d) mamy

$$\mathcal{L}(x) \leq p_C(x) \leq 1.$$

Czyli $\mathcal{L}(x_0 + a - b) \leq 1$ dla dowolnych $a \in A$ i $b \in B$. Zatem $\mathcal{L}(a) \leq \mathcal{L}(b)$ dla $a \in A$ i $b \in B$. Biorąc kres górny względem a a potem kres dolny względem b otrzymamy

$$\sup_{a \in A} \mathcal{L}(a) \leq \sup_{b \in B} \mathcal{L}(b).$$

Uwaga 5.24. Jeśli tu mamy ostrą nierówność, to A i B są ściśle rozdzielone.

Istnieje zatem liczba α spełniająca

$$\sup_{a \in A} \mathcal{L}(a) \leq \alpha \leq \sup_{b \in B} \mathcal{L}(b).$$

Pozostaje uzasadnić ciągłość funkcjonału \mathcal{L} . Ponieważ zbiór C jest otwarty oraz $0 \in C$, to $B_\varepsilon(0) \subset C$ dla pewnej liczby $\varepsilon > 0$. Wtedy z przykładu po Definicji ?? mamy

$$\mathcal{L}(x) \leq p_C(x) \leq p_{B_\varepsilon(0)}(x) = \varepsilon^{-1} \|x\|.$$

Czyli $\mathcal{L}(x) \leq \varepsilon^{-1} \|x\|$. Zatem

$$-\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(-x) \leq \varepsilon^{-1} \| -x \| = \varepsilon^{-1} \|x\|.$$

Ostatecznie $|\mathcal{L}(x)| \leq \varepsilon^{-1} \|x\|$.

(b) Załóżmy, że A i B są otwarte. Z pierwszej części dowodu istnieje niezerowy ograniczony funkcjonał \mathcal{L} oraz liczba α taka, że

$$\mathcal{L}(a) \leq \alpha \leq \mathcal{L}(b), \quad a \in A, \quad b \in B.$$

Zbiory $\mathcal{L}(A)$ i $\mathcal{L}(B)$ są wypukłe i otwarte w \mathbb{R} (por. Zadanie ??). Zbiory te są zatem otwartymi przedziałami w \mathbb{R} , przy czym $\mathcal{L}(A)$ leży na lewo od $\mathcal{L}(B)$. Zatem

$$\mathcal{L}(a) < \alpha < \mathcal{L}(b), \quad a \in A, \quad b \in B.$$

(c) Zakładamy, że A jest zwarty a B domknięty. Dla dowolnego elementu $a \in A$ istnieje kula otwarta K_a o środku w 0 taka, że kula $a + 2K_a$ jest rozłączna z B . Zbiory $a + K_a$ dla $a \in A$ pokrywają zbiór A . Ze zwartości mamy

$$A \subset (a_1 + K_{a_1}) \cup (a_2 + K_{a_2}) \cup \dots \cup (a_n + K_{a_n}).$$

Określmy

$$U = K_{a_1} \cap K_{a_2} \cap \dots \cap K_{a_n}. \quad (5.5)$$

Wtedy U jest otwartą kulą o środku w zerze. Zauważmy, że

$$(A + U) \cap B = \emptyset. \quad (5.6)$$

Istotnie z (??) mamy

$$\begin{aligned} A + U &\subset [(a_1 + K_{a_1}) \cup (a_2 + K_{a_2}) \cup \dots \cup (a_n + K_{a_n})] + U \\ &= (a_1 + K_{a_1} + U) \cup (a_2 + K_{a_2} + U) \cup \dots \cup (a_n + K_{a_n} + U) \\ &\subset (a_1 + 2K_{a_1}) \cup (a_2 + 2K_{a_2}) \cup \dots \cup (a_n + 2K_{a_n}). \end{aligned}$$

W ostatniej sumie każdy składnik sumy mnogościowej jest rozłączny z B . To dowodzi (??). Zatem

$$(A + \frac{1}{2}U) \cap (B + \frac{1}{2}U) = \emptyset.$$

Ale zbiory $A + \frac{1}{2}U$ i $B + \frac{1}{2}U$ są otwarte i wypukłe, więc z części (b) można je ściśle rozdzielić. Tym bardziej można ściśle rozdzielić A i B . \square

5.5 Wersja niezmiennicza

Definicja 5.25. Niech X będzie przestrzenią liniową. Rodzinę \mathcal{G} operatorów liniowych określonych na X nazywamy **półgrupą przemienną** jeśli \mathcal{G} zawiera odwzorowanie identycznościowe I oraz z warunku $A, B \in \mathcal{G}$ wynika $AB = BA \in \mathcal{G}$.

Twierdzenie 5.26. Niech $p(x)$ będzie funkcją wypukłą określoną na rzeczywistej przestrzeni liniowej X , przy czym $p(0) = 0$. Załóżmy, że λ jest funkcjonałem liniowym określonym na podprzestrzeni liniowej $Y \subset X$, spełniającym warunek $\lambda(y) \leq p(y)$ dla $y \in Y$. Niech \mathcal{G} będzie półgrupą przemienną operatorów liniowych na X spełniającą warunki:

- (i) Dla $A \in \mathcal{G}$ mamy $A(Y) \subset Y$, tzn. podprzestrzeń Y jest niezmiennicza pod działaniem operatorów półgrupy.
- (ii) $p(Ax) \leq p(x)$, dla $x \in X$ oraz $A \in \mathcal{G}$.
- (iii) $\lambda(Ay) = \lambda(y)$ dla $y \in Y$ oraz $A \in \mathcal{G}$, tzn. funkcjonał λ jest niezmienny na działanie operatorów z \mathcal{G} .

Wtedy istnieje funkcjonał Λ określony na X taki, że

- (a) $\Lambda(y) = \lambda(y)$ dla $y \in Y$.
- (b) $\Lambda(x) \leq p(x)$ dla $x \in X$.

(c) $\Lambda(Ax) = \Lambda(x)$ dla $x \in X$ oraz $A \in \mathcal{G}$.

Dowód. Wiemy, że dla $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ mamy

$$p(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 p(x_1) + \dots + \alpha_n p(x_n).$$

Nierówność pozostaje prawdziwa, jeśli $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i \leq 1$. Rzeczywiście

$$\begin{aligned} p(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) &= p(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n + (1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i)0) \\ &\leq \alpha_1 p(x_1) + \dots + \alpha_n p(x_n) + (1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i)p(0) \\ &= \alpha_1 p(x_1) + \dots + \alpha_n p(x_n). \end{aligned}$$

Z niezmienniczości i liniowości funkcjonału λ otrzymujemy

$$\lambda(y) = \lambda\left(\sum_{i=1}^n \alpha A_i y\right), \quad y \in Y, A_i \in \mathcal{G}, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1.$$

Zatem

$$\lambda(y) \leq p\left(\sum_{i=1}^n \alpha A_i y\right), \quad y \in Y, A_i \in \mathcal{G}, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1.$$

W rezultacie

$$\lambda(y) \leq \inf \left\{ p\left(\sum_{i=1}^n \alpha A_i y\right) : n \in \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{G}, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \right\}.$$

Dla $x \in X$ określimy

$$q(x) = \inf \left\{ p\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i A_i y\right) : n \in \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{G}, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \right\}. \quad (5.7)$$

Zauważmy, że $q(x) \leq p(x)$. Istotnie, dla $n = 1$, $A_1 = I$ oraz $\alpha_1 = 1$ otrzymujemy $p(\sum_{i=1}^n \alpha_i A_i y) = p(x)$. Pokażemy, że funkcja $q(x)$ jest wypukła. Niech $x, y \in X$ oraz $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$. Wybierzmy liczby nieujemne $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ takie, że $\sum_{i=1}^m \alpha_i = \sum_{j=1}^n \beta_j = 1$ oraz operatory $A_1, A_2, \dots, A_m, B_1, B_2, \dots, B_n$ z półgrupy \mathcal{G} . Wtedy rozważamy mn liczb $\alpha_i \beta_j$ i tyleż operatorów $A_i B_j \in \mathcal{G}$. Mamy

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j = 1.$$

Korzystając z wypukłości i własności (ii) funkcji p otrzymujemy

$$\begin{aligned}
q(\alpha x + \beta y) &\leq p\left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j A_i B_j (\alpha x + \beta y)\right) \\
&= p\left(\alpha \sum_{j=1}^n \beta_j B_j \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i A_i x\right) + \beta \sum_{i=1}^m \alpha_i A_i \left(\sum_{j=1}^n \beta_j B_j y\right)\right) \\
&\leq \alpha p\left(\sum_{j=1}^n \beta_j B_j \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i A_i x\right)\right) + \beta p\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i A_i \left(\sum_{j=1}^n \beta_j B_j y\right)\right) \\
&\leq \alpha \sum_{j=1}^n \beta_j p\left(B_j \sum_{i=1}^m \alpha_i A_i x\right) + \beta \sum_{i=1}^m \alpha_i p\left(A_i \sum_{j=1}^n \beta_j B_j y\right) \\
&\leq \alpha \sum_{j=1}^n \beta_j p\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i A_i x\right) + \beta \sum_{i=1}^m \alpha_i p\left(\sum_{j=1}^n \beta_j B_j y\right).
\end{aligned}$$

Obliczając kres dolny względem wszystkich wyborów współczynników α_i , β_j oraz operatorów A_i , $B_j \in \mathcal{G}$ otrzymujemy

$$q(\alpha x + \beta y) \leq \alpha q(x) + \beta q(y),$$

zatem q jest funkcją wypukłą na X . Z twierdzenia Hahna-Banacha istnieje funkcjonał $\Lambda : X \rightarrow \mathbb{R}$ spełniający

$$\begin{aligned}
\Lambda(y) &= \lambda(y) && \text{dla } y \in Y, \\
\Lambda(x) &\leq q(x) \leq p(x) && \text{dla } x \in X.
\end{aligned}$$

Pozostaje udowodnić, że $\Lambda(Ax) = \Lambda(x)$ dla $x \in X$ oraz $A \in \mathcal{G}$. Przyjmując $n \geq 2$, $\alpha_i = \frac{1}{n}$ oraz $A_i = A^i$ dla $A \in \mathcal{G}$ (patrz (??)) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
q(x - Ax) &\leq p\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A^{i-1}(x - Ax)\right) = p\left(\frac{1}{n}x + \frac{1}{n}A^n(-x)\right) \\
&\leq \frac{1}{n}p(x) + \frac{1}{n}p(A^n(-x)) \leq \frac{1}{n}[p(x) + p(-x)].
\end{aligned}$$

Ponieważ n jest dowolną liczbą naturalną, to $q(x - Ax) \leq 0$. Stąd wynika, że $\Lambda(x - Ax) \leq q(x - Ax) \leq 0$, czyli

$$\Lambda(x) \leq \Lambda(Ax), \quad x \in X, \quad A \in \mathcal{G}.$$

Podstawiając $x := -x$ otrzymamy nierówność przeciwną, czyli $\Lambda(Ax) = \Lambda(x)$. \square

Następny wynik jest efektywnym zastosowaniem Twierdzenia ??.

Twierdzenie 5.27. *Istnieje funkcja rzeczywista μ określona dla wszystkich ograniczonych podzbiorów prostej spełniająca:*

(i) $\mu(A) \geq 0$.

(ii) Jeśli $A \cap B = \emptyset$, to $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

(iii) $\mu(x + A) = \mu(A)$ dla $x \in \mathbb{R}$, tzn. μ jest niezmiennicza na przesunięcia.

(iv) Jeśli A jest podzbiorem mierzalnym w sensie Lebesgue'a, to $\mu(A) = |A|$, gdzie $|A|$ oznacza miarę Lebesgue'a zbioru A .

Dowód. Niech X będzie przestrzenią wszystkich ograniczonych funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o nośniku ograniczonym, czyli

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\} \subset [a, b]$$

dla pewnych liczb $a, b \in \mathbb{R}$. Niech Y oznacza zbiór funkcji w X mierzalnych w sensie Lebesgue'a. Określmy funkcję $p : X \rightarrow \mathbb{R}$

$$p(f) = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}} g(x) dx : g \in Y, |f(x)| \leq g(x), x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wartość $p(f)$ jest zawsze skończona. Istotnie, niech $|f(x)| \leq m$ oraz $f(x) = 0$ dla $x \notin [a, b]$, to przyjmując $g(x) = m\chi_{[a,b]}$ otrzymamy $|f(x)| \leq g(x)$ oraz $p(f) \leq m(b-a)$.

Funkcja p jest wypukła. Rzeczywiście, niech $f_1, f_2 \in X$ oraz $\alpha, \beta \geq 0$. Wybierzmy dowolne funkcje mierzalne g_1, g_2 spełniające $|f_1(x)| \leq g_1(x)$ oraz $|f_2(x)| \leq g_2(x)$. Wtedy

$$|\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)| \leq \alpha |f_1(x)| + \beta |f_2(x)| \leq \alpha g_1(x) + \beta g_2(x).$$

Zatem

$$p(\alpha f_1 + \beta f_2) \leq \int_{\mathbb{R}} [\alpha g_1(x) + \beta g_2(x)] dx = \alpha \int_{\mathbb{R}} g_1(x) dx + \beta \int_{\mathbb{R}} g_2(x) dx.$$

Obliczając kres dolny względem g_1 i g_2 otrzymamy

$$p(\alpha f_1 + \beta f_2) \leq \alpha p(f_1) + \beta p(f_2).$$

Dla $f \in X$ oraz $t \in \mathbb{R}$ określamy operator przesunięcia A_t wzorem

$$(A_t f)(x) = f(x + t).$$

Operatory A_t tworzą półgrupę przemienną, bo

$$A_t A_s = A_{t+s} = A_s A_t, \quad A_0 = I.$$

Ponadto $p(A_t f) \leq p(f)$. Rzeczywiście, jeśli $|f(x)| \leq g(x)$ dla $f \in X$ i $g \in Y$, to $|(A_t f)(x)| \leq (A_t g)(x)$ oraz $A_t g \in Y$. Zatem

$$p(A_t f) \leq \int_{\mathbb{R}} (A_t g)(x) dx = \int_{\mathbb{R}} g(x + t) dx = \int_{\mathbb{R}} g(x) dx.$$

Biorąc kres dolny względem funkcji g otrzymujemy

$$p(A_t f) \leq p(f).$$

Uwaga 5.28. Prawdziwa jest równość $p(A_t f) = p(f)$. Istotnie

$$p(f) = p(A_t A_t f) \leq p(A_t f) \leq p(f).$$

Określmy funkcjonał $\lambda : Y \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem

$$\lambda(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx.$$

Ten funkcjonał jest niezmienniczy pod działaniem A_t , bo

$$\lambda(A_t f) = \int_{\mathbb{R}} f(x + t) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \lambda(f).$$

Zatem z Twierdzenia ?? istnieje funkcjonał $\Lambda : X \rightarrow \mathbb{R}$ spełniający

$$\begin{aligned} \Lambda(A_t f) &= \Lambda(f), \\ \Lambda(f) &= \int_{\mathbb{R}} f(x) dx, \quad \text{dla } f \in Y, \\ \Lambda(f) &\leq p(f). \end{aligned} \tag{5.8}$$

Pokażemy, że funkcjonał Λ jest nieujemny, tzn. jeśli $f \geq 0$, to $\Lambda(f) \geq 0$. Załóżmy, że $|f(x)| \leq m$ oraz $f(x) = 0$ dla $x \notin [a, b]$. Wtedy

$$0 \leq m \mathcal{K}_{[a,b]}(x) - f(x) \leq m \mathcal{K}_{[a,b]}(x). \tag{5.9}$$

Na podstawie (??) i (??) mamy

$$\Lambda(m\chi_{[a,b]} - f) \leq p(m\chi_{[a,b]} - f) \leq \int_{\mathbb{R}} m\chi_{[a,b]}(x) dx = m(b-a).$$

Zatem

$$\lambda(m\chi_{[a,b]}) - \Lambda(f) \leq m(b-a).$$

Ponieważ $\lambda(m\chi_{[a,b]}) = m(b-a)$, to $\Lambda(f) \geq 0$.

Dla $A \subset \mathbb{R}$ określamy

$$\mu(A) = \Lambda(\chi_A).$$

Mamy $\mu(A) \geq 0$, bo funkcjonal Λ jest nieujemny. Jeśli $A \cap B = \emptyset$, to

$$\mu(A \cup B) = \Lambda(\chi_{A \cup B}) = \Lambda(\chi_A + \chi_B) = \Lambda(\chi_A) + \Lambda(\chi_B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Ponadto jeśli A jest mierzalny w sensie Lebesgue'a, to

$$\mu(A) = \Lambda(\chi_A) = \lambda(\chi_A) = \int_{\mathbb{R}} \chi_A(x) dx = |A|.$$

□

Uwaga 5.29. Niech $SO(3)$ oznacza grupę obrotów w przestrzeni \mathbb{R}^3 . Miara Lebesgue'a w \mathbb{R}^3 jest niezmiennicza na działanie grupy $SO(3)$. Jednak miara ta mierzy tylko zbiory mierzalne. Rozważmy zagadnienie: czy istnieje skończenie addytywna funkcja μ określona na wszystkich ograniczonych podzbiórach w \mathbb{R}^3 taka, że

$$\mu(U(A)) = \mu(A), \quad U \in SO(3), \quad A \subset \mathbb{R}^3.$$

Zagadnienie jest związane z tzw. paradoksem Banacha-Tarskiego. Okazuje się, że kulę jednostkową $B = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| \leq 1\}$ można przedstawić w postaci sumy rozłącznej pięciu podzbiorów

$$B = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5$$

oraz istnieją dwie macierze U_1, U_2 takie, że

$$U_1(B_1) \cup B_2 = B, \quad U_2(B_3) \cup B_4 = B.$$

W związku z tym funkcja μ o opisanych własnościach nie może istnieć.

6 Twierdzenie Baire'a i zastosowania

6.1 Twierdzenie Baire'a

Definicja 6.1. Zbiór S w przestrzeni metrycznej X nazywamy **nigdziegęstym**, jeśli domknięcie \overline{S} ma puste wnętrze. Tzn. dla dowolnej otwartej kuli B w X mamy $B \setminus \overline{S} \neq \emptyset$.

Przykłady. Skończony podzbiór na prostej jest nigdziegęsty. Przeliczalny zbiór $Z \subset \mathbb{R}$ jest nigdziegęsty. Jednakże przeliczalny podzbiór może być gęsty, np. zbiór liczb wymiernych jest gęsty w \mathbb{R} . Zbiór Cantora $C \subset [0, 1]$ jest nigdziegęsty, chociaż jest nieprzeliczalny.

Definicja 6.2. S nazywamy zbiorem **I kategorii** jeśli S jest przeliczalną sumą zbiorów nigdziegęstych w X .

Przykład. \mathbb{Q} jest zbiorem I kategorii, bo $\mathbb{Q} = \bigcup_{q \in \mathbb{R}} \{q\}$.

Uwaga 6.3. Przeliczalna suma zbiorów I kategorii jest znowu zbiorem I kategorii.

Twierdzenie 6.4 (Baire). *Przestrzeń metryczna zupełna nie jest zbiorem I kategorii.*

Dowód. Załóżmy, że X jest zbiorem I kategorii. Niech

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

gdzie A_n są zbiorami nigdziegęstymi. Ponieważ A_1 nie jest gęsty, to można znaleźć $x_1 \notin \overline{A_1}$. Zatem istnieje otwarta kula B_1 o środku w x_1 taka, że

$$x_1 \in \overline{B_1} \subset X \setminus \overline{A_1}.$$

Możemy założyć, że promień kuli B_1 nie przekracza 2^{-1} . Zbiór A_2 jest nigdziegęsty, zatem można znaleźć element x_2 taki, że $x_2 \in B_1 \setminus \overline{A_2}$. Istnieje zatem kula o środku w x_2 i promieniu co najwyżej 2^{-2} spełniająca warunek

$$x_2 \in \overline{B_2} \subset B_1 \setminus \overline{A_2}.$$

Dalej postępujemy podobnie. Tzn. jeśli B_{n-1} i x_{n-1} są już wybrane, to istnieje element x_n taki, że $x_n \in B_{n-1} \setminus \overline{A_n}$. Istnieje wtedy kula o środku w x_n i promieniu co najwyżej 2^{-n} taka, że

$$x_n \in \overline{B_n} \subset B_{n-1} \setminus \overline{A_n}.$$

Otrzymamy w ten sposób ciąg x_n , który spełnia warunek Cauchy'ego. Istotnie jeśli $n, m > N$, to $x_n, x_m \in B_N$, bo kule tworzą ciąg zstępujący. Zatem

$$d(x_n, x_m) < \frac{2}{2^N}.$$

Z zupełności przestrzeni X ciąg x_n jest zbieżny. Niech $x = \lim_n x_n$. Dla $n > N$ mamy $x_n \in B_{N+1}$. Stąd

$$x = \lim_n x_n \in \overline{B_{N+1}} \subset B_N,$$

dla każdej wartości N . Ale $B_N \cap A_N = \emptyset$. Tzn. $x \notin A_N$ dla każdej wartości N . Czyli

$$x \notin \bigcup_{N=1}^{\infty} A_N = X.,$$

co prowadzi do sprzeczności. □

Uwaga 6.5. Jeśli S nie jest zbiorem I kategorii w X oraz $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, to dla pewnej wartości n zbiór $\overline{A_n}$ zawiera kulę.

Przykład. Zbiór $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nie jest zbiorem I kategorii w \mathbb{R} . Istotnie, gdyby $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ był zbiorem I kategorii to również $\mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q}$ byłby zbiorem I kategorii, co przeczyłoby twierdzeniu Baire'a.

6.2 Twierdzenie Banacha-Steinhaus

Twierdzenie 6.6. Niech X i Y będą przestrzeniami unormowanymi. Niech \mathcal{F} oznacza pewną rodzinę ograniczonych operatorów liniowych z X w Y . Wtedy zbiór liczb $\{\|T\| : T \in \mathcal{F}\}$ jest ograniczony lub zbiór $\{x \in X : \sup_{T \in \mathcal{F}} \|Tx\| < \infty\}$ jest I kategorii w X .

Uwaga 6.7. Jeśli zbiór $\{\|T\| : T \in \mathcal{F}\}$ jest ograniczony, czyli istnieje liczba $c > 0$ taka, że $\|T\| \leq c$ dla $T \in \mathcal{F}$, to

$$\|Tx\| \leq \|T\| \|x\| \leq c \|x\|, \quad x \in X, T \in \mathcal{F}.$$

Zatem

$$\{x \in X : \sup_{T \in \mathcal{F}} \|Tx\| < \infty\} = X.$$

Dowód. Załóżmy, że

$$A = \{x \in X : \sup_{T \in \mathcal{F}} \|Tx\| < \infty\}$$

nie jest I kategorii. Wprowadzamy zbiory

$$A_n = \{x \in X : \sup_{T \in \mathcal{F}} \|Tx\| \leq n\}.$$

Wtedy

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Zbiory A_n są domknięte, bo jeśli $x_k \in A_n$ oraz $x_k \rightarrow x$, to

$$\|Tx\| = \lim_k \|Tx_k\| \leq n.$$

Zatem z uwagi ?? dla pewnej wartości n zbiór A_n zawiera kulę

$$A_n \supset B = \{x \in X : \|x - x_0\| \leq r\}.$$

Niech $\|x\| \leq r$. Wtedy $x_0, x + x_0 \in B \subset A_n$. Zatem

$$\|Tx\| = \|T(x + x_0) - Tx_0\| \leq \|T(x + x_0)\| + \|Tx_0\| \leq n + n = 2n.$$

Dla $x \neq 0$ element $y = r\|x\|^{-1}x$ spełnia $\|y\| = r$, zatem

$$\|Tx\| = \frac{1}{r}\|x\|\|Ty\| \leq \frac{2n}{r}\|x\|,$$

czyli

$$\|T\| \leq \frac{2n}{r}, \quad T \in \mathcal{F}.$$

□

Wniosek 6.8. Niech X będzie przestrzenią Banacha. Przy oznaczeniach z poprzedniego twierdzenia otrzymujemy: jeśli dla dowolnego elementu $x \in X$ zbiór liczb $\{\|Tx\| : T \in \mathcal{F}\}$ jest ograniczony, to również zbiór $\{\|T\| : T \in \mathcal{F}\}$ jest ograniczony. Tzn. z punktowej ograniczoności rodziny operatorów wynika jednostajna ograniczoność tej rodziny.

Dowód. Z założenia

$$X = \{x \in X : \sup_{T \in \mathcal{F}} \|Tx\| < \infty\}.$$

Z twierdzenia Baire'a X nie jest zbiorem I kategorii, bo X jest przestrzenią Banacha. Z poprzedniego twierdzenia otrzymujemy zatem, że $\{\|T\| : T \in \mathcal{F}\}$ jest ograniczony. \square

Przez kontrapozycję Wniosku dostajemy

Wniosek 6.9. *Przy oznaczeniach z Wn. ??, jeśli zbiór $\{\|T\| : T \in \mathcal{F}\}$ nie jest ograniczony, to dla pewnego elementu $x \in X$ zbiór $\{\|Tx\| : T \in \mathcal{F}\}$ nie jest ograniczony.*

Przykład. Udowodnimy istnienie funkcji ciągłej o okresie 2π , dla której szereg Fouriera nie jest zbieżny w punkcie 0. Niech

$$X = C_{\text{per}}[-\pi, \pi] = \{f \in C[-\pi, \pi] : f(-\pi) = f(\pi)\}.$$

Dla funkcji $f \in X$ określamy współczynniki Fouriera c_n

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Sumy częściowe szeregu Fouriera mają postać

$$s_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dx,$$

gdzie funkcja $D_n(t)$, zwana jądrem Dirichleta ma postać

$$D_n(t) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}}.$$

Przy dodatkowych założeniach, np. $f \in C_{\text{per}}^1[-\pi, \pi]$ można udowodnić, że sumy $s_n(f)$ są jednostajnie zbieżne do funkcji f . Ogólnie ciąg $s_n(f)(x_0)$ nie musi być zbieżny. Rozważmy $x_0 = 0$ i funkcjonały φ_n określone na X przez

$$\varphi_n(f) = s_n(f)(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dg_n(t),$$

gdzie

$$g_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^x D_n(t) dt.$$

Funkcja g_n ma wahanie ograniczone, bo

$$\text{Var}_{[-\pi, \pi]}(g_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt.$$

Na podstawie rozdziału ?? wiemy, że norma funkcjonału φ_n na $C[-\pi, \pi]$ jest równa $\text{Var}_{[-\pi, \pi]}(g_n)$. Nietrudno pokazać, że norma φ_n na $C_{\text{per}}[-\pi, \pi]$ jest taka sama, czyli też jest równa $\text{Var}_{[-\pi, \pi]}(g_n)$. Z kursu szeregów Fouriera wiemy, że liczby

$$L_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt$$

dużą do nieskończoności. Można wykazać, że

$$L_n \approx c \ln n + d.$$

To oznacza, że normy funkcjonałów $\|\varphi_n\|$ nie są wspólnie ograniczone. Zatem z Wn. ?? istnieje funkcja $f \in C_{\text{per}}[-\pi, \pi]$ taka, że ciąg $\varphi_n(f) = s_n(f)(0)$ nie jest ograniczony. W szczególności ciąg $s_n(f)(0)$ nie może być zbieżny. Co więcej z Twierdzenia Banacha-Steinhausa wynika, że zbiór funkcji, dla których ciąg $s_n(f)(0)$ jest ograniczony jest zbiorem I kategorii w $C_{\text{per}}[-\pi, \pi]$.

Twierdzenie 6.10. *Załóżmy, że funkcja $B(x, y)$ jest zespoloną formą dwuliniową (lub półtoraliniową) na iloczynie $X \times Y$, gdzie X i Y są przestrzeniami Banacha, tzn. $B : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$. Jeśli dla każdego ustalonego elementu $x \in X$ funkcjonal $y \mapsto B(x, y)$ jest ciągły na Y oraz dla każdego ustalonego elementu $y \in Y$ funkcjonal $x \mapsto B(x, y)$ jest ciągły na X , to istnieje stała $c > 0$ spełniająca*

$$|B(x, y)| \leq c \|x\| \|y\|, \quad x \in X, \quad y \in Y.$$

W szczególności odwzorowanie $(x, y) \mapsto B(x, y)$ jest ciągłe na $X \times Y$ (względem normy np. $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$).

Uwaga 6.11. Jeśli B jest formą półtoraliniową, to rozważamy funkcjonały

$$y \mapsto \overline{B(x, y)}.$$

Dowód. Ustalmy $x \in X$ i rozważmy funkcjonal $\varphi_x(y) = B(x, y)$. W przypadku, gdy $B(x, y)$ jest formą dwuliniową, funkcjonal φ_x jest liniowy. Z założenia wiemy, że φ_x jest ciągły. Zatem istnieje stała $c_x > 0$ taka, że $|\varphi_x(y)| \leq c_x \|y\|$, czyli

$$|B(x, y)| \leq c_x \|y\|, \quad y \in Y. \quad (6.1)$$

Podobnie, dla każdego elementu $y \in Y$ istnieje stała $d_y > 0$ taka, że

$$|B(x, y)| \leq d_y \|x\|, \quad x \in X. \quad (6.2)$$

Rozważamy rodzinę funkcjonałów $\mathcal{F} = \{\varphi_x : \|x\| \leq 1\}$ określonych na przestrzeni Y . Sprawdzamy, czy wartości $\varphi_x(y)$ dla $\|x\| \leq 1$ są wspólnie ograniczone dla każdego ustalonego elementu $y \in Y$. Na podstawie (6.2) mamy

$$|\varphi_x(y)| = |B(x, y)| \leq d_y \|x\| \leq d_y.$$

Zatem z Wn. 6.2 normy funkcjonałów $\|\varphi_x\|_{Y^*}$ są wspólnie ograniczone dla $\|x\| \leq 1$. To oznacza, że

$$c = \sup_{\|x\| \leq 1} \|\varphi_x\|_{Y^*} < \infty.$$

Ale

$$c = \sup_{\|x\| \leq 1} \|\varphi_x\|_{Y^*} = \sup_{\|x\| \leq 1} \sup_{\|y\| \leq 1} |\varphi_x(y)| = \sup_{\|x\| \leq 1} \sup_{\|y\| \leq 1} |B(x, y)|.$$

Zatem dla $x, y \neq 0$ mamy

$$|B(x, y)| = \|x\| \|y\| \left| B\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right) \right| \leq c \|x\| \|y\|.$$

Z ostatniej nierówności wynika ciągłość. Rzeczywiście, dla $x_n \rightarrow x$ oraz $y_n \rightarrow y$ mamy

$$B(x_n, y_n) - B(x, y) = B(x_n - x, y_n - y) + B(x, y_n - y) + B(x_n - x, y).$$

Zatem

$$\begin{aligned} |B(x_n, y_n) - B(x, y)| &\leq |B(x_n - x, y_n - y)| + |B(x, y_n - y)| + |B(x_n - x, y)| \\ &\leq c \|x_n - x\| \|y_n - y\| + c \|x\| \|y_n - y\| + c \|x_n - x\| \|y\| \xrightarrow{n} 0 \end{aligned}$$

□

Twierdzenie 6.12 (Hellinger-Toeplitz). *Załóżmy, że dwa operatory liniowe $A, B : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ określone na przestrzeni Hilberta \mathcal{H} spełniają warunek*

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, By \rangle \quad x, y \in \mathcal{H}.$$

Wtedy A i B są ograniczone oraz $B = A^$.*

Uwaga 6.13. Jeśli $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$ dla $x, y \in \mathcal{H}$, to A jest ograniczony oraz $A^* = A$.

Dowód. Określmy formę półtoraliniową C na $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$

$$C(x, y) = \langle Ax, y \rangle.$$

Mamy wtedy

$$\begin{aligned} |C(x, y)| &= |\langle Ax, y \rangle| \leq \|Ax\| \|y\|, \\ |C(x, y)| &= |\langle Ax, y \rangle| = |\langle x, By \rangle| \leq \|By\| \|x\|. \end{aligned}$$

Zatem oba odwzorowania $X \ni x \mapsto C(x, y)$ oraz $Y \ni y \mapsto C(x, y)$ są ciągłe. Z Twierdzenia ?? istnieje stała $c > 0$ taka, że

$$|C(x, y)| \leq c \|x\| \|y\|.$$

Wtedy z Lematu ?? mamy

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \sup_{\|y\| \leq 1} |\langle Ax, y \rangle| = \sup_{\|x\| \leq 1} \sup_{\|y\| \leq 1} |C(x, y)| \leq c.$$

Podobnie $\|B\| \leq c$. □

6.3 Twierdzenia Banacha

Twierdzenie 6.14 (o odwzorowaniu otwartym). *Ciągłe odwzorowanie liniowe T z przestrzeni Banacha X na przestrzeń Banacha Y jest otwarte, tzn. obraz $T(U)$ dla każdego otwartego podzbioru U w X jest otwartym podzbiorem w Y .*

Dowód. Najpierw pokażemy, że obraz otwartej kuli jednostkowej o środku w 0 w X zawiera kulę otwartą o środku w 0 w Y . Niech

$$B_n = \{x \in X : \|x\| < 2^{-n}\}.$$

Mamy

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} kB_1.$$

Zatem

$$Y = T(X) = \bigcup_{k=1}^{\infty} T(kB_1) = \bigcup_{k=1}^{\infty} kT(B_1).$$

Z twierdzenia Baire'a przynajmniej jeden ze zbiorów $kT(B_1)$ nie jest nigdziegęsty. Zatem $T(B_1)$ nie jest nigdziegęsty. To oznacza, że domknięcie zbioru $T(B_1)$ zawiera pewną kulę, czyli

$$\overline{T(B_1)} \supset \{y \in Y : \|y - y_0\| < \eta\},$$

dla pewnego elementu $y_0 \in Y$ oraz liczby $\eta > 0$.

$$\begin{aligned} \{y \in Y : \|y\| < \eta\} &= \{y \in Y : \|y - y_0\| < \eta\} - y_0 \subset \overline{T(B_1)} - \overline{T(B_1)} \\ &= \overline{T(B_1) - T(B_1)} = \overline{T(B_1 - B_1)} = \overline{T(2B_1)} = \overline{T(B_0)}. \end{aligned}$$

Skorzystaliśmy z prostej własności, że $\overline{A} - \overline{B} \subset \overline{A - B}$. Dzieląc stronami przez 2^n otrzymamy

$$\left\{y \in Y : \|y\| < \frac{\eta}{2^n}\right\} \subset \overline{T(B_n)}. \quad (6.3)$$

Naszym celem jest wykazanie, że

$$\left\{y \in Y : \|y\| < \frac{\eta}{2}\right\} \subset T(B_0). \quad (6.4)$$

Niech $\|y\| \leq \eta/2$. Zatem z (??) dla $n = 1$ mamy $y \in \overline{T(B_1)}$. Istnieje więc element $x_1 \in B_1$ taki, że

$$\|y - Tx_1\| < \frac{\eta}{2^2}.$$

Znowu z (??) dla $n = 2$ wnioskujemy, że $y - Tx_1 \in \overline{T(B_2)}$. Istnieje więc element $x_2 \in B_2$ taki, że

$$\|y - Tx_1 - Tx_2\| \leq \frac{\eta}{2^3},$$

tzn. $y - Tx_1 - Tx_2 \in \overline{T(B_3)}$, na podstawie (??) dla $n = 3$. Postępując tak dalej otrzymamy ciąg elementów x_n o własnościach $x_n \in B_n$ oraz

$$\|y - Tx_1 - Tx_2 - \dots - Tx_n\| < \frac{\eta}{2^{n+1}}.$$

Zatem

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} Tx_n.$$

Skoro $x_n \in B_n$, to $\|x_n\| < 2^{-n}$. Z zupełności przestrzeni X szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ jest zbieżny. Oznaczmy

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

Wtedy

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} Tx_n = y.$$

Ponadto

$$\|x\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Czyli $x \in B_0$. W ten sposób dowód (??) został zakończony.

Niech U będzie otwartym podzbiorem w X oraz $y_0 \in T(U)$. Wtedy $y_0 = Tx_0$ dla pewnego elementu $x_0 \in U$. Z otwartości U mamy

$$\{x \in X : \|x - x_0\| < r\} \subset U$$

dla pewnej liczby $r > 0$. Zatem

$$x_0 + rB_0 = \{x \in X : \|x - x_0\| < r\} \subset U.$$

Wtedy

$$y_0 + rT(B_0) = T(x_0 + rB_0) \subset T(U).$$

Z (??) wynika zatem, że

$$\left\{y \in Y : \|y - y_0\| < \frac{r\eta}{2}\right\} = y_0 + r \left\{y : \|y \in Y\| < \frac{\eta}{2}\right\} \subset y_0 + T(B_0) \subset T(U).$$

To oznacza, że y_0 leży w $T(U)$ wraz z pewną otoczeniem, czyli $T(U)$ jest otwartym podzbiorem w Y . \square

Twierdzenie 6.15 (o odwzorowaniu odwrotnym). *Niech T będzie ciągłym, różnowartościowym odwzorowaniem liniowym z przestrzeni Banacha X na przestrzeń Banacha Y . Wtedy odwzorowanie odwrotne $T^{-1} : Y \rightarrow X$ jest ciągle. Ponadto istnieje stała $c > 0$, dla której*

$$\|Tx\| \geq c\|x\|, \quad x \in X.$$

Dowód. Z poprzedniego twierdzenia T jest odwzorowaniem otwartym. To oznacza, że odwzorowanie T^{-1} jest ciągle. Zatem T^{-1} jest ograniczonym odwzorowaniem liniowym. Wtedy

$$\|x\| = \|T^{-1}Tx\| \leq \|T^{-1}\| \|Tx\|.$$

Stąd

$$\|Tx\| \geq \frac{1}{\|T^{-1}\|} \|x\|,$$

czyli $c = \|T^{-1}\|^{-1}$. □

Wniosek 6.16. *Załóżmy, że T jest ciągłym, różnowartościowym odwzorowaniem liniowym z przestrzeni Banacha X na domkniętą podprzestrzeń przestrzeni Banacha Y . Wtedy istnieje stała $c > 0$, dla której*

$$\|Tx\| \geq c\|x\|, \quad x \in X.$$

Dowód. Niech $Y_0 = T(X)$. Wtedy Y_0 jest przestrzenią Banacha, jako domknięta podprzestrzeń przestrzeni Y . Możemy zatem zastosować poprzednie twierdzenie do $T : X \rightarrow Y_0$. □

Uwaga 6.17. Jeśli odwzorowanie liniowe $T : X \rightarrow Y$ spełnia $\|Tx\| \geq c\|x\|$ dla $x \in X$ i pewnej stałej $c > 0$, to odwzorowanie T jest różnowartościowe oraz $T(X)$ jest domkniętą podprzestrzenią w Y .

Definicja 6.18. *Dla odwzorowania $T : X \rightarrow Y$ podzbiór $\Gamma \subset X \times Y$ określony wzorem*

$$\Gamma = \{(x, Tx) : x \in X\}$$

nazywamy wykresem.

Lemat 6.19. *Załóżmy, że X i Y są liniowymi przestrzeniami unormowanymi. Jeśli T jest ciągłym odwzorowaniem z X w Y , to zbiór Γ jest domkniętym podzbiorem w $X \times Y$.*

Dowód. Załóżmy, że $(x_n, Tx_n) \xrightarrow{n} (x, y)$. Wtedy

$$\|x_n - x\| \xrightarrow{n} 0, \quad \|Tx_n - y\| \xrightarrow{n} 0.$$

Ale z ciągłości mamy $Tx_n \rightarrow Tx$, zatem $Tx = y$, co oznacza, że $(x, y) \in \Gamma$. \square

Lemat 6.20. *Jeśli X i Y są przestrzeniami Banacha, to również $X \times Y$ jest przestrzenią Banacha z normą*

$$\|(x, y)\|_{X \times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y.$$

Dowód. Teza lematu wynika natychmiast z ciągu nierówności

$$\begin{aligned} \max(\|x_n - x_m\|_X, \|y_n - y_m\|_Y) &\leq \|x_n - x_m\|_X + \|y_n - y_m\|_Y \\ &= \|(x_n - x_m, y_n - y_m)\|_{X \times Y} = \|(x_n, y_n) - (x_m, y_m)\|_{X \times Y}. \end{aligned}$$

\square

Twierdzenie 6.21 (o wykresie domkniętym). *Niech T będzie odwzorowaniem liniowym z przestrzeni Banacha X w przestrzeń Banacha Y . Jeśli wykres Γ odwzorowania T jest domkniętą podprzestrzenią w $X \times Y$, to odwzorowanie T jest ciągłe.*

Dowód. Z założenia domkniętości wykresu wynika, że Γ jest przestrzenią Banacha. Rozważmy odwzorowania $\pi_1 : \Gamma \rightarrow X$ oraz $\pi_2 : \Gamma \rightarrow Y$ zadane wzorami

$$\pi_1(x, Tx) = x, \quad \pi_2(x, Tx) = Tx.$$

Oba odwzorowania są liniowe i ograniczone z normą nie przekraczającą 1. Ponadto π_1 jest różnowartościowym odwzorowaniem z Γ na X . Zatem z twierdzenia o odwzorowaniu odwrotnym odwzorowanie π_1^{-1} jest ograniczone. Zauważmy, że

$$T = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}.$$

Zatem odwzorowanie T jest ograniczone jako złożenie dwu operatorów ograniczonych. \square

Przykład. Niech macierz $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$ spełnia

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 < \infty, \quad i = 1, 2, \dots,$$

tzn. wiersze macierzy A są sumowalne z kwadratem. Rozważamy $X = Y = \ell^2$. Określamy operator T na ℓ^2 wzorem

$$(Tx)(i) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x(j), \quad x = (x(j))_{j=1}^{\infty} \in \ell^2.$$

Z założenia mamy

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}x(j)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2} (|a_{ij}|^2 + |x(j)|^2) < \infty,$$

czyli wielkość $(Tx)(i)$ jest dobrze określona dla dowolnej wartości i .

Założmy, że T odwzorowuje ℓ^2 w siebie, tzn. dla x z ℓ^2 ciąg Tx również leży w ℓ^2 . Okazuje się, że wtedy T jest automatycznie operatorem ograniczonym. Rzeczywiście, sprawdzimy, że wykres operatora T jest domknięty. Posłużymy się lematem.

Lemat 6.22. *Niech T będzie odwzorowaniem liniowym z przestrzeni unormowanej X w przestrzeń unormowaną Y . Jeśli z warunków $x_n \xrightarrow{n} 0$ oraz $Tx_n \xrightarrow{n} y$ wynika, że $y = 0$, to wykres odwzorowania T jest domknięty.*

Dowód. Niech $x_n \xrightarrow{n} x$ oraz $Tx_n \xrightarrow{n} z$. Trzeba pokazać, że $z = Tx$. Mamy $x_n - x \xrightarrow{n} 0$. Ponadto $T(x_n - x) = Tx_n - Tx \xrightarrow{n} z - Tx$. Z założenia $z - Tx = 0$. \square

Niech $x_n \xrightarrow{n} 0$ oraz $Tx_n \xrightarrow{n} y$ w ℓ^2 . Mamy

$$|(Tx_n)(i)| = \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_n(j) \right| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} \|x_n\|_2 \xrightarrow{n} 0.$$

To oznacza, że $(Tx_n)(i) \xrightarrow{n} 0$ dla $i \in \mathbb{N}$. Dalej mamy

$$|(Tx_n)(i) - y(i)| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |(Tx_n)(j) - y(j)|^2 \right)^{1/2} = \|Tx_n - y\|_2 \xrightarrow{n} 0.$$

Skoro $|(Tx_n)(i) - y(i)| \xrightarrow{n} 0$ oraz $(Tx_n)(i) \xrightarrow{n} 0$, to $y(i) = 0$ dla $i \in \mathbb{N}$, czyli $y = 0$.

7 Twierdzenie Stone'a-Weierstrassa

Dla funkcji $f \in C_{\mathbb{R}}[0, 1]$ istnieją wielomiany $p_n(x)$ o współczynnikach rzeczywistych takie, że

$$p_n(x) \xrightarrow[n]{} f(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

tzn.

$$\|p_n - f\|_{\infty} \xrightarrow[n]{} 0.$$

Na przykład można przyjąć, że p_n są wielomianami Bernsteina.

$$p_n(x) = B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}.$$

Wielomiany \mathcal{P} tworzą algebrę, tzn. z warunku $p, q \in \mathcal{P}$ wynika, że $pq \in \mathcal{P}$. Niech K będzie zwartą przestrzenią topologiczną Hausdorffa, np. zwartą przestrzenią metryczną.

Definicja 7.1. *Podbiór $\mathcal{A} \subset C_{\mathbb{R}}(K)$ (lub $C(K)$) nazywamy **podalgebrą**, jeśli z warunku $f, g \in \mathcal{A}$ wynika, że $f + g$, fg oraz cf leżą w \mathcal{A} , gdzie $c \in \mathbb{R}$ (lub $c \in \mathbb{C}$).*

Uwaga 7.2. Zauważmy, że $\|fg\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty} \|g\|_{\infty}$, tzn. norma jest podmnożliwa.

Przykłady.

1. Wielomiany \mathcal{P} w $C[0, 1]$ (lub w $C[a, b]$).
2. $\mathcal{A} = \{f \in C_{\mathbb{R}}[0, 1] : f(\frac{1}{2}) = 0\}$.

Lemat 7.3. *Jeśli $\mathcal{A} \subset C_{\mathbb{R}}(K)$ jest podalgebrą, to $\overline{\mathcal{A}}$ (czyli jednostajne granice ciągów z \mathcal{A}) też jest podalgebrą.*

Dowód. Niech $f, g \in \overline{\mathcal{A}}$. Zatem istnieją ciągi $f_n, g_n \in \mathcal{A}$ takie, że $\|f_n - f\|_{\infty} \xrightarrow[n]{} 0$ oraz $\|g_n - g\|_{\infty} \xrightarrow[n]{} 0$. Mamy

$$\begin{aligned} \|f_n g_n - fg\|_{\infty} &= \|(f_n - f)(g_n - g) + f(g_n - g) + g(f_n - f)\|_{\infty} \\ &\leq \|f_n - f\|_{\infty} \|g_n - g\|_{\infty} + \|f\|_{\infty} \|g_n - g\|_{\infty} + \|g\|_{\infty} \|f_n - f\|_{\infty} \end{aligned}$$

Zatem $\|f_n g_n - fg\|_{\infty} \xrightarrow[n]{} 0$, co oznacza, że $fg \in \mathcal{A}$. Podobnie pokazujemy, że $f + g$, $cf \in \mathcal{A}$ dla $c \in \mathbb{R}$. \square

Definicja 7.4. Mówimy, że podalgebra $\mathcal{A} \subset C_{\mathbb{R}}(K)$ (lub $C(K)$) **rozdziela punkty** jeśli dla dowolnych punktów $x_1, x_2 \in K$ istnieje funkcja $f \in \mathcal{A}$ taka, że $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Definicja 7.5. Mówimy, że podalgebra $\mathcal{A} \subset C_{\mathbb{R}}(K)$ (lub $C(K)$) **nie znika** w K jeśli dla dowolnego punktu $x \in K$ istnieje funkcja $f \in \mathcal{A}$ taka, że $f(x) \neq 0$.

Przykład. Podalgebra wielomianów $\mathcal{P} \subset C[a, b]$ nie znika, bo $\mathbb{K} \in \mathcal{P}$. Podalgebra \mathcal{P} rozdziela punkty, bo funkcja x jest różnowartościowa.

Lemat 7.6. Niech $\mathcal{A} \subset C_{\mathbb{R}}(K)$ będzie podalgebrą rozdzielającą punkty i nieznikającą w K . Wtedy dla dowolnych punktów $x_1, x_2 \in K$ oraz liczb $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ można znaleźć funkcję $f \in \mathcal{A}$ spełniającą

$$f(x_1) = a_1, \quad f(x_2) = a_2.$$

Dowód. Istnieją funkcje h_1 i h_2 oraz funkcja g w \mathcal{A} takie, że

$$h_1(x_1) \neq 0, \quad h_2(x_2) \neq 0, \quad g(x_1) \neq g(x_2).$$

Określmy funkcje

$$\begin{aligned} u(x) &= g(x)h_1(x) - g(x_2)h_1(x), \\ v(x) &= g(x)h_2(x) - g(x_1)h_2(x). \end{aligned}$$

Wtedy $u, v \in \mathcal{A}$ oraz

$$\begin{aligned} u(x_1) &\neq 0, & u(x_2) &= 0, \\ v(x_1) &= 0, & v(x_2) &\neq 0. \end{aligned}$$

Zauważmy, że funkcja

$$f(x) = a_1 \frac{u(x)}{u(x_1)} + a_2 \frac{v(x)}{v(x_2)}$$

spełnia tezę lematu. □

Twierdzenie 7.7 (Stone-Weierstrass). Niech $\mathcal{A} \subset C_{\mathbb{R}}(K)$ będzie podalgebrą rozdzielającą punkty i nieznikającą w K . Wtedy \mathcal{A} leży gęsto w $C_{\mathbb{R}}(K)$, tzn. dla dowolnej ciągłej funkcji f w $C_{\mathbb{R}}(K)$ można znaleźć ciąg f_n w \mathcal{A} taki, że $f_n \xrightarrow[n]{} f$ w K . Innymi słowy $\overline{\mathcal{A}} = C_{\mathbb{R}}(K)$.

Twierdzenie ?? wynika z trzech kolejnych lematów, w których przyjmujemy założenia Tw. ?? .

Lemat 7.8. *Jeśli $f \in \overline{\mathcal{A}}$, to również $|f| \in \overline{\mathcal{A}}$.*

Dowód. Możemy założyć, że $f \neq 0$. Rozważmy

$$g = \frac{1}{2\|f\|_\infty} f.$$

Wtedy $\|g\|_\infty = \frac{1}{2}$. Zatem $|g(x)| \leq \frac{1}{2} < 1$ dla $x \in K$. Wiemy, że $g \in \overline{\mathcal{A}}$. Wystarczy pokazać, że $|g| \in \overline{\mathcal{A}}$. Z twierdzenia Weierstrassa istnieje ciąg wielomianów $p_n(y)$ taki, że

$$p_n(y) \xrightarrow[n]{} |y|, \quad -1 \leq y \leq 1.$$

Wtedy

$$p_n(g(x)) \xrightarrow[n]{} |g(x)|, \quad x \in K.$$

Rzeczywiście

$$\sup_K |p_n(g(x)) - |g(x)|| \leq \sup_{|y| \leq 1} |p_n(y) - |y|| \xrightarrow[n]{} 0.$$

Ale z Lematu ?? mamy $p_n(g(x)) \in \overline{\mathcal{A}}$. Zatem $|g(x)| \in \overline{\mathcal{A}}$. \square

Uwaga 7.9. Ciąg wielomianów przybliżający $|x|$ można wskazać jawnym wzorem. Na przykład, korzystając z rozwinięcia w szereg Taylora mamy

$$\begin{aligned} |x| &= (1 + (x^2 - 1))^{1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{1/2}{n} (x^2 - 1)^n \\ &= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n} (1 - x^2)^n. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Równość jest spełniona dla $|1 - x^2| < 1$ czyli dla $0 < |x| \leq 1$. Dla $x = 0$ szereg jest również zbieżny, bo

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n} &= \sup_N \sum_{n=0}^N \frac{1}{2n-1} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n} \\ &= \sup_N \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n-1} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n} (1 - x^2)^n \\ &\leq \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n} (1 - x^2)^n = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - |x|) = 1. \end{aligned}$$

Równość (??) jest spełniona również dla $x = 0$, ponieważ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n} \geq \sup_{|x| \leq 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n} (1-x^2)^n = \sup_{|x| \leq 1} (1-|x|) = 1.$$

W rezultacie szereg jest zbieżny jednostajnie na przedziale $[-1, 1]$ z kryterium Weierstrassa o majoryzacji, bo

$$\frac{1}{2n-1} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n} (1-x^2)^n \leq \frac{1}{2n-1} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n}.$$

Lemat 7.10. *Jeśli $f, g \in \overline{\mathcal{A}}$, to $\min(f, g)$ i $\max(f, g)$ również leżą w $\overline{\mathcal{A}}$.*

Dowód. Teza wynika z poprzedniego lematu oraz ze wzorów

$$\min(f, g) = \frac{f + g - |f - g|}{2} \quad \max(f, g) = \frac{f + g + |f - g|}{2}.$$

□

Uwaga 7.11. Z lematu wynika natychmiast, że jeśli $f_1, f_2, \dots, f_n \in \overline{\mathcal{A}}$, to $\min(f_1, f_2, \dots, f_n)$ oraz $\max(f_1, f_2, \dots, f_n)$ leżą w $\overline{\mathcal{A}}$.

Lemat 7.12. *Niech $f \in C_{\mathbb{R}}(K)$ oraz $x \in K$. Dla dowolnie wybranej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja $g_x \in \overline{\mathcal{A}}$ taka, że*

$$\begin{aligned} g_x(x) &= f(x) \\ g_x(t) &> f(t) - \varepsilon, \quad \text{dla } t \in K. \end{aligned}$$

Dowód. Na podstawie lematu ??, dla $y \in K$ istnieje funkcja $h_y \in \mathcal{VA}$ taka, że

$$h_y(x) = f(x), \quad h_y(y) = f(y).$$

Z ciągłości istnieje otoczenie otwarte U_y punktu y takie, że

$$h_y(t) > f(t) - \varepsilon, \quad \text{dla } t \in U_y.$$

Otoczenia U_y , $y \in K$ pokrywają zbiór K . Ze zwartości zbioru K można znaleźć skończone podpokrycie

$$K \subset U_{y_1} \cup U_{y_2} \cup \dots \cup U_{y_n}.$$

Określmy funkcję

$$g_x(t) = \max(h_{y_1}(t), h_{y_2}(t), \dots, h_{y_n}(t)).$$

Z uwagi po lemacie ?? wiemy, że $g_x \in \overline{\mathcal{A}}$. Mamy $g_x(x) = f(x)$. Ponadto jeśli $t \in K$, to $t \in U_{y_j}$ dla pewnej liczby $j = 1, 2, \dots, n$. Wtedy

$$g_x(t) \geq h_{y_j}(t) > f(t) - \varepsilon.$$

□

Lemat 7.13. Niech $f \in C_{\mathbb{R}}(K)$ oraz $\varepsilon > 0$. Wtedy istnieje funkcja $h \in \overline{\mathcal{A}}$ taka, że

$$\|h(x) - f(x)\| < \varepsilon, \quad \text{dla } x \in K.$$

Dowód. Z poprzedniego lematu, dla każdego punktu $x \in K$ istnieje funkcja $g_x \in \overline{\mathcal{A}}$ spełniająca

$$g_x(x) = f(x), \quad \text{oraz } g_x(t) > f(t) - \varepsilon, \quad t \in K.$$

Z ciągłości istnieje otwarte otoczenie V_x punktu x , dla którego

$$g_x(t) < f(t) + \varepsilon, \quad t \in V_x.$$

Otoczenia V_x stanowią pokrycie zbioru K . Ze zwartości znajdujemy skończone podpokrycie

$$K \subset V_{x_1} \cup V_{x_2} \cup \dots \cup V_{x_n}.$$

Określmy

$$h(t) = \min(g_{x_1}(t), g_{x_2}(t), \dots, g_{x_n}(t)).$$

Z lematu ?? funkcja h należy do $\overline{\mathcal{A}}$. Wiemy, że

$$h(t) > f(t) - \varepsilon, \quad \text{bo } g_{x_j}(t) > f(t) - \varepsilon, \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots, n.$$

Dla $t \in K$ mamy $t \in V_{x_j}$ dla pewnego $j = 1, 2, \dots, n$. Zatem

$$h(t) \leq g_{x_j}(t) < f(t) + \varepsilon.$$

W rezultacie

$$\|h(t) - f(t)\| < \varepsilon, \quad \text{dla } t \in K.$$

□

Przechodzimy teraz do przypadku funkcji o wartościach zespolonych.

Definicja 7.14. Podalgebrę $\mathcal{A} \subset C(K)$ nazywamy **samosprzężoną** jeśli z tego, że f leży w \mathcal{A} wynika, że funkcja sprzężona \bar{f} również leży w \mathcal{A} .

Twierdzenie 7.15 (Stone-Weierstrass, wersja zespolona). Jeśli \mathcal{A} jest samosprzężoną podalgebrą w $C(K)$, rozdzielającą punkty i nieznikającą, to \mathcal{A} leży gęsto w $C(K)$.

Dowód. Niech

$$\mathcal{A}_{\mathbb{R}} = \{f \in \mathcal{A} : \bar{f} = f\} \subset C_{\mathbb{R}}(K).$$

Zauważmy, że $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ jest podalgebrą w $C_{\mathbb{R}}(K)$. Sprawdzimy, że $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ spełnia założenia Twierdzenia ???. Z założenia dla $x_1 \neq x_2 \in K$ istnieje funkcja $f \in \mathcal{A}$ taka, że $f(x_1) \neq f(x_2)$. Zatem

$$\operatorname{Re} f(x_1) \neq \operatorname{Re} f(x_2) \quad \text{lub} \quad \operatorname{Im} f(x_1) \neq \operatorname{Im} f(x_2).$$

Ale $\operatorname{Re} f$ oraz $\operatorname{Im} f$ leżą w $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$, bo algebra \mathcal{A} jest samosprzężona oraz

$$\operatorname{Re} f = \frac{f + \bar{f}}{2}, \quad \operatorname{Im} f = \frac{f - \bar{f}}{2i}.$$

Stąd $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ rozdziela punkty.

Dla $x \in K$ istnieje $f \in \mathcal{A}$ taka, że $f(x) \neq 0$. Zatem

$$\operatorname{Re} f(x) \neq 0 \quad \text{lub} \quad \operatorname{Im} f(x) \neq 0.$$

Stąd $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ nie znika. Z Twierdzenia ??? algebra $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ leży gęsto w $C_{\mathbb{R}}(K)$. Niech $f \in C(K)$. Wtedy

$$f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f.$$

Każdą z funkcji $\operatorname{Re} f$ i $\operatorname{Im} f$ można przybliżać jednostajnie funkcjami z $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$. Zatem f może być przybliżona funkcjami z \mathcal{A} . \square

Przykłady.

1. Niech $K = [0, \pi]$ oraz

$$\mathcal{A} = \lim_{\mathbb{R}} \{1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \dots\}.$$

\mathcal{A} jest podalgebrą w $C_{\mathbb{R}}[0, \pi]$, bo

$$\cos nx \cos mx = \frac{1}{2} \cos(n+m)x + \frac{1}{2} \cos(n-m)x.$$

\mathcal{A} nie znika, bo $1 \in \mathcal{A}$. Ponadto \mathcal{A} rozdziela punkty, ponieważ funkcja $\cos x$ jest różnowartościowa w przedziale $[0, \pi]$. Zatem $\bar{\mathcal{A}} = C_{\mathbb{R}}[0, \pi]$.

2. Niech $K = \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Możemy przyjąć, że $\mathbb{T} = [0, 2\pi)$ przez podstawienie $z = e^{ix}$. Rozważmy

$$\mathcal{A} = \text{lin}\{e^{inx} : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Kombinację liniową funkcji e^{inx} nazywamy *wielomianem trygonometrycznym*, ze względu na równość

$$e^{inx} = \cos nx + i \sin nx.$$

\mathcal{A} jest podalgebrą w $C(\mathbb{T})$, bo $e^{inx}e^{imx} = e^{i(n+m)x}$. Algebra \mathcal{A} nie znikła, bo $1 \in \mathcal{A}$ (dla $n = 0$). Algebra \mathcal{A} rozdziela punkty, bo funkcja e^{ix} ($n = 1$) jest różnowartościowa na \mathbb{T} . Wreszcie \mathcal{A} jest samosprężona, bo $\overline{e^{inx}} = e^{-inx}$. Z Twierdzenia ?? mamy $\overline{\mathcal{A}} = C(\mathbb{T})$, tzn. każda funkcja ciągła na \mathbb{T} (równoważnie funkcja f z $C[0, 2\pi]$ taka, że $f(0) = f(2\pi)$) jest jednostajną granicą ciągu zespolonych wielomianów trygonometrycznych.

Uwaga 7.16. Niech

$$\mathcal{A}_+ = \text{lin}\{e^{inx} : n \geq 0\}.$$

\mathcal{A}_+ jest podalgebrą rozdzielającą punktu i nieznikającą w \mathbb{T} , ale \mathcal{A}_+ nie jest gęsta w $C(\mathbb{T})$. Rzeczywiście, $e^{-ix} \notin \overline{\mathcal{A}_+}$. T wynika z rozumowania poniżej. Mamy dla $n \geq 0$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ix} \overline{e^{inx}} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i(n+1)x} dx = \frac{1}{2\pi} \frac{-1}{i(n+1)} e^{-i(n+1)x} \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Zatem

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ix} \overline{f(x)} dx = 0, \quad \text{dla } f \in \mathcal{A}.$$

Stąd

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ix} \overline{f(x)} dx = 0, \quad \text{dla } f \in \overline{\mathcal{A}}.$$

Funkcja e^{-ix} nie może należeć do $\overline{\mathcal{A}}$, bo podstawiając $f(x) = e^{-ix}$ otrzymamy wynik 1.

3. Rozważmy $C_{\mathbb{R}}([0, 1] \times [0, 1])$ oraz

$$\mathcal{A} = \text{lin}_{\mathbb{R}}\{f(x)g(y) : f, g \in C_{\mathbb{R}}[0, 1]\}.$$

Rodzina \mathcal{A} składa się zatem z rzeczywistych kombinacji liniowych funkcji rozdzielonych zmiennych. \mathcal{A} jest podalgebrą, bo

$$f_1(x)g_1(y)f_2(x)g_2(y) = f_1(x)f_2(x)g_1(y)g_2(y).$$

Algebra \mathcal{A} nie znika, bo $1 \in \mathcal{A}$. Ponadto \mathcal{A} rozdziela punkty, bo jeśli $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ to funkcja $f(x, y) = x$ lub funkcja $g(x, y) = y$ rozdziela te punkty. Zatem $\overline{\mathcal{A}} = C_{\mathbb{R}}([0, 1] \times [0, 1])$.

Twierdzenie 7.17 (Stone-Weierstrass). *Założmy, że \mathcal{A} jest podalgebrą w $C_{\mathbb{R}}(K)$ rozdzielającą punkty. Wtedy zachodzi jeden z przypadków:*

(i) $\overline{\mathcal{A}} = C_{\mathbb{R}}(K)$.

(ii) Istnieje punkt x_0 w K taki, że $\overline{\mathcal{A}} = \{f \in C_{\mathbb{R}}(K) : f(x_0) = 0\}$.

Dowód. Założmy, że \mathcal{A} nie znika wtedy z Twierdzenia ?? otrzymujemy (i). W przeciwnym wypadku istnieje punkt x_0 w K taki, że $f(x_0) = 0$ dla wszystkich $f \in \mathcal{A}$. Wtedy $\overline{\mathcal{A}} \subset \{f \in C_{\mathbb{R}}(K) : f(x_0) = 0\}$. Rozważmy

$$\mathcal{A}_1 = \{f(x) + \alpha : f \in \mathcal{A}, \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Rodzina $e\mathcal{A}_1$ jest podalgebrą. Ponieważ $\mathcal{A}_1 \supset \mathcal{A}$, to \mathcal{A}_1 rozdziela punkty. Ponadto \mathcal{A}_1 nie znika, bo zawiera funkcję 1. Zatem $\overline{\mathcal{A}_1} = C_{\mathbb{R}}(K)$. Niech $g \in \{f \in C_{\mathbb{R}}(K) : f(x_0) = 0\}$. Chcemy pokazać, że $g \in \overline{\mathcal{A}}$. Ale wiemy, że $g \in \overline{\mathcal{A}_1}$. Zatem istnieją ciągi $f_n \in \mathcal{A}$ oraz $\alpha_n \in \mathbb{R}$ takie, że

$$f_n(x) + \alpha_n \xrightarrow{n} g(x).$$

Podstawiając $x = x_0$ otrzymamy $\alpha_n \xrightarrow{n} 0$. Zatem

$$f_n(x) \xrightarrow{n} g(x)$$

co oznacza, że $g \in \overline{\mathcal{A}}$. □

8 Przestrzenie sprzężone do L^p i do $C(X)$

Rozważamy przestrzenie $L^p(X, \mu)$, gdzie X jest przestrzenią z miarą σ -skończoną μ określoną na X , tzn. na pewnym σ -pierścieniu podzbiorów przestrzeni X . Jak wiadomo z kursu funkcji rzeczywistych $L^p(X, \mu)$ jest przestrzenią Banacha z normą

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|, & p = \infty. \end{cases}$$

Dla liczby $1 \leq p \leq \infty$ symbolem q oznaczamy wykładnik sprzężony, tzn. spełniający $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Przyjmujemy $q = \infty$ dla $p = 1$ oraz $q = 1$ dla $p = \infty$.

Twierdzenie 8.1. *Niech $1 \leq p < \infty$ oraz $g \in L^q(X, \mu)$. Wtedy odwzorowanie*

$$G(f) = \int_X f(x)g(x) d\mu(x)$$

jest ograniczonym funkcjonalem liniowym na przestrzeni $L^p(X, \mu)$ oraz

$$\|G\| = \|g\|_q.$$

Dowód. Dowód przeprowadzimy tylko dla $p > 1$. Możemy się ograniczyć do przypadku $g \neq 0$. Z nierówności Höldera mamy

$$\int_X |f(x)g(x)| d\mu(x) \leq \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p} \left(\int_X |g(x)|^q d\mu(x) \right)^{1/q} < \infty,$$

zatem wielkość $G(f)$ jest dobrze określona. G jest odwzorowaniem liniowym, bo wielkość $G(f)$ zależy liniowo od funkcji f . Ponadto

$$|G(f)| \leq \int_X |f(x)g(x)| d\mu(x) \leq \|g\|_q \|f\|_p,$$

czyli

$$\|G\| \leq \|g\|_q.$$

Niech $f(x) = \overline{\operatorname{sgn} g(x)} |g(x)|^{q-1}$. Wtedy

$$\int_X |f(x)|^p d\mu(x) = \int_X |g(x)|^{p(q-1)} d\mu(x) = \int_X |g(x)|^q d\mu(x) < \infty.$$

Zatem $f \in L^p(X, \mu)$ oraz $\|f\|_p^p = \|g\|_q^q$. Ponadto

$$G(f) = \int_X |g(x)|^q d\mu(x) = \|g\|_q^q.$$

Reasumując

$$\frac{G(f)}{\|f\|_p} = \frac{\|g\|_q^q}{\|g\|_q^{q/p}} = \|g\|_q.$$

Stąd $\|G\| \geq \|g\|_q$. □

8.1 Wersja rzeczywista

Naszym celem jest udowodnienie twierdzenia odwrotnego do Tw. ???. Najpierw rozważymy przypadek funkcji o wartościach rzeczywistych i miary skończonej, tzn. $\mu(X) < \infty$.

Lemat 8.2. *Załóżmy, że $\mu(X) < \infty$. Niech $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną oraz*

$$\left| \int_X g(x)\varphi(x) d\mu(x) \right| \leq M\|\varphi\|_p, \quad (8.1)$$

dla dowolnej funkcji prostej $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ (funkcja prosta przyjmuje skończenie wiele wartości). Wtedy $g \in L_{\mathbb{R}}^q(X, \mu)$.

Dowód. Rozważymy tylko przypadek $p > 1$. Chcemy udowodnić, że

$$\int |g(x)|^q d\mu(x) < \infty.$$

Istnieje rosnący ciąg nieujemnych funkcji prostych ψ_n taki, że $\psi_n(x) \xrightarrow{n} |g(x)|^q$ dla $x \in X$. Określmy

$$\varphi_n(x) = \operatorname{sgn} g(x)\psi_n(x)^{1/p}.$$

φ_n jest nadal funkcją prostą, bo $\operatorname{sgn} g(x)$ przyjmuje tylko trzy wartości. Podstawiając funkcję φ_n do nierówności (??) otrzymujemy

$$\int_X |g(x)| \psi_n(x)^{1/p} d\mu(x) \leq M \left(\int_X \psi_n(x) d\mu(x) \right)^{1/p}.$$

Dalej korzystając z $\psi_n(x)^{1/q} \leq |g(x)|$ mamy

$$\begin{aligned} \int_X \psi_n(x) d\mu(x) &= \int_X \psi_n(x)^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}} d\mu(x) \\ &\leq \int_X |g(x)| \psi_n(x)^{\frac{1}{p}} d\mu(x) \leq M \left(\int_X \psi_n(x) d\mu(x) \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Po przekształceniu dostajemy

$$\int_X \psi_n(x) d\mu(x) \leq M^q.$$

Dalej przechodząc do granicy, gdy $n \rightarrow \infty$, otrzymujemy

$$\int |g(x)|^q d\mu(x) \leq M^q.$$

□

Twierdzenie 8.3. Niech G będzie ograniczonym rzeczywistym funkcjonalem liniowym na przestrzeni $L_{\mathbb{R}}^p(X, \mu)$, gdzie X jest σ -skończoną przestrzenią miarową. Wtedy istnieje jedyna funkcja g w $L_{\mathbb{R}}^q(X, \mu)$ taka, że

$$G(f) = \int_X f(x)g(x) d\mu(x). \quad (8.2)$$

Dowód. Ograniczymy się do $p > 1$. Zaczniemy od przypadku, gdy $\mu(X) < \infty$. Wtedy każda funkcja ograniczona leży w $L_{\mathbb{R}}^p(X, \mu)$, bo jeśli $|f(x)| \leq c$, to

$$\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \leq c^p \mu(X).$$

W szczególności funkcja χ_E leży w $L_{\mathbb{R}}^p(X, \mu)$ dla dowolnego zbioru mierzalnego E . Określamy

$$\nu(E) = G(\chi_E).$$

Sprawdźmy, że funkcja zbiorów ν jest przeliczalnie addytywna i ma ograniczone wahanie. Niech $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ będzie sumą rozłącznych zbiorów E_n . Określmy $\alpha_n = \operatorname{sgn} \nu(\mathbb{1}_{E_n})$. Rozważmy funkcje

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mathbb{1}_{E_n}(x), \quad \mathbb{1}_E(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{E_n}(x).$$

Oba szeregi są zbieżne w $L^p_{\mathbb{R}}(X, \mu)$. Istotnie

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{n=1}^N \alpha_n \mathbb{1}_{E_n} \right\|_p &= \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} \alpha_n \mathbb{1}_{E_n} \right\|_p \\ &= \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} |\alpha_n|^p \mu(E_n) \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \mu(E_n) \right)^{1/p} \xrightarrow{n} 0, \end{aligned}$$

bo $\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$. Podobnie

$$\left\| \mathbb{1}_E - \sum_{n=1}^N \mathbb{1}_{E_n} \right\|_p = \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} \mathbb{1}_{E_n} \right\|_p = \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \mu(E_n) \right)^{1/p} \xrightarrow{n} 0.$$

Z ciągłości funkcjonału G wnioskujemy, że

$$G(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n G(\mathbb{1}_{E_n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \nu(\mathbb{1}_{E_n}) = \sum_{n=1}^{\infty} |\nu(E_n)|.$$

Ale

$$|G(f)| \leq \|G\| \|f\|_p$$

oraz

$$\|f\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^p \mu(E_n) \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \right)^{1/p} \leq \mu(E)^{1/p}.$$

Zatem

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\nu(E_n)| \leq \|G\| \mu(E)^{1/p} \leq \|G\| \mu(X)^{1/p}, \quad (8.3)$$

co oznacza, że ν ma ograniczone wahanie. Dalej

$$\nu(E) = G(\mathbb{1}_E) = \sum_{n=1}^{\infty} G(\mathbb{1}_{E_n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n),$$

czyli ν jest przeliczalnie addytywna.

Z nierówności (??) zastosowanej do rodziny zbiorów $E_n = \emptyset$, dla $n \geq 2$, wynika

$$|\nu(E)| \leq \|G\| \mu(E)^{1/p}.$$

Zatem miara znakowana ν jest absolutnie ciągła względem miary μ . Z twierdzenia Radona-Nikodyma istnieje więc funkcja mierzalna g , bezwzględnie całkowna względem miary μ i spełniająca

$$\nu(E) = \int_E g(x) d\mu(x) = \int_X g(x) \chi_E(x) d\mu(x),$$

czyli

$$G(\chi_E) = \int_X g(x) \chi_E(x) d\mu(x).$$

Rozważając kombinacje liniowe funkcji charakterystycznych zbiorów otrzymamy

$$G(\varphi) = \int_X g(x) \varphi(x) d\mu(x),$$

dla funkcji prostych φ . Ponieważ funkcjonal G jest ograniczony, to

$$\left| \int_X g(x) \varphi(x) d\mu(x) \right| = |G(\varphi)| \leq \|G\| \|\varphi\|_p,$$

dla funkcji prostych φ . Z lematu ?? wnioskujemy, że $g \in L^q_{\mathbb{R}}(X, \mu)$. Wykażemy wzór (?). Niech $f \in L^p_{\mathbb{R}}(X, \mu)$. Wtedy istnieje ciąg φ_n funkcji prostych taki, że $\varphi_n \xrightarrow{n} f$ w normie przestrzeni $L^p_{\mathbb{R}}(X, \mu)$ oraz $|\varphi_n(x)| \leq |f(x)|$. Wtedy

$$\begin{aligned} G(f) &= \lim_n G(\varphi_n) = \lim_n \int_X \varphi_n(x) g(x) d\mu(x) \\ &= \int_X \lim_n \varphi_n(x) g(x) d\mu(x) = \int_X f(x) g(x) d\mu(x). \end{aligned}$$

Możliwość wejścia z granicą pod znak całki wynika z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej, bo $|\varphi_n(x)g(x)| \leq |f(x)g(x)|$, a z nierówności Höldera funkcja fg jest całkowna. Funkcja g jest jedyną funkcją spełniającą (?). Rzeczywiście, załóżmy, że

$$G(f) = \int_X f(x)g(x) d\mu(x) = \int_X f(x)h(x) d\mu(x)$$

dla $g, h \in L_{\mathbb{R}}^q(X, \mu)$. Określmy funkcjonał

$$\Phi(f) = \int_X f(x)[g(x) - h(x)] d\mu(x).$$

Ale $\Phi(f) = 0$ dla $f \in L_{\mathbb{R}}^p(X, \mu)$. Z Twierdzenia ?? mamy

$$\|\Phi\| = \|g - h\|_q.$$

Zatem $g = h$ prawie wszędzie.

Przechodzimy do przypadku, gdy $\mu(X) = \infty$. Niech

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n, \quad \text{gdzie } \mu(X_n) < \infty, \quad X_n \subset X_{n+1}.$$

Wtedy możemy przyjąć, że

$$L_{\mathbb{R}}^p(X_n, \mu) \subset L_{\mathbb{R}}^p(X_{n+1}, \mu) \subset L_{\mathbb{R}}^p(X, \mu).$$

Funkcjonał G obcinamy do podprzestrzeni $L_{\mathbb{R}}^p(X_n, \mu)$ i z pierwszej części dowodu znajdujemy funkcję $g_n \in L_{\mathbb{R}}^q(X_n, \mu)$ taką, że

$$G(f) = \int_{X_n} f(x)g_n(x) d\mu(x), \quad \text{dla } f \in L_{\mathbb{R}}^p(X_n, \mu).$$

Zatem dla $f \in L_{\mathbb{R}}^p(X_n, \mu) \subset L_{\mathbb{R}}^p(X_{n+1}, \mu)$ mamy

$$\begin{aligned} G(f) &= \int_{X_n} f(x)g_n(x) d\mu(x) \\ &= \int_{X_{n+1}} f(x)g_{n+1}(x) d\mu(x) = \int_{X_n} f(x)g_{n+1}(x) d\mu(x). \end{aligned}$$

Z pierwszej części dowodu wynika, że $g_n(x) = g_{n+1}(x)$ prawie wszędzie na zbiorze X_n . Modyfikując wartości funkcji g_{n+1} na zbiorze miary zero można zażądać, aby

$$g_n(x) = g_{n+1}(x), \quad x \in X_n.$$

Wiemy, że

$$\|g_n\|_q = \|G|_{L_{\mathbb{R}}^p(X_n, \mu)}\| \leq \|G\|.$$

Określmy

$$g(x) = g_n(x), \quad \text{dla } x \in X_n.$$

Definicja funkcji g jest poprawna, bo jeśli $x \in X_m \cap X_n$, to $g_m(x) = g_n(x)$. Niech \tilde{g}_n oznacza rozszerzenie funkcji g_n na X tzn.

$$\tilde{g}_n(x) = \begin{cases} g_n(x), & \text{dla } x \in X_n, \\ 0, & \text{dla } x \in X \setminus X_n. \end{cases}$$

Wtedy $|\tilde{g}_n(x)| \nearrow_n |g(x)|$. Zatem z twierdzenia o zbieżności monotonicznej mamy

$$\begin{aligned} \int_X |g(x)|^q d\mu(x) &= \lim_n \int_X |\tilde{g}_n(x)|^q d\mu(x) \\ &= \lim_n \int_{X_n} |g_n(x)|^q d\mu(x) = \lim_n \|g_n\|_{L^q_{\mathbb{R}}(X, \mu)}^q \leq \|G\|^q < \infty. \end{aligned}$$

W rezultacie $g \in L^q_{\mathbb{R}}(X, \mu)$.

Dla funkcji $f \in L^p_{\mathbb{R}}(X, \mu)$ niech $f_n = f|_{X_n}$. Wtedy $f_n \xrightarrow[n]{} f$ w $L^p_{\mathbb{R}}(X, \mu)$. Rzeczywiście

$$\|f_n - f\|_p^p = \int_X |f_n(x) - f(x)|^p d\mu(x) = \int_{X \setminus X_n} |f(x)|^p d\mu(x) \xrightarrow[n]{} 0,$$

bo $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$. Dalej

$$\begin{aligned} \int_X f(x)g(x) d\mu(x) &= \lim_n \int_X f_n(x)g(x) d\mu(x) \\ &= \lim_n \int_{X_n} f_n(x)g(x) d\mu(x) = \lim_n G(f_n) = G(f). \end{aligned}$$

Pierwsza z powyższych równości wynika z

$$\begin{aligned} \left| \int_X f(x)g(x) d\mu(x) - \int_X f_n(x)g(x) d\mu(x) \right| \\ \leq \int_X |f(x) - f_n(x)| |g(x)| d\mu(x) \leq \|f - f_n\|_p \|g\|_q \xrightarrow[n]{} 0, \end{aligned}$$

z kolei ostatnia wynika z ciągłości funkcjonału G . Znowu jedyność funkcji g , która spełnia tezę twierdzenia wynika z Tw. ?? \square

Uwaga 8.4. Założenie o σ -skończoności miary μ nie jest potrzebne dla $p > 1$. Wyjaśnienie oparte będzie na następnym lemacie.

Lemat 8.5. *Jeśli $g \in L^p(X, \mu)$, to zbiór $\{x \in X : g(x) \neq 0\}$ jest σ -skończony.*

Dowód. Dla liczby $\delta > 0$ określamy zbiór

$$A_\delta = \{x \in X : |g(x)| \geq \delta\}.$$

Wtedy

$$\infty > \int_X |g(x)|^p d\mu(x) \geq \int_{A_\delta} |g(x)|^p d\mu(x) \geq \delta^p \int_{A_\delta} d\mu(x) = \delta^p \mu(A_\delta).$$

Zatem $\mu(A_\delta) < \infty$. Ze wzoru

$$\{x \in X : g(x) \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{\frac{1}{n}}$$

wynika teza lematu. □

Rozważmy ograniczony funkcjonal liniowy G na przestrzeni $L^p(X, \mu)$, dla $p > 1$. Istnieje ciąg funkcji $f_n \in L^p(X, \mu)$ taki, że $\|f_n\|_p = 1$ oraz $|G(f_n)| \xrightarrow{n} \|G\|$. Mnożąc f_n przez ± 1 można założyć, że $G(f_n) \geq 0$ oraz $G(f_n) \xrightarrow{n} \|G\|$. Niech

$$X_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f_n(x) \neq 0\}.$$

Z lematu zbiór X_0 jest σ -skończony.

Lemat 8.6. *Jeśli funkcja $f \in L^p_{\mathbb{R}}(X, \mu)$, $p > 1$, zeruje się na X_0 , to $G(f) = 0$.*

Dowód. Załóżmy, że istnieje funkcja $h \in L^p_{\mathbb{R}}(X, \mu)$ taka, że $G(h) \neq 0$ oraz $h|_{X_0} = 0$. Bez straty ogólności można przyjąć, że $G(h) = 1$. Wtedy dla $\alpha > 0$ mamy

$$\|G\| \geq \frac{G(f_n + \alpha h)}{\|f_n + \alpha h\|_p} = \frac{G(f_n) + \alpha}{(\|f_n\|_p^p + \alpha^p \|h\|_p^p)^{1/p}} \xrightarrow{n} \frac{\|G\| + \alpha}{(1 + \alpha^p \|h\|_p^p)^{1/p}}.$$

Po przekształceniu, korzystając z nierówności Bernoulliego, dostajemy

$$1 + \alpha^p \|h\|_p^p \geq \left(1 + \frac{\alpha}{\|G\|}\right)^p \geq 1 + p \frac{\alpha}{\|G\|}.$$

Zatem

$$\alpha^{p-1} \geq \frac{p}{\|h\|^p \|G\|}, \quad \alpha > 0,$$

co prowadzi do sprzeczności, gdy $p > 1$. \square

Opierając się na Lemacie ?? łatwo zakończyć rozumowanie. Istotnie, dla $f \in L^p_{\mathbb{R}}(X, \mu)$ możemy zapisać

$$G(f) = G(f\chi_{X_0} + f\chi_{X \setminus X_0}) = G(f\chi_{X_0}) + G(f\chi_{X \setminus X_0}) = G(f\chi_{X_0}).$$

Zauważmy, że $f\chi_{X_0} \in L^p_{\mathbb{R}}(X_0, \mu)$. Z Twierdzenia ?? istnieje więc funkcja $g_0 \in L^q_{\mathbb{R}}(X_0, \mu)$ taka, że

$$G(f) = G(f\chi_{X_0}) = \int_{X_0} f(x)g_0(x) d\mu(x).$$

Wtedy

$$G(f) = \int_X f(x)g(x) d\mu(x),$$

gdzie

$$g = \begin{cases} g_0(x), & x \in X_0, \\ 0, & x \in X \setminus X_0. \end{cases}$$

Oczywiście zachodzi $g \in L^q_{\mathbb{R}}(X, \mu)$.

8.2 Wersja zespolona

Rozważamy funkcje z $L^p(X, \mu)$ o wartościach zespolonych. Niech G będzie ograniczonym funkcjonałem liniowym na $L^p(X, \mu)$. Możemy zapisać

$$L^p(X, \mu) = L^p_{\mathbb{R}}(X, \mu) \oplus iL^p_{\mathbb{R}}(X, \mu),$$

bo dla $f \in L^p(X, \mu)$ mamy

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x), \quad f_1, f_2 \in L^p_{\mathbb{R}}(X, \mu).$$

Określmy funkcjonały G_1 i G_2 na $L^p_{\mathbb{R}}(X, \mu)$ wzorami

$$G_1(f) = \operatorname{Re} G(f), \quad G_2(f) = \operatorname{Im} G(f).$$

Funkcjonały G_1 i G_2 są ograniczone, bo

$$|G_j(f)| \leq |G(f)| \leq \|G\| \|f\|_p, \quad j = 1, 2.$$

Istnieją zatem funkcje $g_1, g_2 \in L^q_{\mathbb{R}}(X, \mu)$ takie, że

$$G_j(f) = \int_X f(x)g_j(x) d\mu(x), \quad f \in L^p_{\mathbb{R}}(X, \mu), \quad j = 1, 2.$$

Dla $f \in L^p_{\mathbb{R}}(X, \mu)$ mamy zatem

$$G(f) = G_1(f) + iG_2(f) = \int_X f(x)[g_1(x) + ig_2(x)] d\mu(x).$$

Niech $g(x) = g_1(x) + ig_2(x)$. Wtedy $g \in L^q(X, \mu)$ oraz

$$G(f) = \int_X f(x)g(x) d\mu(x), \quad f \in L^p_{\mathbb{R}}(X, \mu).$$

Zatem dla $f \in L^p(X, \mu)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} G(f) &= G(f_1 + if_2) = G(f_1) + iG(f_2) \\ &= \int_X f_1(x)g(x) d\mu(x) + i \int_X f_2(x)g(x) d\mu(x) = \int_X f(x)g(x) d\mu(x). \end{aligned}$$

8.3 Twierdzenie Riesz

Wiemy, że przestrzeń sprzężoną do $C[0, 1]$ można utożsamić z przestrzenią zespolonych funkcji $w(x)$ o wahaniiu ograniczonym, lewostronnie ciągłych w $(0, 1)$ oraz $w(0) = 0$. To twierdzenie można rozszerzyć na zwarte przestrzenie topologiczne Hausdorffa. Niech X będzie taką przestrzenią. Najmniejsze σ -ciało zawierające zbiory otwarte nazywamy σ -ciałem zbiorów borelowskich.

Definicja 8.7. Borelowską miarę skończoną (nieujemną) μ nazywamy **regularną** jeśli dla dowolnego borelowskiego zbioru A mamy

$$\mu(A) = \sup_{\substack{E \subset A \\ E \text{ domkn.}}} \mu(E) = \inf_{\substack{A \subset F \\ F \text{ otw.}}} \mu(E).$$

Miarę zespoloną o wahaniiu ograniczonym na X nazywamy regularną jeśli

$$\mu = \mu_1 - \mu_2 + i(\mu_3 - \mu_4),$$

gdzie miary μ_j dla $j = 1, 2, 3, 4$ są nieujemne i regularne. Rodzinę takich miar oznaczamy symbolem $M(X)$.

Twierdzenie 8.8 (F. Riesz). *Niech X będzie zwartą przestrzenią topologiczną Hausdorffa. Każdy ograniczony funkcjonal liniowy φ na przestrzeni $C(X)$ ma postać*

$$\varphi(x) = \int_X f(x) d\mu(x)$$

dla pewnej zespolonej borelowskiej miary regularnej o wahanu ograniczonym na X .

Dowód. Patrz □

9 Słaba zbieżność w przestrzeniach unormowanych

9.1 Słaba zbieżność ciągów

Niech X^* oznacza przestrzeń sprzężoną do przestrzeni unormowanej X .

Definicja 9.1. *Mówimy, że ciąg $x_n \in X$ jest **słabo zbieżny** do elementu $x \in X$, jeśli dla dowolnego funkcjonału $x^* \in X^*$ mamy $x^*(x_n) \xrightarrow{n} x^*(x)$.*

Uwaga 9.2. Jeśli $x_n \xrightarrow{n} x$ w normie przestrzeni X , to $x^*(x_n) \xrightarrow{n} x^*(x)$ dla $x^* \in X^*$.

Twierdzenie 9.3. *Każdy ciąg słabo zbieżny jest ograniczony.*

Dowód. Rozważmy ciąg $x_n \in X$ słabo zbieżny do x . Elementy x_n wyznaczają funkcjonały liniowe φ_n na X^* wzorem

$$\varphi_n(x^*) = x^*(x_n).$$

Traktujemy φ_n jako operatory liniowe z przestrzeni Banacha X^* (por. Wniosek ??) w \mathbb{C} . Operatory φ_n są ograniczone punktowo, bo

$$\varphi_n(x^*) = x^*(x_n) \xrightarrow{n} x^*(x),$$

zatem ciąg liczb $\varphi_n(x^*)$ jest ograniczony, jako ciąg zbieżny. Z twierdzenia Banacha-Steinhausa normy $\|\varphi_n\|$ są wspólnie ograniczone. Ale z Wniosku ?? wynika, że

$$\|\varphi_n\| = \sup_{\|x^*\| \leq 1} |\varphi_n(x^*)| = \sup_{\|x^*\| \leq 1} |x^*(x_n)| = \|x_n\|.$$

□

Przykład. Niech \mathcal{H} będzie przestrzenią Hilberta z bazą ortonormalną $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Dla $x \in \mathcal{H}$ mamy

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2,$$

zatem $\langle x, e_n \rangle \xrightarrow{n} 0$. To oznacza, że ciąg e_n jest słabo zbieżny do zera.

Fakt 9.4. Ciąg x_n w przestrzeni Hilberta \mathcal{H} jest słabo zbieżny do elementu x wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg liczb $\|x_n\|$ jest ograniczony oraz $\langle x_n, e_j \rangle \xrightarrow{n} \langle x, e_j \rangle$ dla $j \in \mathbb{N}$, gdzie $\{e_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ jest bazą ortonormalną przestrzeni \mathcal{H} .

Dowód. Implikacja (\Rightarrow) wynika z ostatniego przykładu i Twierdzenia ??.

Dla dowodu implikacji (\Leftarrow) niech $c = \sup_n \|x_n\| + \|x\|$ oraz $\mathcal{F} = \text{lin}\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Z założenia mamy

$$\langle x_n, y \rangle \xrightarrow{n} \langle x, y \rangle, \quad y \in \mathcal{F}.$$

\mathcal{F} jest gęstą podprzestrzenią w \mathcal{H} . Niech $y \in \mathcal{H}$ oraz $\varepsilon > 0$. Wtedy istnieje element $y_0 \in \mathcal{F}$ taki, że $\|y - y_0\| < \varepsilon/2c$. Wtedy

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle| &\leq |\langle x_n - x, y \rangle| \leq |\langle x_n - x, y - y_0 \rangle| + |\langle x_n - x, y_0 \rangle| \\ &\leq \|x_n - x\| \|y - y_0\| + |\langle x_n, y_0 \rangle - \langle x, y_0 \rangle| \leq \frac{\varepsilon}{2} + |\langle x_n, y_0 \rangle - \langle x, y_0 \rangle|. \end{aligned}$$

Wybierzmy teraz $N > 0$ tak, aby dla $n > N$ zachodziła nierówność

$$|\langle x_n, y_0 \rangle - \langle x, y_0 \rangle| < \varepsilon/2.$$

□

Fakt 9.5. W przestrzeni $C(X)$, gdzie X jest zwartą przestrzenią Hausdorffa, ciąg funkcji f_n jest słabo zbieżny do funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy liczby $\|f_n\|_{\infty}$ są wspólnie ograniczone oraz ciąg f_n jest zbieżny punktowo, tzn. $f_n(x) \xrightarrow{n} f(x)$ dla $x \in X$.

Dowód.

(\Rightarrow) Z Twierdzenia ?? ciąg norm $\|f_n\|_{\infty}$ jest ograniczony. Z założenia mamy

$$\int_X f_n(x) d\mu(x) \xrightarrow{n} \int_X f(x) d\mu(x),$$

dla dowolnej miary $\mu \in M(X)$ (por Def. ??). Ustalmy $x \in X$ i rozważmy miarę $\mu = \delta_x$, gdzie

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Ponieważ $\delta_x \in M(X)$, to

$$f_n(x) = \int_X f_n(t) d\delta_x(t) \xrightarrow{n} \int_X f(t) d\delta_x(t) = f(x).$$

(\Leftarrow) Wystarczy udowodnić, że

$$\int_X f_n(x) d\mu(x) \xrightarrow{n} \int_X f(x) d\mu(x) \quad (9.1)$$

dla miar nieujemnych $\mu \in M(X)$. Z założenia $|f_n(x)| \leq c$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $x \in X$. Zatem z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej wynika (??). \square

Twierdzenie 9.6. *Niech X będzie przestrzenią unormowaną. Jeśli przestrzeń X^* jest ośrodkowa, to X też jest ośrodkowa.*

Dowód. Niech $\{x_n^*\}_{n=1}^\infty$ będzie gęstym podzbiorem w X^* . Wybierzmy elementy $x_n \in X_n$ spełniające $\|x_n\| = 1$ oraz $|x_n^*(x_n)| \geq \frac{1}{2}\|x_n^*\|$. Niech \mathcal{A} oznacza rodzinę wszystkich kombinacji liniowych, o zespolonych współczynnikach wymiernych, elementów ciągu $\{x_n\}_{n=1}^\infty$. Zbiór \mathcal{A} jest wtedy przeliczalny. Pokażemy, że zbiór \mathcal{A} leży gęsto w X . Rozważmy domknięcie $\overline{\mathcal{A}}$ w X . Ten zbiór jest podprzestrzenią liniową, bo $\overline{\mathcal{A}}$ zawiera skończone kombinacje liniowe elementów z $\{x_n\}_{n=1}^\infty$. Załóżmy, że $\overline{\mathcal{A}} \subsetneq X$. Wtedy z Wniosku ?? istnieje funkcjonał $x^* \neq 0$ taki, że $x^*|_{\overline{\mathcal{A}}} = 0$. Zatem

$$\begin{aligned} \|x_n^* - x^*\| &\geq |(x_n^* - x^*)(x_n)| = |x_n^*(x_n) - \underbrace{x^*(x_n)}_0| \\ &= |x_n^*(x_n)| \geq \frac{1}{2}\|x_n^*\| \geq \frac{1}{2}(\|x^*\| - \|x_n^* - x^*\|). \end{aligned}$$

Po przekształceniu otrzymujemy

$$\|x_n^* - x^*\| \geq \frac{1}{3}\|x^*\| > 0$$

co jest sprzeczne z założeniem o gęstości ciągu $\{x_n^*\}_{n=1}^\infty$. \square

Uwaga 9.7. Przestrzeń sprzężona do przestrzeni ośrodkowej nie musi być ośrodkowa. Np. niech $X = \ell^1$. Wtedy podzbiór

$$\mathcal{A} = \left\{ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty, x_n \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q} \right\}$$

jest przeliczalny i gęsty w X . Przestrzeń sprzężona $X^* = \ell^{\infty}$ (patrz Rozdział 4) nie jest ośrodkowa. Istotnie dla podzbiorów $B_1 \neq B_2 \subset \mathbb{N}$ mamy

$$\|\mathbb{1}_{B_1} - \mathbb{1}_{B_2}\|_{\infty} = 1.$$

W ten sposób otrzymujemy kontinuum elementów w ℓ^{∞} takich, że odległość pomiędzy każdymi dwoma elementami wynosi 1. Zatem ℓ^{∞} nie jest ośrodkowa. Przypomnijmy, że z rozdziału 4 wynika, że

$$c_0^* = \ell^1, \quad (\ell^1)^* = \ell^{\infty}.$$

Definicja 9.8. Rozważmy $x_n^* \in X^*$ dla przestrzeni unormowanej X . Mówimy, że ciąg funkcyjałów x_n^* jest ***-słabo zbieżny** do funkcyjału $x^* \in X^*$ jeśli $x_n^*(x) \xrightarrow{n} x^*(x)$, dla każdego elementu $x \in X$.

Uwaga 9.9. Bezpośrednio z twierdzenia Banacha-Steinhausa wynika, że każdy *-słabo zbieżny ciąg funkcyjałów liniowych na przestrzeni Banacha jest ograniczony.

Przykład. Rozważmy przestrzeń $C[0, 1]$ i funkcyjały związane miarami

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{\frac{k}{n}}.$$

Wtedy

$$\int_0^1 f(x) d\mu_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n} \int_X f(x) dx.$$

To oznacza, że ciąg miar μ_n jest *-słabo zbieżny do miary Lebesgue'a na $[0, 1]$.

Uwaga 9.10. Przestrzeń unormowaną X można utożsamić z podprzestrznią $X^{**} = (X^*)^*$. Istotnie, dla $x \in X$ określamy funkcyjał φ_x na X^* wzorem

$$\varphi_x(x^*) = x^*(x).$$

Funkcjonał φ_x jest liniowy. Ponadto

$$\|\varphi_x\|_{X^{**}} = \sup_{\|x^*\|_{X^*} \leq 1} |\varphi_x(x^*)| = \sup_{\|x^*\|_{X^*} \leq 1} |x^*(x)| = \|x\|_X.$$

Zatem przestrzeń X można włożyć izometrycznie w X^{**} .

Definicja 9.11. *Mówimy, że przestrzeń unormowana X jest **refleksywna** jeśli $X^{**} = X$.*

Przykład. Rozważmy przestrzeń $L^p(X, \mu)$ dla $1 < p < \infty$. Wtedy

$$(L^p)^* = L^q, \quad \text{gdzie } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad 1 < q < \infty.$$

zatem $(L^q)^* = L^p$, czyli L^p jest refleksywna.

Niech (X, μ) będzie σ -skończona, ale przestrzeń $L^1(X, \mu)$ ma nieskończony wymiar. Przestrzeń $L^1(X, \mu)$ jest wtedy ósrodkowa. Mamy $(L^1)^* = L^\infty$. Ale przestrzeń L^∞ nie jest ósrodkowa, zatem z Twierdzenia ?? przestrzeń $(L^\infty)^*$ również nie jest ósrodkowa. W związku z tym $(L^\infty)^* \neq L^1$, czyli L^1 nie jest przestrzenią refleksywną.

Twierdzenie 9.12 (Banach-Alaoglu). *Niech X będzie ósrodkową przestrzenią unormowaną. Z każdego ograniczonego ciągu x_n^* funkcjonałów liniowych na X można wybrać podciąg $*$ -słabo zbieżny.*

Dowód. Oznaczmy $c = \sup_n \|x_n^*\|_{X^*}$. Niech $\{y\}_{n=1}^\infty$ będzie gęstym podzbiorem w X . Każdy z ciągów liczbowych $\{x_n^*(y_j)\}_{n=1}^\infty$ jest ograniczony. Stosując metodę przekątniową można wybrać rosnący ciąg liczb naturalnych n_k taki, że każdy z ciągów $\{x_{n_k}^*(y_j)\}_{k=1}^\infty$ jest zbieżny. Pokażemy, że podciąg $x_{n_k}^*$ jest $*$ -słabo zbieżny. W tym celu sprawdzimy, że dla dowolnego elementu $x \in X$ ciąg liczb $x_{n_k}^*(x)$ spełnia warunek Cauchy'ego. Ustalmy liczbę $\varepsilon > 0$. Z gęstości istnieje element y_j taki, że

$$\|x - y_j\| < \frac{\varepsilon}{4c}.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} |x_{n_k}^*(x) - x_{n_l}^*(x)| &\leq |x_{n_k}^*(x - y_j)| + |x_{n_k}^*(y_j) - x_{n_l}^*(y_j)| + |x_{n_l}^*(y_j - x)| \\ &\leq c \cdot \frac{\varepsilon}{4c} + |x_{n_k}^*(y_j) - x_{n_l}^*(y_j)| + c \cdot \frac{\varepsilon}{4c} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

dla dużych k i l . Zatem ciąg $x_{n_k}^*(x)$ jest zbieżny. Określmy

$$\varphi(x) = \lim_k x_{n_k}^*(x).$$

Wtedy φ jest funkcjonałem liniowym na X . Ponadto

$$|\varphi(x)| = |\lim_k x_{n_k}^*(x)| \leq c\|x\|.$$

Zatem $\varphi \in X^*$. □

Uwaga 9.13. Założenie óśrodkowości jest istotne. Rozważmy ciąg funkcyjonałów $\{\delta_n\}_{n=1}^\infty$ na ℓ^∞ , określonych wzorem $\delta_n(x) = x_n$ dla $x \in \ell^\infty$. Mamy $\|\delta_n\|_{(\ell^\infty)^*} = 1$. Jednak ciąg $\{\delta_n\}_{n=1}^\infty$ nie zawiera podciągu $*$ -słabo zbieżnego.

9.2 Słabe topologie

Definicja 9.14. *Słabą topologią w przestrzeni unormowanej X nazywamy najslabszą topologię, w której wszystkie funkcyjonały $x^* \in X^*$ są ciągłe, względem metryki określonej przez normę przestrzeni X .*

Uwaga 9.15. Najslabsza topologia to taka, która ma najmniej zbiorów otwartych.

Dla ustalonego funkcyjonału $x_0^* \in X^*$ oraz $a \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$ zbiór

$$V_{x_0^*; a, \varepsilon} = \{y \in X : |x_0^*(y) - a| < \varepsilon\}$$

jest otwarty w słabej topologii jako przeciwobraz otwartego koła $\{z \in \mathbb{C} : |z - a| < \varepsilon\}$ przez funkcyjonał x_0^* .

Dla elementu $x \in X$ **bazą otoczeń** w słabej topologii jest rodzina zbiorów postaci:

$$U_{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*; \varepsilon} = \{y \in Y : \max_{1 \leq j \leq n} |x_j^*(y) - x_j^*(x)| < \varepsilon\}$$

gdzie $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ są ustalonymi funkcyjonałami w X^* a liczba ε jest dodatnia. Zbiór ten jest otwarty, bo przyjmując oznaczenie $a_j = x_j^*(x)$ mamy

$$U_{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*; \varepsilon} = V_{x_1^*; a_1, \varepsilon} \cap V_{x_2^*; a_2, \varepsilon} \cap \dots \cap V_{x_n^*; a_n, \varepsilon}. \quad (9.2)$$

To oznacza, że element y leży „blisko” elementu x w słabej topologii, gdy mierzymy odległość za pomocą skończonej liczby funkcyjonałów linowych $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$. Słaba topologia jest w szczególności słabsza niż topologia w przestrzeni X wyznaczona przez metrykę.

Twierdzenie 9.16. *Kula $B = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ jest zbiorem domkniętym w słabej topologii.*

Dowód. Niech $x \notin B$, tzn. $\|x\| > 1$. Z Twierdzenia ??(c) istnieją rzeczywisty ograniczony funkcjonal liniowy φ oraz liczba rzeczywista α takie, że

$$\varphi(x) < \alpha < \varphi(y), \quad y \in B.$$

Niech $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) - i\varphi(ix)$. Wtedy $\tilde{\varphi}$ jest funkcjonałem ograniczonym liniowym względem \mathbb{C} . Rzeczywiście, $\tilde{\varphi}$ jest liniowy względem \mathbb{R} oraz

$$\tilde{\varphi}(ix) = \varphi(ix) + i\varphi(x) = i\tilde{\varphi}(x).$$

Zatem $\tilde{\varphi} \in X^*$. Ponadto

$$\operatorname{Re} \tilde{\varphi}(x) < \alpha < \operatorname{Re} \tilde{\varphi}(y), \quad y \in B.$$

Niech

$$U = \{y \in X : \operatorname{Re} \tilde{\varphi}(y) < \alpha\}.$$

Wtedy U jest otwarty w słabej topologii, bo jeśli $\tilde{\varphi}$ jest ciągły, to $\operatorname{Re} \tilde{\varphi}$ też. Ponadto $x \in U$ oraz $U \cap B = \emptyset$. Tzn. x leży poza zbiorem B wraz z pewnym otoczeniem, czyli B jest zbiorem domkniętym. \square

Uwaga 9.17. Kula otwarta $\{x \in X : \|x\| < 1\}$ nie jest zbiorem otwartym w słabej topologii, o ile przestrzeń X ma nieskończony wymiar. Istotnie pokażemy, że zbiór postaci (??) jest nieograniczony, tzn. zawiera elementy o dowolnie dużej normie. Rozważmy jeden taki zbiór. Istnieje element $x \neq 0$ w X taki, że

$$x_1^*(x) = x_2^*(x) = \dots = x_n^*(x) = 0.$$

Wtedy $\mathbb{C}x \subset U_{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*; \varepsilon}$, ale $\mathbb{C}x \not\subset B$.

Uwaga 9.18. Niech $\dim X = \infty$ oraz $S = \{x \in X : \|x\| = 1\}$. Wtedy domknięcie S w słabej topologii jest równe $B = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$.

Definicja 9.19. **-słabą topologią na X^* nazywamy najszlubszą topologię, w której funkcjonały $X^* \ni x^* \mapsto x^*x(x) \in \mathbb{C}$ są ciągłe dla każdego $x \in X$.*

Uwaga 9.20. *-słaba topologia pokrywa się ze słabą topologią na X^* jeśli przestrzeń X jest refleksywna.

Dla $x_0 \in X$ oraz liczb $a \in \mathbb{C}$ i $\varepsilon > 0$ zbiór

$$V_{x_0; a, \varepsilon} = \{y^* \in X^* : |y^*(x_0) - a| < \varepsilon\}$$

jest otwarty w $*$ -słabej topologii. Bazą otoczeń funkcjonału x^* jest rodzina zbiorów

$$U_{x_1, x_2, \dots, x_n; \varepsilon}(x^*) = \{y^* \in Y^* : \max_{1 \leq j \leq n} |y^*(x_j) - x^*(x_j)| < \varepsilon\},$$

gdzie x_1, x_2, \dots, x_n są ustalonymi elementami w X a liczba ε jest dodatnia. Funkcjonał y^* leży „blisko” funkcjonału x^* jeśli wartości funkcjonałów w punktach x_1, x_2, \dots, x_n są bliskie sobie.

Twierdzenie 9.21. *Kula $B^* = \{x^* \in X^* : \|x^*\| \leq 1\}$ jest domknięta w $*$ -słabej topologii.*

Uwaga 9.22. $*$ -słaba topologia na X^* jest słabsza niż słaba topologia na X^* , bo $X \subset X^{**}$.

Dowód. Niech $x^* \notin B^*$. Tzn. $\|x^*\| > 1$. Zatem istnieje element $x \in X$ taki, że $\|x\| = 1$ oraz $|x^*(x)| > 1$. Niech

$$U = \{y^* \in X^* : |y^*(x)| > 1\}.$$

Zbiór U jest otwarty w $*$ -słabej topologii oraz $x^* \in U$. Ponadto dla $y^* \in B^*$ mamy

$$|y^*(x)| \leq \|y^*\| \|x\| \leq 1.$$

Zatem $U \cap B^* = \emptyset$. □

Twierdzenie 9.23 (Banach-Alaoglu). *Kula $B^* = \{x^* \in X^* : \|x^*\| \leq 1\}$ jest zwarta w $*$ -słabej topologii.*

Dowód. Niech

$$V = \prod_{x \in X} \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|x\|\}$$

będzie iloczynem kartezjańskim kół domkniętych w płaszczyźnie zespolonej z topologią produktową. Z Twierdzenia Tichonowa V jest zwartą przestrzenią topologiczną jako iloczyn kartezjański zbiorów zwartych. Rozważmy odwzorowanie $\varphi : B^* \rightarrow V$ zadane wzorem

$$\varphi(x^*) = \{x^*(x)\}_{x \in X} \in V.$$

Warunek $\varphi(x^*) \in V$ jest spełniony, bo

$$|x^*(x)| \leq \|x^*\| \|x\| \leq \|x\|.$$

Odwzorowanie φ jest ciągłe, gdy w B^* mamy $*$ -słabą topologię, co wynika bezpośrednio z określenia tejże topologii. Sprawdźmy, że obraz $\varphi(B^*)$ jest domkniętym podzbiorem w V . W tym celu rozważmy ciąg uogólniony $\varphi(x_\alpha^*)$ w $\varphi(B^*)$. Załóżmy, że ciąg uogólniony $\varphi(x_\alpha^*)$ jest zbieżny w V . Ale

$$\varphi(x_\alpha^*) = \left(x_\alpha^*(x)\right)_{x \in X}.$$

To oznacza, że dla każdego elementu $x \in X$ ciąg uogólniony liczb $x_\alpha^*(x)$ jest zbieżny. Oznaczmy

$$\eta(x) = \lim_{\alpha} x_\alpha^*(x).$$

W ten sposób otrzymaliśmy funkcjonal η określony na X . Pokażemy, że $\eta \in B^*$. Sprawdźmy liniowość funkcjonału η . Dla $x, y \in X$ oraz $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ mamy

$$\begin{aligned} \eta(\lambda x + \mu y) &= \lim_{\alpha} x_\alpha^*(\lambda x + \mu y) = \lim_{\alpha} [\lambda x_\alpha^*(x) + \mu x_\alpha^*(y)] \\ &= \lambda \lim_{\alpha} x_\alpha^*(x) + \mu \lim_{\alpha} x_\alpha^*(y) = \lambda \eta(x) + \mu \eta(y). \end{aligned}$$

Wiemy, że $|\eta(x)| \leq \|x\|$, bo $|x_\alpha^*(x)| \leq \|x\|$. Zatem $\|\eta\| \leq 1$. Zatem $\eta \in B^*$ co kończy dowód domkniętości zbioru $\varphi(B^*)$.

Zauważmy, że odwzorowanie φ jest różnowartościowe. Rzeczywiście, jeśli $\varphi(x^*) = \varphi(y^*)$ to $x^*(x) = y^*(x)$ dla wszystkich $x \in X$. Wtedy $x^* = y^*$. Z określenia $*$ -słabej topologii wynika zatem, że φ jest homeomorfizmem z B^* na $\varphi(B^*)$. Ale $\varphi(B^*)$ jest zbiorem zwartym jako domknięty podzbiór zwartej przestrzeni topologicznej V . Zatem również B^* jest zwarty w $*$ -słabej topologii. \square

Przykład. Rozważmy $X = \ell^\infty$ i funkcjonały $\delta_n \in X^*$ określone wzorem

$$\delta_n(x) = x_n, \quad x \in \ell^\infty.$$

Mamy $\|\delta_n\|_{X^*} = 1$, czyli $\delta_n \in B^*$. Wiemy, że B^* jest zbiorem zwartym w $*$ -słabej topologii. Ze zwartości ciąg δ_n ma punkt skupienia w X^* . Jednakże δ_n nie posiada podciągu zbieżnego $*$ -słabo. Istotnie, załóżmy nie wprost, że δ_n ma podciąg $*$ -słabo zbieżny δ_{n_k} dla $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$. Określmy

$$x_n = \begin{cases} (-1)^k, & n = n_k \\ 0, & n \neq n_k \end{cases}.$$

Wtedy $x \in \ell^\infty$, ale $\delta_{n_k}(x) = x_{n_k} = (-1)^k$ nie jest zbieżny. Tzn. ciąg δ_{n_k} nie jest $*$ -słabo zbieżny.

10 Twierdzenie Arzeli-Ascoliego

Niech K będzie zwartą przestrzenią topologiczną Hausdorffa. Rozważamy przestrzeń $C_{\mathbb{R}}(K)$ z normą

$$\|f\|_{\infty} = \max_{x \in K} |f(x)|.$$

Przypomnimy znane twierdzenie z topologii.

Twierdzenie 10.1. *Podzbiór A w przestrzeni metrycznej (X, d) jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy z każdego ciągu elementów z A można wybrać podciąg zbieżny do pewnego elementu z A .*

Definicja 10.2. *Podzbiór A przestrzeni metrycznej nazywamy **warunkowo zwartym** jeśli domknięcie \bar{A} jest zbiorem zwartym.*

Symbolem $B(x, \varepsilon)$ będziemy oznaczać otwartą kulę o środku w x i promieniu ε czyli

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}.$$

Twierdzenie 10.3. *Podzbiór A w przestrzeni metrycznej zupełnej (X, d) jest warunkowo zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest **całkowicie ograniczony**, tzn. dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieją punkty $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ takie, że*

$$A \subset B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon) \cup \dots \cup B(x_n, \varepsilon).$$

Uwaga 10.4. Zbiór jest całkowicie ograniczony, jeśli można go pokryć skończoną liczbą kul o dowolnie małym promieniu.

Dowód.

(\implies) Ustalmy $\varepsilon > 0$. Wtedy

$$\bar{A} \subset \bigcup_{x \in X} B(x, \varepsilon).$$

Ze zwartości zbioru \bar{A} istnieje skończone podpokrycie

$$A \subset \bar{A} \subset B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon) \cup \dots \cup B(x_n, \varepsilon).$$

(\impliedby) Skorzystamy z Twierdzenia ???. Niech y_n będzie ciągiem elementów z A . Pokażemy, że y_n zawiera podciąg zbieżny. Dla $\varepsilon = \frac{1}{2}$ mamy z założenia

$$\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A \subset B(x_1, \frac{1}{2}) \cup B(x_2, \frac{1}{2}) \cup \dots \cup B(x_m, \frac{1}{2}).$$

Przynajmniej jedna z kul, np. $B(x_j, \frac{1}{2})$ zawiera nieskończony podciąg $\{y_n^{(1)}\}$ ciągu $\{y_n\}$. Dalej dla $\varepsilon = 2^{-2}$ wiemy, że podciąg $\{y_n^{(1)}\} \subset A$ jest zawarty w skończonej liczbie kul o promieniu 2^{-2} . Zatem jedna z takich kul zawiera nieskończony podciąg $\{y_n^{(2)}\}$ ciągu $\{y_n^{(1)}\}$. Postępując tak dalej otrzymamy rodzinę podciągów $\{y_n^{(m)}\}$ takich, że $\{y_n^{(m+1)}\}$ jest podciągami ciągu $\{y_n^{(m)}\}$ oraz $\{y_n^{(m)}\}$ jest zawarty w kuli o promieniu 2^{-m} .

Stosując metodę przekątniową okreśmy ciąg $z_n = y_n^{(n)}$. Wtedy ciąg $\{z_n\}$ jest podciągami ciągu $\{y_n\}$. Sprawdzimy, że z_n spełnia warunek Cauchy'ego. Dla $n > m$ elementy z_n i z_m leżą w kuli o promieniu 2^{-m} , zatem

$$d(z_n, z_m) \leq \frac{2}{2^m}.$$

Z założenia zupełności ciąg z_n jest zbieżny. □

Przykłady.

1. Rozważmy przestrzeń $X = C_{\mathbb{R}}[0, 2\pi]$ oraz ciąg funkcji

$$f_n(x) = \sin nx.$$

Ponieważ

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\sin nx - \sin mx)^2 dx = 2$$

to

$$\|f_n - f_m\|_{\infty} \geq 1.$$

Zatem f_n nie posiada podciągu zbieżnego jednostajnie. Można udowodnić, że nawet nie istnieje podciąg zbieżny punktowo.

2. Niech $X = C_{\mathbb{R}}[0, 1]$. oraz

$$f_n(x) = \frac{x}{x + (1 - nx)^2}.$$

Wtedy $f_n(x) \xrightarrow{n} 0$ dla $0 \leq x \leq 1$. Jednak f_n nie posiada podciągu zbieżnego jednostajnie, bo taki podciąg musiałby być zbieżny do 0, a przecież dla $x = \frac{1}{n}$ mamy $f_n(\frac{1}{n}) = 1$.

Definicja 10.5. Rodzinę funkcji $\mathcal{A} \subset C_{\mathbb{R}}(K)$ nazywamy **jednakowo ciągłą**, jeśli dla każdego punktu $x \in K$ i liczby $\varepsilon > 0$ istnieje otwarte otoczenie U punktu x takie, że

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon, \quad y \in U, \quad f \in \mathcal{A}.$$

Uwaga 10.6. Zbiór U , zależny od x oraz ε , jest wybrany dla wszystkich funkcji $f \in \mathcal{A}$. Na tym polega jednakowa ciągłość.

Definicja 10.7. Rodzina $\mathcal{A} \subset C_{\mathbb{R}}(K)$ jest **ograniczona** jeśli istnieje stała liczba M taka, że

$$\|f\|_{\infty} \leq M, \quad f \in \mathcal{A}.$$

Twierdzenie 10.8 (Arzelà-Ascoli). Rodzina funkcji $\mathcal{A} \subset C_{\mathbb{R}}(K)$ jest warunkowo zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy \mathcal{A} jest jednakowo ciągła i ograniczona.

Dowód.

(\Rightarrow) Ustalmy liczbę $\varepsilon > 0$. Z Twierdzenia ?? istnieją funkcje $f_1, f_2, \dots, f_n \in C_{\mathbb{R}}(K)$ takie, że

$$\mathcal{A} \subset B\left(f_1, \frac{\varepsilon}{3}\right) \cup B\left(f_2, \frac{\varepsilon}{3}\right) \cup \dots \cup B\left(f_n, \frac{\varepsilon}{3}\right). \quad (10.1)$$

W szczególności zbiór \mathcal{A} jest ograniczony przez

$$M = \max_{1 \leq j \leq n} \|f_j\|_{\infty} + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ustalmy $x \in K$. Istnieją otwarte otoczenia U_1, U_2, \dots, U_n takie, że

$$|f_j(y) - f_j(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad y \in U_j, j = 1, 2, \dots, n.$$

Niech $U = U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n$. Wtedy U jest otwartym otoczeniem punktu x oraz

$$|f_j(y) - f_j(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad y \in U, j = 1, 2, \dots, n.$$

Niech $f \in \mathcal{A}$. Wtedy z (??) mamy $f \in B\left(f_j, \frac{\varepsilon}{3}\right)$ dla pewnego $j = 1, 2, \dots, n$. Zatem dla $y \in U$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} & |f(y) - f(x)| \\ & \leq |f(y) - f_j(y)| + |f_j(y) - f_j(x)| + |f_j(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

(\Leftarrow) Pokażemy, że rodzinę \mathcal{A} można pokryć skończoną liczbą kul o promieniu $\varepsilon > 0$. Rodzina \mathcal{A} jest ograniczona przez pewną stałą M , tzn.

$$|f(x)| \leq M, \quad f \in \mathcal{A}, x \in K.$$

Rodzina \mathcal{A} jest jednakowo ciągła, więc dla każdego elementu $x \in K$ istnieje otoczenie $U_x \ni x$ takie, że mamy

$$|f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad f \in \mathcal{A}, \quad y \in U_x. \quad (10.2)$$

Ponieważ

$$K = \bigcup_{x \in K} U_x,$$

to ze zwartości zbioru K otrzymujemy

$$K \subset U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \dots \cup U_{x_n} \quad (10.3)$$

dla pewnych punktów x_1, x_2, \dots, x_n . Podzielmy przedział wartości $[-M, M]$ na części punktami y_1, y_2, \dots, y_m tak, że

$$-M = t_0 < y_1 < \dots < y_m = M, \quad y_j - y_{j-1} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Wykres każdej z funkcji $f \in \mathcal{A}$ leży w iloczynie kartezjańskim $K \times [-M, M]$. Rozważmy ciąg n wskaźników (j_1, j_2, \dots, j_n) , z których każdy pochodzi z $\{1, 2, \dots, m\}$. Dla takiego ciągu określamy podzbiór w $C_{\mathbb{R}}(K)$ wzorem

$$B_{j_1, j_2, \dots, j_n} = \{f \in C_{\mathbb{R}}(K) : f(x_1) \in [y_{j_1-1}, y_{j_1}], \\ f(x_2) \in [y_{j_2-1}, y_{j_2}], \dots, f(x_n) \in [y_{j_n-1}, y_{j_n}]\}.$$

Każda funkcja z \mathcal{A} należy do pewnego zbioru postaci B_{j_1, j_2, \dots, j_n} , czyli

$$\mathcal{A} = \bigcup_{j_1, j_2, \dots, j_n=1}^m B_{j_1, j_2, \dots, j_n} \cap \mathcal{A}.$$

Zbadamy średnicę zbioru $B_{j_1, j_2, \dots, j_n} \cap \mathcal{A}$. Niech $f, g \in B_{j_1, j_2, \dots, j_n} \cap \mathcal{A}$ oraz $x \in K$. Wtedy z (??) wynika, że $x \in U_{x_k}$ dla pewnego $k = 1, 2, \dots, n$. Dalej z (??) i z określenia zbiorów B_{j_1, j_2, \dots, j_n} wnioskujemy, że

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - f(x_k)| + |f(x_k) - g(x_k)| + |g(x_k) - g(x)| \\ < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Zatem średnica zbioru $B_{j_1, j_2, \dots, j_n} \cap \mathcal{A}$ jest nie większa niż ε co oznacza, że ten zbiór jest zawarty w pewnej kuli o promieniu ε . \square

Przykład. Niech

$$\mathcal{A} = \{f \in C_{\mathbb{R}}[0, 1] : f \text{ różniczkowalna w } (0, 1), f(0) = 0, |f'(x)| \leq 1\}.$$

Wtedy zbiór \mathcal{A} jest warunkowo zwarty, bo z

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(\xi)| |x_1 - x_2| \leq |x_1 - x_2|$$

wynika jednakowa ciągłość funkcji z \mathcal{A} . Ponadto

$$|f(x)| = |f(x) - f(0)| \leq x \leq 1,$$

czyli rodzina \mathcal{A} jest ograniczona przez 1.

Uwaga 10.9. Twierdzenie Arzeli-Ascoliego pozostaje prawdziwe również dla $\mathcal{A} \subset C(K)$, czyli funkcji o wartościach zespolonych.

11 Odwzorowania zwężające i zastosowania

Twierdzenie 11.1. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną zupełną a $T : X \rightarrow X$ będzie odwzorowaniem **zwężającym**, tzn. istnieje stała $0 < \theta < 1$, taka, że

$$d(Tx, Ty) \leq \theta d(x, y), \quad x, y \in X.$$

Wtedy odwzorowanie T posiada jedyny punkt stały, tzn. punkt $y \in X$ taki, że $Ty = y$.

Uwaga 11.2. Odwzorowanie zwężające jest ciągłe.

Dowód. Dla ustalonego punktu $x \in X$ rozważmy ciąg iteracji $x_n = T^n x$. Mamy

$$d(x_k, x_{k+1}) = d(Tx_{k-1}, Tx_k) \leq \theta d(x_{k-1}, x_k).$$

Zatem

$$d(x_k, x_{k+1}) \leq \theta^k (d(x_0, x_1)).$$

Niech $n > m$. Wtedy

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \dots + d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq (\theta^m + \theta^{m+1} + \dots + \theta^{n-1}) d(x_0, x_1) \leq \frac{\theta^m}{1 - \theta} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Zatem ciąg x_n spełnia warunek Cauchy'ego, więc jest zbieżny z założenia o zupełności przestrzeni X . Niech $x_n \xrightarrow{n} y$. Wtedy $Tx_n \xrightarrow{n} Ty$. Z drugiej strony $Tx_n = x_{n+1} \xrightarrow{n} y$. Stad $Ty = y$, czyli y jest punktem stałym odwzorowania T . Załóżmy, że również punkt y' jest stały, tzn. $Ty' = y'$. Wtedy

$$d(y, y') = d(Ty, Ty') \leq \theta d(y, y').$$

Zatem $d(y, y') = 0$, czyli $y = y'$. □

11.1 Twierdzenie o funkcji odwrotnej

Niech $\varphi : U \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^n$, gdzie U jest otwartym podzbiorem w \mathbb{R}^n . Załóżmy, że $x_0 \in U$ oraz $\det D\varphi(x_0) \neq 0$. Pokażemy, że istnieje odwzorowanie odwrotne określone w otoczeniu punktu $y_0 = \varphi(x_0)$.

Poprzez zastosowanie przekształceń liniowych i przesunięć możemy założyć, że $x_0 = 0$, $y_0 = \varphi(0) = 0$ oraz $D\varphi(0) = I$. Możemy też założyć, że U jest kulą otwartą o środku w 0 .

Zapiszmy φ w postaci

$$\varphi(x) = x + f(x) = y. \quad (11.1)$$

Wtedy funkcja f jest klasy C^1 oraz $f(0) = 0$ $Df(0) = 0$. Rozwiązania równania (??), czyli odwzorowania odwrotnego, będziemy szukać w postaci

$$x = y + g(y).$$

Z układu równań

$$x + f(x) = y \quad (11.2)$$

$$y + g(y) = x \quad (11.3)$$

usuwamy x i otrzymujemy

$$y + g(y) + f(y + g(y)) = y.$$

Zatem

$$g(y) = -f(y + g(y)).$$

Chcemy znaleźć funkcję g spełniającą powyższy wzór. W tym celu rozważmy przekształcenie

$$(Tg)(y) = -f(y + g(y)).$$

Zamierzamy znaleźć punkt stały przekształcenia T . Wiemy, że $Df(0) = 0$. Funkcja f jest klasy C^1 , zatem istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że

$$\|Df(x)\| \leq \frac{1}{2}, \quad \|x\|_2 \leq 2\delta, \quad (11.4)$$

gdzie po lewej stronie występuje norma macierzy jako odwzorowania \mathbb{R}^n w \mathbb{R}^n z normą euklidesową w \mathbb{R}^n . Oznaczmy

$$B_\delta = \{\|x\|_2 \leq \delta\}$$

oraz

$$X = \{f : B_\delta \rightarrow B_\delta : f \text{ jest ciągła}\}.$$

Określamy metrykę w X wzorem

$$d(g_1, g_2) = \sup_{x \in B_\delta} \|g_1(x) - g_2(x)\|_2.$$

Wtedy (X, d) jest przestrzenią metryczną zupełną, bo zbiór B_δ jest zwarty a funkcje $f \in X$ są ograniczone.

Pokażemy, że T odwzorowuje X w siebie i jest zwięzające. Dla $g \in X$ funkcja Tg jest ciągła. Ponadto dla $\|y\|_2 \leq \delta$ mamy

$$\|Tg(y)\|_2 = \|f(y + g(y))\|_2, \quad \|y + g(y)\|_2 \leq 2\delta.$$

Dalej dla $\|x\|_2 \leq 2\delta$ obliczamy

$$f(x) - f(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx) dt = \int_0^1 Df(tx) \cdot x dt.$$

Zatem

$$\|f(x)\|_2 \leq \int_0^1 \|Df(tx) \cdot x\|_2 dt \leq \int_0^1 \|Df(tx)\| \|x\|_2 dt \leq \frac{1}{2} \|x\|_2 \leq \delta.$$

Podstawiając $x = y + g(y)$ otrzymamy $\|Tg(y)\|_2 \leq \delta$ dla $\|y\|_2 \leq \delta$, czyli $Tg \in X$. Sprawdzamy warunek zwięzania. Mamy

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 Df(a + t(b-a)) \cdot (b-a) dt.$$

Zatem

$$\|f(b) - f(a)\|_2 \leq \int_0^1 \|Df(a + t(b-a))\| dt \|b - a\|_2.$$

Podstawiamy $a = y + g_1(y)$ oraz $b = y + g_2(y)$ dla $g_1, g_2 \in X$ oraz $y \in B_\delta$. Wtedy $a, b \in B_{2\delta}$ zatem $a + t(b-a) \in B_{2\delta}$. Korzystając z (??) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \|Tg_1(y) - Tg_2(y)\|_2 &= \|f(y + g_1(y)) - f(y + g_2(y))\|_2 \\ &\leq \int_0^1 \|Df(a + t(b-a))\| dt \|g_2(y) - g_1(y)\|_2 \leq \frac{1}{2} \|g_2(y) - g_1(y)\|_2. \end{aligned}$$

To oznacza, że

$$d(Tg_1, Tg_2) \leq \frac{1}{2} d(g_1, g_2).$$

Z Twierdzenia wynika, że odwzorowanie T posiada punkt stały $g \in B_\delta$. Ale wtedy na podstawie wzorów (??) i (??) funkcja $\psi(y) = y + g(y)$ jest odwzorowaniem odwrotnym do φ .

12 Zadania

1. Udowodnić nierówność Höldera

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q,$$

gdzie $a, b \geq 0$, $p, q \geq 1$ oraz $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Wyznaczyć, kiedy zachodzi równość. **Wskazówka:**

(Sposób I) Naszkicować wykres funkcji $y = x^{p-1}$. Porównać pole prostokąta $[0, a] \times [0, b]$ z sumą pól dwu obszarów: (1) ograniczonego wykresem funkcji, osią OX , i prostą $x = a$, (2) ograniczonego wykresem funkcji, osią OY i prostą $y = b$. (Sposób II) Przyjąć $y = 1$ i pokazać, że funkcja $f(x) = \frac{1}{p} x^p - x + \frac{1}{q}$ przyjmuje minimum w punkcie $x = 1$.

2. Pokazać nierówność Höldera

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{1/q},$$

gdzie $x_i, y_i \geq 0$, p, q jak poprzednio. Kiedy zachodzi równość? **Wskazówka:** Założyć, że obie sumy $\sum_{i=1}^n x_i^p$ i $\sum_{i=1}^n y_i^q$ nie przekraczają 1. Zastosować poprzednie zadanie do każdego z iloczynów $x_i y_i$.

3. Pokazać, że

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} = \max \left\{ \left| \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i \right| : \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{1/q} \leq 1 \right\},$$

gdzie $x_i, y_i \in \mathbb{C}$, p i q jak poprzednio.

4. Pokazać nierówność trójkąta dla normy

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$$

określonej na \mathbb{C}^n . **Wskazówka:** Skorzystać z poprzedniego zadania.

5. Uogólnić trzy poprzednie zadania na sumy nieskończone.

6. Dla $p_2 \geq p_1 \geq 1$ i $n \in \mathbb{N}$ znaleźć najlepsze stałe w nierównościach

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{p_1}\right)^{1/p_1} \leq c_1 \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{p_2}\right)^{1/p_2}, \quad \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{p_2}\right)^{1/p_2} \leq c_2 \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{p_1}\right)^{1/p_1}.$$

7. Pokazać, że $\ell^{p_1} \subset \ell^{p_2}$, jeśli $p_1 \leq p_2$. **Wskazówka:** Jeśli $\|x\|_{p_1} \leq 1$, to $|x_n| \leq 1$ dla wszystkich n .

8. Skonstruować ciąg $x \in \ell^2$ taki, że $x \notin \ell^p$ dla każdego $p < 2$.

9. Pokazać całkową nierówność Höldera

$$\int_{\Omega} f(x)g(x)d\mu(x) \leq \left(\int_{\Omega} f(x)^p\right)^{1/p} \left(\int_{\Omega} g(x)^q\right)^{1/q},$$

dla nieujemnych funkcji $f(x)$ i $g(x)$, p i q jak w zadaniu 1.

10. Pokazać nierówność trójkąta dla normy

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p},$$

gdzie f jest zespoloną funkcją na Ω i $p \geq 1$. **Wskazówka:** Wyprowadzić wzór analogiczny do wzoru z zadania 3.

11. Wskazać normę w przestrzeni \mathbb{R}^n inną niż normy $\| \cdot \|_p$ dla $1 \leq p \leq \infty$, ale taką, że $\|e_i\| = 1$ dla każdego z wektorów standardowej bazy e_1, \dots, e_n .
12. Pokazać, że w przestrzeni liniowej unormowanej X zbiory

$$\{x \in X : \|x\| \leq 1\} \quad \{x \in X : \|x\| = 1\}$$

są domknięte.

13. Pokazać, że ciąg funkcji f_n jest zbieżny do funkcji f w normie przestrzeni $C[0,1]$ (tzn. $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ przy $n \rightarrow \infty$) wtedy i tylko wtedy, gdy f_n jest jednostajnie zbieżny do f .
14. Udowodnić zupełność przestrzeni $C[0,1]$. **Wskazówka:** Dla ciągu Cauchy'ego f_n pokazać zbieżność punktową korzystając z nierówności

$$|f_n(t) - f_m(t)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty$$

i z zupełności \mathbb{C} (lub \mathbb{R}). Niech f będzie granicą punktową ciągu f_n . Pokazać, że f jest jednostajną granicą ciągu f_n korzystając z nierówności

$$|f_n(t) - f(t)| \leq |f_m(t) - f(t)| + \|f_n - f_m\|_\infty.$$

Pokazać, że f jest ciągła, korzystając z nierówności

$$|f(t) - f(s)| \leq |f_n(t) - f_n(s)| + 2\|f_n - f\|_\infty.$$

Uwaga: Dowód przenosi się na przypadek $C(K)$ przestrzeni funkcji ciągłych na zwartej przestrzeni metrycznej (lub topologicznej) K .

15. Niech c oznacza przestrzeń liniową ciągów zbieżnych o wyrazach zespolonych. Niech $\|\{x_n\}\| = \sup_{n \geq 1} |x_n|$. Pokazać, że c jest przestrzenią Banacha. Pokazać, że ciągi zbieżne do 0 tworzą domkniętą podprzestrzeń c_0 w c . **Wskazówka:** Można utożsamić c z $C(K)$, gdzie $K = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\} \cup \{0\}$.
16. Udowodnić twierdzenie Weierstrassa o gęstości wielomianów w $C[-1,1]$ korzystając z tego, że każda funkcja ciągła o okresie 2π jest jednostajną granicą ciągu wielomianów trygonometrycznych. **Wskazówka:** Dla funkcji ciągłej $f(x)$ określonej na $[-1, 1]$ funkcja $f(\cos t)$ ma okres 2π

i jest parzysta. Z tego powodu można ją aproksymować jednostajnie wielomianami trygonometrycznymi postaci

$$a_0 + a_1 \cos t + \dots + a_n \cos nt.$$

Zauważyć, że $\cos nt$ jest wielomianem od $\cos t$ tzn.

$$\cos nt = T_n(\cos t),$$

gdzie T_n jest wielomianem stopnia n . Pokazać, że funkcję $f(x)$ można aproksymować jednostajnie wielomianami postaci

$$a_0 + a_1 T_1(x) + \dots + a_n T_n(x).$$

17. Dla funkcji ciągłej f na przedziale $[0, 1]$ określamy wielomian Bernsteina wzorem

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) (1-x)^{n-k} x^k.$$

Pokazać, że $B_n(f)$ jest jednostajnie zbieżny do f . **Wskazówka:** Zajrzeć do książki S. /Lojasiewicz, Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych (rozdział II §3, Twierdzenie 1).

18. Udowodnić, że jeśli $x_n \rightarrow x$ oraz $y_n \rightarrow y$ w przestrzeni unormowanej X , to $x_n + y_n \rightarrow x + y$. Pokazać, że jeśli $\lambda_n \rightarrow \lambda$, gdzie $\lambda_n, \lambda \in \mathbb{C}$, to $\lambda_n x_n \rightarrow \lambda x$.

19. Pokazać zupełność przestrzeni $L^p(0, 1)$, dla $p \geq 1$. **Wskazówka:** Postępować tak jak w przypadku $p = 1$. Skorzystać z nierówności

$$\left\| \sum |f_n| \right\|_p \leq \sum \|f_n\|_p.$$

20. W przestrzeni $C_{\mathbb{R}}[0, 1]$ znaleźć odległość funkcji x^n od dwuwymiarowej podprzestrzeni $E = \{ax + b : a, b \in \mathbb{R}\}$.

21. Pokazać, że dla $0 < p < 1$ funkcjonal $\|(x_n)\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{1/p}$ określony na ciągach dla których szereg występujący w definicji jest zbieżny, nie jest normą, bo nie spełnia warunku trójkąta. Pokazać, że spełnione są nierówności

$$\|x + y\|_p^p \leq \|x\|_p^p + \|y\|_p^p, \quad \|x + y\|_p \leq 2^{1/p} (\|x\|_p + \|y\|_p).$$

22. Pokazać, że $L^1(0, 1)$ zawiera dwie liniowo niezależne funkcje f i g takie, że $\|f + g\|_1 = \|f\|_1 + \|g\|_1$. Pokazać, że w normie przestrzeni $L^p(0, 1)$, dla $1 < p < \infty$, taka sytuacja nie jest możliwa.
23. Pokazać, że jeśli X i Y są przestrzeniami unormowanymi z normami $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Y$, to ich suma prosta $X \oplus Y$ jest przestrzenią unormowaną z normą

$$\|x \oplus y\| = \|x\|_X + \|y\|_Y.$$

Pokazać, że jeśli X i Y są zupełne, to również $X \oplus Y$ jest zupełna.

24. Dla ciągu X_n przestrzeni unormowanych z normami $\|\cdot\|_{X_n}$ określamy sumę prostą X

$$X = \left\{ \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \mid x_n \in X_n, \|\{x_n\}\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{X_n} < \infty \right\}.$$

Pokazać, że X jest przestrzenią unormowaną z normą $\|\{x_n\}\|$. Pokazać, że X jest zupełna jeśli wszystkie X_n są przestrzeniami zupełnymi.

25. Udowodnić, że jeśli podzbiory $A \subset B$ przestrzeni metrycznej X spełniają warunek, że A jest gęsty w B oraz B jest gęsty w X , to A jest gęsty w X .
26. Wykorzystać poprzednie zadanie aby udowodnić, że wielomiany o współczynnikach wymiernych stanowią gęsty podzbiór przestrzeni $C_{\mathbb{R}}[0, 1]$ z normie $\|\cdot\|_{\infty}$. Udowodnić, że ciągi $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ o skończonej liczbie wyrazach niezerowych takich, że $x_n \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ stanowią gęsty podzbiór każdej przestrzeni ℓ^p dla $1 \leq p < \infty$, w normie $\|\cdot\|_p$.
- *27. Dla domkniętej podprzestrzeni M w przestrzeni Banacha X z normą $\|\cdot\|_X$, określamy przestrzeń ilorazową X/M jako przestrzeń klas równoważności względem relacji w X

$$x \sim y \quad \text{jeśli} \quad x - y \in M.$$

Oznaczając klasę równoważności elementu $x \in X$ przez $[x]$ określamy dodawanie i mnożenie przez skalar wzorem

$$\alpha[x] + \beta[y] = [\alpha x + \beta y].$$

Pokazać, że ta definicja jest poprawna, tzn. prawa strona zależy jedynie od klas równoważności, z których pochodzą x i y , a nie od samych elementów x i y .

Określmy

$$\|[x]\| = \inf_{m \in M} \|x - m\|_X.$$

Pokazać, że ta funkcja ma własności normy. Pokazać, że X/M z tą normą jest przestrzenią Banacha. **Wskazówka:** Pokazać, że jeśli $\sum \|x_n\| < \infty$, to szereg $\sum x_n$ jest zbieżny. W tym celu dla każdego n wybrać $m_n \in M$ tak, aby

$$\|x_n - m_n\|_X \leq 2 \inf_{m \in M} \|x_n - m\|_X.$$

Zauważyć, że szereg $\sum (x_n - m_n)$ jest zbieżny w X . Oznaczając jego sumę przez s pokazać, że $[s] = \sum [x_n]$ w X/M .

28. Niech $X = C[0, 1]$ i $M = \{f \mid f(0) = f(1) = 0\}$. Pokazać, że X/M można utożsamić z \mathbb{C}^2 , z normą $\|(x_1, x_2)\| = \max\{|x_1|, |x_2|\}$.
- *29. $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ jest gęstym podzbiorem kuli jednostkowej w przestrzeni Banacha X . Określmy odwzorowanie $J : \ell^1 \rightarrow X$, wzorem

$$J : \{a_n\}_{n=0}^\infty \mapsto \sum_{n=0}^\infty a_n x_n$$

- (a) Pokazać, że odwzorowanie J jest ciągłe.
- (b) Pokazać, że $\ker J$ jest domknięte i że J "podnosi" się do ciągłego odwzorowania \hat{J} z przestrzeni ilorazowej $\ell^1/\ker J$ w X .
- (c) Pokazać, że $\text{Im } \hat{J} = X$. **Wskazówka.** Przy ustalonym x , $\|x\| = 1$, wybrać indukcyjnie $x_{n(i)}$ tak aby

$$\|x - \sum_{i=0}^k 2^{-i} x_{n(i)}\| < 2^{-k}.$$

- (d) Zamieniając w (c) liczbę 2 na 3, 4, \dots , pokazać, że \hat{J} jest izometrią.

30. Znaleźć normę operatora identycznościowego z $L^p(a, b)$ w $L^q(a, b)$.
31. Rozważamy przestrzeń $X = \mathbb{R}^n$ z normą $\|\cdot\|_2$. Niech A będzie macierzą symetryczną wymiaru $n \times n$ o wyrazach rzeczywistych. Pokazać, że

norma operatora liniowego związanego z A z przestrzeni X w siebie, jest równa największej z liczb $|\lambda|$, gdzie λ jest wartością własną macierzy A . Jaka jest norma operatora liniowego związanego z macierzą ortogonalną U , tzn. taką, że $U^T = U^{-1}$.

32. Dla jakich funkcji $a(x)$ operator mnożenia przez $a(x)$ jest ciągłym odwzorowaniem z $L^p(0, 1)$ w $L^q(0, 1)$?
33. Obliczyć normę operatora

$$s_n f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(x-t) dt$$

w przestrzeni $C[-\pi, \pi]$ i w przestrzeni $L^2(-\pi, \pi)$, gdzie $D_n(t) = 1 + 2 \cos t + \dots + 2 \cos nt$.

34. Podzbiór A przestrzeni unormowanej X nazywamy ograniczonym, jeśli $\sup_{a \in A} \|a\| < \infty$. Pokazać, że operator liniowy $T : X \rightarrow Y$ z przestrzeni unormowanej X w przestrzeń unormowaną Y jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy przekształca ograniczone podzbiory X w ograniczone podzbiory Y .
35. X, Y, Z są trzema przestrzeniami unormowanymi oraz $T_1 : X \rightarrow Y$ i $T_2 : Y \rightarrow Z$ są operatorami liniowymi ograniczonymi. Pokazać, że złożenie $T_2 T_1$ jest operatorem ograniczonym z X do Z oraz $\|T_2 T_1\| \leq \|T_1\| \|T_2\|$. Pokazać, że jeśli $T : X \rightarrow X$ jest operatorem liniowym ograniczonym, to dowolna potęga T^n (w sensie złożenia) jest operatorem ograniczonym oraz $\|T^n\| \leq \|T\|^n$.
36. Pokazać, że jeśli $T \neq 0$ jest operatorem liniowym ograniczonym z X do Y oraz $\|Tx\| < 1$ dla pewnego $x \in X$, to $\|Tx\| < \|T\|$.
37. Pokazać, że operator $T : \ell^\infty \rightarrow \ell^\infty$ określony wzorem

$$T(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (x_1, \frac{1}{2}x_2, \dots, \frac{1}{n}x_n, \dots)$$

jest liniowy i ograniczony.

38. Pokazać, że obraz $\text{Im } T$ operatora liniowego ograniczonego $T : X \rightarrow Y$ nie musi być domkniętą podprzestrzenią w Y . **Wskazówka:** Poprzednie zadanie.

39. Pokazać, że jądro ograniczonego operatora liniowego $T : X \rightarrow Y$, tzn. $\ker T = \{x \in X \mid Tx = 0\}$ jest domkniętą podprzestrzenią w X .
40. Pokazać, że odwzorowanie odwrotne $T^{-1} : \text{Im } T \rightarrow X$ operatora $T : X \rightarrow Y$ nie musi być ograniczone. **Wskazówka:** Zadanie 4.
41. Znaleźć obraz operatora $T : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(y) dy.$$

Znaleźć operator odwrotny $T^{-1} : \text{Im } T \rightarrow C[0, 1]$. Czy T jest liniowy i ograniczony ?

42. Na $C[0, 1]$ określamy operatory S i T wzorami

$$(Tf)(x) = x \int_0^1 f(t) dt \quad (Sf)(x) = xf(x).$$

Czy operatory T i S są przemienne, tzn. czy $TS = ST$? Obliczyć normy operatorów S , T , ST , i TS .

43. Niech X będzie przestrzenią liniową wszystkich ograniczonych funkcji o wartościach rzeczywistych określonych na \mathbb{R} z normą

$$\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|.$$

Dla ustalonej liczby δ określmy odwzorowanie $(Tf)(x) = f(x - \delta)$. Pokazać, że T jest ograniczonym operatorem liniowym X w siebie.

44. Pokazać, że normy w przestrzeniach ℓ^p oraz $L^p(0, 1)$ nie pochodzą od iloczynu skalarnego dla $p \neq 2$. **Wskazówka:** Wskazać dwa elementy, dla których nie zachodzi równość równoległoboku.
45. Pokazać, że jeśli $\langle x, y \rangle = 0$, to $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. Czy odwrotna implikacja jest prawdziwa ? Podać przykład.
46. W przestrzeni z iloczynem skalarnym warunek $\|x\| = \|y\|$ implikuje $\langle x + y, x - y \rangle = 0$. Co to oznacza geometrycznie ?

47. Sprawdzić tożsamość Apoloniusza w przestrzeni z iloczynem skalarnym.

$$\|z - x\|^2 + \|z - y\|^2 = \frac{1}{2}\|x - y\|^2 + 2\|z - \frac{1}{2}(x + y)\|^2.$$

Pokazać, że można ją uzyskać z równości równoległoboku.

48. Pokazać, że jeśli $x, y \neq 0$ oraz $\langle x, y \rangle = 0$, to wektory x i y są liniowo niezależne. Rozszerzyć tę własność na większą liczbę wektorów.
49. Udowodnić, że jeśli $x_n \xrightarrow{n} x$ oraz $y_n \xrightarrow{n} y$, to $\langle x_n, y_n \rangle \xrightarrow{n} \langle x, y \rangle$.
50. Pokazać, że $\langle x, y \rangle = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\|x + \alpha y\| \geq \|x\|$ dla wszystkich skalarów α .

51. Podzbiór A przestrzeni liniowej nazywamy wypukłym, jeśli z tego, że $x, y \in A$ wynika, że $\frac{1}{2}(x + y) \in A$. Pokazać, że jeśli A jest niepustym, wypukłym i domkniętym podzbiorem przestrzeni Hilberta \mathcal{H} , to dla każdego wektora $x \in \mathcal{H}$ istnieje jedyny wektor $z \in A$ spełniający

$$\|x - z\| = \inf\{\|x - y\| : y \in A\}.$$

Wskazówka: Przeanalizować dowód z wykładu dotyczący przypadku, gdy A jest domkniętą podprzestrzenią liniową.

52. Pokazać, że w niepustym i domkniętym zbiorze wypukłym A istnieje element z taki, że

$$\|z\| = \inf\{\|y\| : y \in A\}.$$

53. Pokazać, że domknięcie zbioru wypukłego jest zbiorem wypukłym.
54. Pokazać, że zbiór $M = \{x = (x_i) : \sum x_i = 1\}$ w przestrzeni \mathbb{C}^n jest wypukły i domknięty. Znaleźć w M element o najmniejszej normie euklidesowej.
55. Dla zbioru M w przestrzeni Hilberta \mathcal{H} przez M^\perp oznaczamy zbiór wektorów x takich, że $\langle x, v \rangle = 0$ dla wszystkich $v \in M$. Pokazać, że M^\perp jest domkniętą podprzestrzenią liniową.

56. Pokazać, że jeśli $A \subset B$, to

$$A \subset A^{\perp\perp} \quad B^\perp \subset A^\perp \quad A^{\perp\perp\perp} = A^\perp$$

57. Pokazać, że dla podzbioru A w przestrzeni Hilberta, $A^{\perp\perp}$ jest najmniejszą domkniętą podprzestrzenią zawierającą A .
58. Niech A oznacza podzbiór przestrzeni ℓ^2 złożony ciągów absolutnie sumowalnych o sumie współrzędnych równej 0. Pokazać, że A jest podprzestrzenią liniową w ℓ^2 . Znaleźć domknięcie zbioru A w przestrzeni ℓ^2 .
59. Pokazać, że jeśli M jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni Hilberta, to $M^{\perp\perp} = M$.
60. Podzbiór A unormowanej przestrzeni liniowej nazywamy liniowo gęstym jeśli przestrzeń $\text{lin}A$ jest gęsta. Pokazać, że podzbiór A przestrzeni Hilberta jest liniowo gęsty wtedy i tylko wtedy, gdy $A^\perp = \{0\}$.
61. Udowodnić twierdzenie Jordana–von Neumanna dla przypadku rzeczywistego, tzn. pokazać, że norma spełniająca warunek równoległoboku na rzeczywistej przestrzeni liniowej pochodzi od rzeczywistego iloczynu skalarnego. **Wskazówka:** Zdefiniować funkcję

$$R(x, y) = \langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

Następnie pokazać, że ta funkcja określa iloczyn skalarny według poniższego schematu.

- (a) Pokazać, że $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ oraz $\langle -x, y \rangle = -\langle x, y \rangle$.
- (b) Korzystając z równości równoległoboku wykazać, że

$$\langle x_1 + x_2, 2y \rangle = 2\langle x_1, y \rangle + 2\langle x_2, y \rangle.$$

- (c) Na podstawie (b) udowodnić, że $\langle x, 2y \rangle = 2\langle x, y \rangle = \langle 2x, y \rangle$, a następnie

$$\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle.$$

- (d) Udowodnić przez indukcję, że

$$\langle nx, y \rangle = n\langle x, y \rangle, \quad n \in \mathbb{N}$$

a następnie

$$\langle rx, y \rangle = r\langle x, y \rangle, \quad r \in \mathbb{Q}.$$

(e) Zauważyć, że jeśli $x_n \xrightarrow{n} x$, to $\langle x_n, y \rangle \xrightarrow{n} \langle x, y \rangle$. Pokazać, że zatem

$$\langle rx, y \rangle = r\langle x, y \rangle, \quad r \in \mathbb{R}.$$

62. Udowodnić twierdzenie Jordana–von Neumanna dla przypadku zespolonego. **Wskazówka:** Określmy $R(x, y)$ jak w zadaniu 1. Następnie niech

$$\langle x, y \rangle = R(x, y) - iR(ix, y).$$

(a) Pokazać, że $R(ix, y) = -R(x, iy)$ a następnie $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$.

(b) Pokazać, że $\langle ix, y \rangle = i\langle x, y \rangle$ a następnie na podstawie zadania 1 $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda\langle x, y \rangle$ dla $\lambda \in \mathbb{C}$.

63. Dla rzeczywistej przestrzeni liniowej unormowanej X określamy przestrzeń $V = X + iX$ z normą $\|x + iy\| = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$, dla $x, y \in X$. Pokazać, że V jest zespoloną przestrzenią unormowaną. Pokazać, że jeśli norma w X spełnia warunek równoległoboku to również norma w Y spełnia ten warunek.

64. Macierzą Grama układu wektorów $\{x_i\}_{i=1}^n$ w przestrzeni z iloczynem skalarnym nazywamy macierz $((x_i, x_j))_{i,j=1}^n$. Pokazać, że wyznacznik macierzy Grama nie znika wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $\{x_i\}_{i=1}^n$ są liniowo niezależne. **Wskazówka:** Jeśli wektory są liniowo zależne, to wiersze macierzy są liniowo zależne. To dowodzi implikacji w jedną stronę. Dla dowodu w drugą stronę zastosować indukcję względem n . Zauważyć, że wyznacznik Grama można zapisać jako iloczyn skalarny wektora x_n z wektorem

$$v_n = \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & (x_1, x_2) & \dots & (x_1, x_n) \\ (x_2, x_1) & (x_2, x_2) & \dots & (x_2, x_n) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ (x_{n-1}, x_1) & (x_{n-1}, x_2) & \dots & (x_{n-1}, x_n) \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{vmatrix}.$$

Pokazać, że v_n jest ortogonalny do wektorów x_1, \dots, x_{n-1} . Niech Δ_k oznacza wyznacznik Grama pierwszych k wektorów układu. Pokazać, że $(v_n, v_n) = \Delta_{n-1}\Delta_n$. Jeśli wyznacznik Grama znika, to $v_n = 0$. To oznacza, że wektor x_n jest liniową kombinacją pozostałych wektorów, bo z założenia indukcyjnego współczynnik przy x_n jest niezerowy (współczynnik ten jest równy Δ_{n-1}).

Pokazać, że wyznacznik Grama jest zawsze nieujemny.

65. Niech $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ będzie układem wektorów liniowo niezależnych. Pokazać, że wektory

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{n-1}\Delta_n}}v_n$$

stanowią układ ortonormalny o własnościach:

- (a) $y_n \perp \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$;
- (b) $(y_n, y_n) = 1$;
- (c) $(y_n, x_n) > 0$;
- (d) $\text{lin}\{y_1, \dots, y_n\} = \text{lin}\{x_1, \dots, x_n\}$.

Pokazać, że warunki (a)–(d) wyznaczają układ $\{y_n\}$. Przejście od układu $\{x_n\}$ do układu $\{y_n\}$ nosi nazwę procesu ortogonalizacji Grama–Schmidta.

66. Niech $\mathcal{H} = L^2(-1, 1)$ oraz $x_n(t) = t^{n-1}$, dla $n = 1, 2, \dots$. Pokazać, że układ x_n jest liniowo niezależny. Znaleźć y_1, y_2 oraz y_3 .

67. Niech

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}).$$

Pokazać, że H_n jest wielomianem stopnia n . Udowodnić, że

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2} dx = 0, \quad n \neq m,$$

tzn. H_n tworzą układ ortogonalny w $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2} dx)$. H_n nazywamy wielomianami Hermite’a.

68. Znaleźć rzuty ortogonalne wektorów na podane podprzestrzenie:

- (a) $f(x) = x^3$, $M = \text{lin}\{1, x\}$, $\mathcal{H} = L^2(0, 1)$.
- (b) $f(x) = x$, $M = \text{lin}\{1, \cos x, \sin x\}$, $\mathcal{H} = L^2(-\pi, \pi)$.

69. Obliczyć normy funkcjonalów na przestrzeni \mathcal{H} .

- (a) $\varphi(f) = \int_0^1 xf(x)dx$, $\mathcal{H} = L^2(0, 1)$.
- (b) $\varphi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$, $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2} dx)$.
- (c) $\varphi(\{x_n\}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{n+1}$, $\mathcal{H} = \ell^2$.

70. Czy funkcjonal $f \mapsto f(0)$ rozszerza się z $C[-1, 1]$ do ograniczonego funkcjonału liniowego na przestrzeni Hilberta $L^2(-1, 1)$?
71. Pokazać, że iloczyn skalarny na przestrzeni z iloczynem skalarnym jest ograniczoną formą półtoraliniową.
72. Formą hermitowską nazywamy formę półtoraliniową spełniającą

$$B(y, x) = \overline{B(x, y)}.$$

Pokazać, że ograniczona forma hermitowska jest postaci

$$B(x, y) = \langle x, Ay \rangle$$

dla ograniczonego operatora liniowego spełniającego $A^* = A$.

73. Formę półtoraliniową nazywamy nieujemną jeśli $B(x, x) \geq 0$ dla wszystkich wektorów $x \in \mathcal{H}$. Pokazać, że forma nieujemna jest hermitowska oraz spełnia nierówność Schwarz'a

$$|B(x, y)|^2 \leq B(x, x)B(y, y).$$

74. Dla nieujemnej formy półtoraliniowej $B(x, y)$ określmy $p(x) = \sqrt{B(x, x)}$. Pokazać, że $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ oraz $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$.
75. Pokazać, że $\|A^*\| = \|A\|$ dla ograniczonego operatora liniowego A .
76. Dla zespolonej funkcji $k(x, y)$ ciągłej określamy operator

$$Af(x) = \int_0^1 k(x, y)f(y) dy$$

dla $f \in L^2(0, 1)$. Sprawdzić, że A jest ograniczony. Znaleźć operator A^* .

77. Znaleźć operator sprzężony do operatora

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(y) dy$$

określonego na $\mathcal{H} = L^2(0, 1)$.

78. Pokazać, że odwzorowanie $A \mapsto A^*$ na przestrzeni $B(\mathcal{H}) := B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ jest antyliniowe.
79. Niech $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ będzie ograniczonym operatorem odwracalnym. Pokazać, że $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.
80. Pokazać, że dla $A, B \in B(\mathcal{H})$ mamy $(AB)^* = B^*A^*$.
81. Pokazać, że $\|A^*\| = \|A\|$ dla każdego operatora $A \in B(\mathcal{H})$.
82. Niech A będzie ograniczonym operatorem na \mathcal{H} spełniającym $A(M_1) \subset M_2$, dla podprzestrzeni $M_1, M_2 \subset \mathcal{H}$. Pokazać, że $A^*(M_2^\perp) \subset M_1^\perp$.
83. Pokazać, że dla operatora $A \in B(\mathcal{H})$ zachodzi

$$\ker A = (\operatorname{Im} A^*)^\perp \quad \operatorname{Im} A \subset (\ker A^*)^\perp.$$

84. Pokazać, że jeśli dwa operatory liniowe T_1, T_2 spełniają $\langle T_1x, x \rangle = \langle T_2x, x \rangle$ dla każdego $x \in \mathcal{H}$, to $T_1 = T_2$.
85. Dla ograniczonego operatora liniowego $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ określamy operator $S = I + T^*T$, gdzie I oznacza operator identycznościowy. Pokazać, że S spełnia

$$\|x\| \leq \|Sx\| \leq (1 + \|T\|^2)^{1/2} \|x\|.$$

Następnie pokazać, że S jest różnowartościowy i że podprzestrzeń $\operatorname{Im} S$ jest domknięta. Korzystając z zadania 13 udowodnić, że $\operatorname{Im} S$ jest gęsta w \mathcal{H} . Pokazać, że S jest odwracalny oraz $\|S^{-1}\| \leq 1$.

86. T_n jest ciągiem ograniczonych operatorów liniowych z przestrzeni unormowanej X w przestrzeń unormowaną Y . Pokazać, że zbiór $\{x \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x \text{ istnieje}\}$ jest równy X lub jest zbiorem I-ej kategorii. **Wskazówka.** Niech

$$\begin{aligned} A &= \{x \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x \text{ istnieje}\}, \\ B &= \{x \in X : \sup_n \|T_n x\| < +\infty\}. \end{aligned}$$

Mamy $A \subset B$. Jeśli A nie jest pierwszej kategorii to również B nie jest I-ej kategorii. Zatem normy $\|T_n\|$ są wspólnie ograniczone. Pokazać, że wtedy A jest domknięty. Ponieważ nie jest I-ej kategorii, to zawiera kulę otwartą. Ale A jest podprzestrzenią liniową. Zatem $A = X$.

87. Niech T_n będą ograniczonymi operatorami liniowymi z przestrzeni Banacha X w przestrzeń unormowaną Y . Pokazać, że jeśli $T_n x$ jest zbieżny dla każdego x z przestrzeni Banacha X , to normy $\|T_n\|$ są wspólnie ograniczone. Pokazać, że operator określony wzorem

$$Tx = \lim_n T_n x$$

jest ograniczony oraz $\|T\| \leq \liminf \|T_n\|$.

88. Niech a_n będzie ciągiem o wyrazach zespolonych o własności, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ jest zbieżny dla każdego ciągu $\{x_n\} \in c_0$. Pokazać, że $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$. **Wskazówka:** Rozważyć funkcjonały $\varphi_N(x) = \sum_{n=1}^N a_n x_n$ dla $x \in c_0$.

89. Ciąg x_n wektorów w przestrzeni Hilberta \mathcal{H} ma własność $\sup_n |(y, x_n)| < +\infty$ dla dowolnego $y \in \mathcal{H}$. Pokazać, że $\sup_n \|x_n\| < +\infty$. **Wskazówka.** Rozważyć funkcjonały liniowe $y \mapsto (y, x_n)$.

90. * $\{a_{mn}\}_{n,m=0}^{\infty}$ jest macierzą zespoloną o własności: dla każdego $m \in \mathbb{N}$ istnieje ciąg $\{x_n^{(m)}\}_{n=0}^{\infty} \in \ell^2$, dla którego szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} x_n^{(m)}$ jest rozbieżny. Pokazać, że istnieje taki ciąg $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in \ell^2$, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} x_n$ jest rozbieżny dla wszystkich $m \in \mathbb{N}$.

91. Ciąg elementów x_n w przestrzeni unormowanej X ma własność, że ciąg liczbowy $\varphi(x_n)$ jest ograniczony dla dowolnego ciągłego funkcjonału φ określonego na X . Pokazać, że ciąg $\|x_n\|$ jest ograniczony.

92. Niech X oznacza przestrzeń unormowaną złożoną z ciągów zespolonych $x = \{x_n\}$ dla których tylko skończenie wiele wyrazów jest różnych od zera, z normą $\|x\| = \max_n |x_n|$. Określmy operator liniowy $T : X \rightarrow X$ wzorem

$$Tx = (x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \dots).$$

Pokazać, że T jest ograniczony, ale T^{-1} nie jest ograniczony. Czy to przeczy twierdzeniu o odwzorowaniu otwartym?

93. X jest przestrzenią Banacha względem dwu norm $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$, przy czym $\|\cdot\|_1 \leq c\|\cdot\|_2$, dla pewnej stałej c . Pokazać, że $\|\cdot\|_2 \leq d\|\cdot\|_1$, dla pewnej stałej d .

94. M, N są domkniętymi podprzestrzeniami przestrzeni Banacha X takimi, że każdy element $x \in X$ ma jednoznaczne przedstawienie $x = m+n$, $m \in M, n \in N$. Pokazać, że istnieje stała c taka, że $\|m\| + \|n\| \leq c\|x\|$, dla każdego $x \in X$.
95. Niech $C_{per}(\mathbb{R})$ oznacza przestrzeń funkcji ciągłych o okresie 2π . Pokazać, że każdy ograniczony funkcjonal liniowy na tej przestrzeni ma postać $\varphi(f) = \int_0^{2\pi} f(x)dg(x)$ dla pewnej funkcji lewostronnie ciągłej funkcji o wahanii ograniczonym na przedziale $[0, 2\pi]$ oraz $\|\varphi\| = Var(g)$.
96. Operator T jest określony na $C(\mathbb{T})$ następująco:

$$Tf = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n \hat{f}(n) e^{inx},$$

dla pewnego ustalonego ciągu a_n , gdzie $\hat{f}(n) = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$. Załóżmy, że $Tf \in C(\mathbb{T})$ dla dowolnej $f \in C(\mathbb{T})$. Pokazać, że T jest ograniczonym operatorem liniowym na $C(\mathbb{T})$. **Wskazówka:** Sprawdzić, że T ma domknięty wykres.

97. Pokazać, jeśli operator T z przestrzeni unormowanej X w przestrzeń unormowaną Y ma domknięty wykres oraz T^{-1} istnieje, to również T^{-1} ma domknięty wykres. **Wskazówka:** Znaleźć związek pomiędzy wykresami operatorów T i T^{-1} .
98. Niech X i Y będą przestrzeniami unormowanymi oraz $T_1 : X \rightarrow Y$ ma domknięty wykres natomiast $T_2 : X \rightarrow Y$ jest ograniczony. Pokazać, że $T_1 + T_2$ ma domknięty wykres.
99. Pokazać, że jądro operatora liniowego $T : X \rightarrow Y$ o wykresie domkniętym jest domkniętą podprzestrzenią w X .
- *100. Niech T będzie ograniczonym różnowartościowym operatorem liniowym z przestrzeni Banacha X w przestrzeń Banacha Y . Pokazać, że istnieje stała $\varepsilon > 0$ taka, że dla $S \in B(X, Y)$ jeśli $\|T - S\| \leq \varepsilon$, to S jest różnowartościowy wtedy i tylko wtedy, gdy obraz $T(X)$ jest domkniętą podprzestrzenią w Y .
- *101. Niech T będzie ograniczonym operatorem liniowym z przestrzeni Banacha X na przestrzeń Banacha Y . Pokazać, że istnieje stała $\varepsilon > 0$

taka, że dla $S \in B(X, Y)$ jeśli $\|T - S\| \leq \varepsilon$, to $S(X) = Y$. **Wskazówka:** Wyznaczyć ε z twierdzenia o odwzorowaniu otwartym. Następnie dla $y \in Y$ skonstruować x tak, aby $Sx = y$ naśladowując dowód twierdzenia o odwzorowaniu otwartym.

102. Niech \mathcal{A} będzie samosprężoną podalgebrą w $C(K)$ oraz a, b dwoma ustalonymi punktami w zwartej przestrzeni Hausdorffa K . Załóżmy, że \mathcal{A} nie znika w K oraz rozdziela dowolne dwa punkty x_1 i x_2 z wyjątkiem a i b . Udowodnić, że każdą funkcję $f \in C(K)$ o własności $f(a) = f(b)$ można jednostajnie przybliżyć funkcjami z \mathcal{A} .
103. Pokazać, że dla każdej funkcji $f \in C_{\mathbb{R}}^1[0, 1]$ istnieje ciąg wielomianów $p_n(x)$ taki, że

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |p_n(x) - f(x)| + \max_{0 \leq x \leq 1} |p_n'(x) - f'(x)| \xrightarrow{n} 0.$$

104. Czy każda funkcja ciągła z $C([0, 1] \cup [2, 3])$ jest jednostajną granicą wielomianów?
105. Niech \mathcal{A} oznacza rodzinę wielomianów $p(x)$ o własności $p''(0) = 0$. Czy każda funkcja ciągła z $C[1, 2]$ jest jednostajną granicą elementów z \mathcal{A} ?
106. Czy dla $\varepsilon > 0$ i funkcji $f \in C[0, 1]$ można znaleźć wielomian $p(x)$ taki, że $\|f - p\|_{\infty} < \varepsilon$ oraz $p(2) = 5$, $p'(2) = 6$?
107. Rozważmy przestrzeń Hilberta $\mathcal{H} = L^2((0, 1) \times (0, 1))$. Pokazać, że jeśli funkcja $h(x, y) \in \mathcal{H}$ spełnia

$$\int_0^1 \int_0^1 h(x, y) f(x) g(y) dx dy = 0, \quad f, g \in L^2(0, 1)$$

to $h(x, y) = 0$ prawie wszędzie.

108. Funkcja $f \in C[0, 1]$ spełnia

$$\int_0^1 x^{10n} f(x) dx = 0, \quad n \geq 10.$$

Pokazać, że $f = 0$.

109. Pokazać, że dla miary σ -skończonej μ na zbiorze X przestrzenią sprzężoną do $L^1(X, \mu)$ jest $L^\infty(X, \mu)$. Uwaga: W przestrzeni $L^\infty(X, \mu)$ norma jest określona przez

$$\|f\|_\infty = \inf \left\{ \sup_{x \in X \setminus A} |f(x)| : A \subset X, \mu(A) = 0 \right\}.$$

110. Obliczyć normy funkcjonałów na przestrzeni $L^p(\mathbb{R}, \mu)$.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \varphi(f) &= \int_0^1 f(x) dx, & d\mu(x) &= dx \\ \text{(b)} \quad \varphi(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-x^2} dx, & d\mu(x) &= e^{-x^2} dx. \\ \text{(c)} \quad \varphi(f) &= \sum_{n=1}^{\infty} f(n) e^{-n}, & \mu &= \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n. \end{aligned}$$

111. Które z funkcjonałów określonych na wielomianach rozszerzają się do ograniczonych funkcjonałów na $C[0, 1]$?

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \varphi(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) &= a_0, \\ \text{(b)} \quad \varphi(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) &= a_1, \\ \text{(c)} \quad \varphi(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) &= a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \dots + \frac{1}{n+1}a_n, \\ \text{(d)} \quad \varphi(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) &= a_0 + 2a_1 + 2^2a_2 + \dots + 2^na_n. \end{aligned}$$

112. Λ jest ciągłym funkcjonałem liniowym nad \mathbb{R} na przestrzeni funkcji $C[0, 1]$ o wartościach zespolonych. Λ nazywamy samosprzężonym jeśli $\Lambda(\bar{f}) = \overline{\Lambda(f)}$. Pokazać, że Λ jest samosprzężony wtedy i tylko wtedy, gdy $\Lambda(f)$ przyjmuje wartości rzeczywiste dla rzeczywistych funkcji f . Pokazać, że każdy funkcjonał Λ można rozłożyć na sumę $\Lambda = \Lambda_1 + i\Lambda_2$, gdzie Λ_1, Λ_2 są samosprzężone, oraz rozkład ten jest jedyny.

113. Funkcjonał Λ na rzeczywistej przestrzeni $C_{\mathbb{R}}(X)$, gdzie X jest zwartą przestrzenią topologiczną, nazywamy dodatnim jeśli $\Lambda(f) \geq 0$, dla każdej nieujemnej funkcji f . Pokazać, że $\|\Lambda\| = \Lambda(\mathbf{1})$, gdzie $\mathbf{1}$ oznacza funkcję stale równą 1. Wskazówka. Skorzystać z nierówności $-\|f\|_\infty \mathbf{1} \leq f \leq \|f\|_\infty \mathbf{1}$. Pokazać, że jeśli funkcjonał Λ spełnia $\|\Lambda\| = \Lambda(\mathbf{1})$, to Λ jest funkcjonałem dodatnim. Wskazówka. Jeśli $0 \leq f \leq 1$, to $\|2f - 1\| \leq 1$.

114. Załóżmy, że liczby m_n mają własność

$$\forall x \in [0, 1] \quad \sum_{k=0}^n a_k x^k \geq 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^n a_k m_k \geq 0,$$

dla dowolnych n i $a_k \in \mathbb{R}$. Pokazać, że istnieje funkcja niemalejąca σ na przedziale $[0, 1]$ taka, że

$$m_n = \int_0^1 x^n d\sigma(x).$$

Wskazówka: Określić funkcjonal φ na wielomianach wzorem

$$\varphi(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) = a_0m_0 + a_1m_1 + \dots + a_nm_n.$$

Z założenia φ jest dodatni. Pokazać, że $|\varphi(p)| \leq m_0 \|p\|_\infty$, gdzie p jest wielomianem. Pokazać, że φ rozszerza się jednoznacznie do ograniczonego funkcjonału Φ na $C_{\mathbb{R}}[0, 1]$. Zauważyć, że Φ jest dodatni. Skorzystać z twierdzenia Riesz'a o postaci funkcjonałów na $C_{\mathbb{R}}[0, 1]$.

115. Niech σ będzie funkcją niemalejącą na $[0, 1]$. Dla $n \geq 0$ liczby $m_n = \int_0^1 x^n d\sigma(x)$ nazywamy momentami funkcji σ . Pokazać, że momenty są liczbami nieujemnymi oraz spełniają warunek

$$\Delta^N m_n \geq 0 \quad \text{dla } N \geq 1, n \geq 0,$$

gdzie $\Delta m_n = m_n - m_{n+1}$ i $\Delta^N = \Delta(\Delta^{N-1})$. **Wskazówka:** Obliczyć $\Delta^N x^n$ i zauważyć, że $\Delta^N \varphi(x^n) = \varphi(\Delta^N x^n)$, gdzie φ jest określone jak w zadaniu 15.

- *116. Ciąg liczb nieujemnych m_n , $n \geq 0$ nazywamy całkowicie monotonicznym jeśli

$$\Delta^N m_n \geq 0 \quad \text{dla } N \geq 1, n \geq 0.$$

Pokazać, że istnieje funkcja niemalejąca σ na $[0, 1]$ taka, że $m_n = \int_0^1 x^n d\sigma(x)$. **Wskazówka:** Pokazać, że funkcjonal φ określony na wielomianach wzorem

$$\varphi(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) = a_0m_0 + a_1m_1 + \dots + a_nm_n$$

jest dodatni. W tym celu udowodnić, że jeśli p jest wielomianem nieujemnym stopnia N , to wielomiany Bernsteina $B_n(p)$ są wielomianami stopnia N dla $n \geq N$. Ponadto z założenia $\varphi(B_n(p)) \geq 0$ oraz $\varphi(p) = \lim_n B_n(p)$.

Literatura

[1]