

5. Zadania z analizy funkcjonalnej 3

1. Pokazać, że jeśli dwie krzywe zamknięte C_1 i C_2 obiegają jednokrotnie spektrum $\sigma(a)$ elementu algebry Banacha A , to dla dowolnej funkcji $f(z)$ holomorficznej w obszarze otwartym U zawierającym obszary ograniczone przez te krzywe mamy

$$\int_{C_1} f(z)(ze - a)^{-1} dz = \int_{C_2} f(z)(ze - a)^{-1} dz.$$

Wskazówka: Uzasadnić, że istnieje krzywa zamknięta C_3 zawarta w U , obiegająca $\sigma(a)$, rozłączna zarówno z C_1 jak i z C_2 .

2. Niech $f(z)$ będzie funkcją ciągłą określoną na krzywej C w płaszczyźnie zespolonej o wartościach w przestrzeni Banacha A . Pokazać, że

$$\left\| \int_C f(z) dz \right\| \leq l(C) \max_{z \in C} \|f(z)\|,$$

gdzie $l(C)$ oznacza długość krzywej.

3. Niech $f(s, t)$ będzie funkcją ciągłą określoną na $[a, b] \times [c, d]$ o wartościach w przestrzeni Banacha A . Pokazać, że funkcje

$$g(t) = \int_c^d f(t, s) ds \quad h(s) = \int_a^b f(t, s) dt$$

są ciągłe oraz

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(t, s) dt \right) ds = \int_c^d \left(\int_a^b f(t, s) ds \right) dt.$$

4. Niech $f(z)$ będzie funkcją całkowitą. Pokazać, że dla elementu a algebry Banacha A mamy

$$f(a) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} a^n.$$

5. Niech A będzie podalgebrą Banacha algebry Banacha B , oraz $e \in A$. Pokazać, że dla elementu $a \in A$ mamy $\sigma_B(a) \subseteq \sigma_A(a)$ oraz $\partial\sigma_A(a) \subseteq \partial\sigma_B(a)$, gdzie ∂C oznacza brzeg zbioru $C \subset \mathbb{C}$. Wywnioskować, że jeśli $\sigma_B(a) \subset \mathbb{R}$, to $\sigma_B(a) = \sigma_A(a)$. **Wskazówka:** Pokazać, że jeśli $\lambda \in \partial\sigma_A(a)$, natomiast $\lambda_n \rightarrow \lambda$ oraz $\lambda_n \notin \sigma_A(a)$, to $\|(\lambda_n e - a)^{-1}\| \rightarrow \infty$. Z tego warunku wyprowadzić, że $\lambda \in \sigma_B(a)$.
6. Niech B będzie algebrą Banacha z jednością. Niech A oznacza domkniętą podalgebrę generowaną przez element a oraz elementy postaci $(ze - a)^{-1}$, dla $z \notin \sigma(a)$. Pokazać, że przestrzeń ideałów maksymalnych podalgebry A jest homeomorficzna z $\sigma(a)$. Udowodnić, że element a generuje algebrę A wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\sigma(a)$ nie rozcina płaszczyzny zespolonej.
7. Dla elementu a algebry Banacha za jednością A i funkcji f holomorficznej w obszarze zawierającym $\sigma(a)$ mamy $f(a) = 0$. Pokazać, że zbiór $\sigma(a)$ jest skończony. Wskazać wielomian $p(z)$ taki, że $p(a) = 0$.
8. Niech f będzie ograniczoną funkcją rzeczywistą na $[0, 1]$ ciągłą poza punktem $1/2$. Niech A oznacza algebrę Banacha generowaną przez f i $C[0, 1]$. Wyznaczyć przestrzeń ideałów maksymalnych dla A .
9. Znaleźć przestrzeń ideałów maksymalnych algebry dyskowej A złożonej z funkcji ciągłych w domkniętym kole jednostkowym i holomorficznym wewnątrz tego koła.

10. Dla algebry Banacha A z jednością (niekoniecznie przemiennej) i elementu $a \in A$ określamy operator liniowy $L_a : A \rightarrow A$ wzorem $L_a x = ax$. Pokazać, że $\sigma(a) = \sigma(L(a))$.
11. Niech A będzie domkniętą $*$ -podalgebrą C^* -algebry z jednością B oraz $e \in A$. Pokazać, że jeśli element $a \in A$ jest odwracalny w B , to $a^{-1} \in A$. (**Wskazówka:** Rozważyć elementy a^*a oraz aa^*). Wywnioskować, że dla $a \in A$ mamy $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$.
12. Pokazać, że w przemiennej C^* -algebrze $\sigma(a^*a) \subset [0, \infty)$. Załóżmy, że dla elementu b zachodzi $\varphi(b) \geq 0$ dla każdego φ . Wtedy istnieje a spełniający $b = a^*a$.
- 13* Niech M będzie podprzestrzenią liniową kowymiaru 1 w przemiennej algebrze Banacha z jednością A taką, że przekrój M i $\exp(A) = \{\exp(a) : a \in A\}$ jest pusty. Pokazać, że M jest ideałem maksymalnym. **Wskazówka:** Przy ustalonym elemencie a zastosować odpowiedni funkcjonal liniowy do funkcji całkowitej $F(z) = \exp(za)$. Pokazać, że teza jest spełniona bez założenia przemienności algebry.