

6. Zadania z analizy funkcjonalnej 3

1. Niech A będzie operatorem ograniczonym w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Załóżmy, że $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$, gdzie $\mathcal{H}_0$ i $\mathcal{H}_1$ są domkniętymi podprzestrzeniami niezmienniczymi dla A , tzn. $A(\mathcal{H}_0) \subset \mathcal{H}_0$ oraz $A(\mathcal{H}_1) \subset \mathcal{H}_1$. Pokazać, że $\mathcal{H}_0$ i $\mathcal{H}_1$ są podprzestrzeniami niezmienniczymi dla każdego operatora postaci $f(A)$, gdzie f jest funkcją holomorficzną w otwartym otoczeniu spektrum operatora A .
2. Niech A będzie $*$ -algebrą Banacha z jednością. Pokazać, że $e^* = e$. Udowodnić, że jeśli $a_n \rightarrow a$ to $a_n^* \rightarrow a^*$.
3. Pokazać, że dla elementu a w $*$ -algebrze Banacha z jednością mamy $\sigma(a^*) = \overline{\sigma(a)}$. Pokazać, że jeśli $f \in \mathcal{H}(a)$, to dla $f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}$ mamy $f^* \in \mathcal{H}(a^*)$. Wykazać, że wtedy $f(a)^* = f^*(a^*)$.
4. Niech a będzie elementem samosprężonym w $*$ -algebrze Banacha z jednością. Korzystając z poprzedniego zadania wywnioskować, że $(e^{ita})^* = e^{-ita}$ dla $t \in \mathbb{R}$.
5. Niech U będzie operatorem unitarnym w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$.
 - (a) Pokazać, że jeśli funkcja f jest holomorficzną w otoczeniu okręgu jednostkowego oraz f_0 jest obcięciem tej funkcji do okręgu jednostkowego, to $f(U) = f_0(U)$. **Uwaga:** Operator $f_0(U)$ jest określony poprzez granicę $p_n(U)$ dla ciągu wielomianów trygonometrycznych $P_n(t) = p_n(e^{it})$, zbieżnych jednostajnie do $F(t) = f(e^{it})$.
 - (b) Pokazać, że jeśli $\sigma(U)$ jest właściwym podzbiorem okręgu oraz f jest holomorficzną w otoczeniu łuku zawierającego $\sigma(U)$, to również $f(U) = f_0(U)$. **Wskazówka:** Skorzystać z twierdzenia Rungego.
 - (c) * Udowodnić, że ogólnie jeśli f jest holomorficzną w otoczeniu $\sigma(U)$, to $f(U) = f_0(U)$. **Wskazówka:** Jeśli spektrum jest spójne, to korzystamy z (b). Jeśli jest niespójne, to f jest holomorficzną w skończonej sumie rozłącznych zbiorów otwartych pokrywających spektrum. Skorzystać z zadania 1 i sprowadzić zagadnienie do przypadku (b).
6. Pokazać, że jeśli $*$ -algebra, niekoniecznie z jednością, posiada dwie C^* normy $\|a\|$ i $\|a\|$ takie, że

$$\| \|a\| \leq \|a\|, \quad a \in A$$

to normy te są równe.

7. Pokazać, że w C^* -algebrze, z jednością lub bez, mamy

$$\|a\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|ax\|.$$

Wskazówka: Pokazać, że supremum jest osiągnięte na elemencie $a^*/\|a\|$ dla $a \neq 0$.

8. Dla C^* -algebry A bez jedności niech $B(A)$ oznacza przestrzeń ograniczonych operatorów liniowych z A w siebie. Pokazać, że odwzorowanie $A \ni a \mapsto L_a \in B(A)$, gdzie $L_a x = ax$, określa izometryczne włożenie A w $B(A)$. Niech $\mathcal{A}$ oznacza podzbiór w $B(A)$ złożony z operatorów postaci $L_a + \lambda I$, gdzie $a \in A$ oraz $\lambda \in \mathbb{C}$. Pokazać, że $\mathcal{A}$ jest podalgebrą. Pokazać, że $\mathcal{A}$ jest C^* -algebrą ze sprzężeniem określonym przez $L_a + \lambda I \mapsto L_{a^*} + \bar{\lambda} I$ w normie odziedziczonej z $B(A)$.