

1. Zadania z analizy funkcjonalnej 3

- *1. Niech $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ będzie ograniczonym operatorem liniowym. Niech $\lambda \in \partial\sigma(T)$, tzn. λ jest punktem brzegowym w $\mathbb{C}$ spektrum operatora T . Pokazać, że można znaleźć ciąg wektorów jednostkowych v_n takich, że $\|Tv_n - \lambda v_n\| \rightarrow 0$, gdy $n \rightarrow \infty$. To oznacza, że λ jest aproksymatywną wartością własną. **Wskazówka:** Niech $\lambda_n \notin \sigma(T)$ oraz $\lambda_n \rightarrow \lambda$. Pokazać, że normy operatorów $(\lambda_n I - T)^{-1}$ nie są wspólnie ograniczone. Na tej podstawie znaleźć ciąg wektorów jednostkowych w_n spełniających $\|(\lambda_n I - T)^{-1}w_n\| \rightarrow \infty$.

2. Dla operatora $S : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ określonego wzorem

$$S(x_0, x_1, x_2, \dots) \rightarrow (x_1, x_2, x_3, \dots)$$

i liczb $|\lambda| = 1$ skonstruować aproksymatywne wektory własne.

3. Załóżmy, że spektrum operatora normalnego T składa się tylko z jednego punktu z_0 . Pokazać, że $T = z_0 I$. **Wskazówka:** Promień spektralny operatora normalnego jest równy jego normie.
4. Pokazać, że teza poprzedniego zadania nie jest prawdziwa dla dowolnego operatora z $B(\mathcal{H})$. **Wskazówka:** Rozważyć macierze zespolone 2×2 oraz $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$.
5. Pokazać, że jeśli liczba z_0 jest izolowanym punktem spektrum operatora unitarnego U , to z_0 jest wartością własną operatora U . **Wskazówka:** Rozważyć operator $f(U)$, gdzie f jest nieujemną funkcję ciągłą określoną na okręgu taką, że $f(z_0) = 1$ oraz $f(z) = 0$ dla $z \neq z_0$ i $z \in \sigma(U)$. Zauważyć, że funkcje $zf(z)$ oraz $z_0 f(z)$ są równe sobie na $\sigma(U)$.
6. Załóżmy, że spektrum operatora unitarnego U jest skończonym podzbiorem okręgu jednostkowego złożonym z $z_1, z_2, \dots, z_n$. Pokazać, że

$$U = \sum_{k=1}^n z_k P_k,$$

gdzie P_k jest rzutem ortogonalnym na podprzestrzeń $\mathcal{H}_k = \{v \in \mathcal{H} \mid Uv = z_k v\}$.

7. Spektrum operatora unitarnego ma postać $\sigma(U) = \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{z_0\}$, przy czym liczba z_0 jest jedynym punktem skupienia. Pokazać, że

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} z_n P_n \text{ albo } U = \sum_{n=1}^{\infty} z_n P_n + z_0 P_0$$

gdzie P_n oznacza rzut na podprzestrzeń własną odpowiadającą wartości własnej z_n , $n \geq 0$ oraz szeregi są zbieżne mocno.

8. Wskazać operator unitarny U , dla którego zbiór wartości własnych jest gęstym podzbiorem okręgu jednostkowego.
9. Wskazać operator unitarny bez wartości własnych, którego spektrum jest równe ustalonemu domkniętemu łukowi koła jednostkowego.
10. Pokazać, że dla operatora unitarnego U ciąg operatorów

$$\frac{1}{n}(I + U + \dots + U^{n-1})$$

jest mocno zbieżny oraz zbieżny w normie jeśli $1 \notin \sigma(U)$. **Wskazówka:** Zbadać zachowanie się tego operatora na $\text{Im}(I - U)$ i na dopełnieniu ortogonalnym.