

4. Zadania z analizy funkcjonalnej 3

Wszystkie krzywe występujące poniżej są kawałkami klasy C^1 .

1. Pokazać, że w przemiennej algebrze Banacha z jednością funkcyjnymi multiplikatywnymi są liniowo niezależne.
2. Niech T będzie operatorem ograniczonym na przestrzeni Hilberta spełniającym $T^n = 0$. Wyznaczyć funkcyjnymi multiplikatywnymi algebry $\text{span}\{I, T, \dots, T^{n-1}\}$.
3. Niech B będzie domkniętą podalgebrą przemiennej algebry Banacha A z jednością $e \in B$. Pokazać, że element $b \in B$ odwracalny w A nie musi być odwracalny w A . **Wskazówka:** Przeanalizować przykłady omawiane na wykładzie.
4. Pokazać, że jeśli φ jest funkcyjnym multiplikatywnym w algebrze Banacha bez jedności A to funkcyjną $\tilde{\varphi}$ określony na $\tilde{A} = A \oplus \mathbb{C}$ wzorem $\tilde{\varphi}(a \oplus \lambda) = \varphi(a) + \lambda$ jest multiplikatywny.
5. Udowodnić, że dla wielomianu $p(z)$ oraz krzywej zamkniętej C nie przecinającej spektrum elementu a algebry Banacha A zachodzi wzór

$$\int_C [p(z)e - p(a)](ze - a)^{-1} dz = 0.$$

6. Niech $f_n(z)$ będzie ciągiem funkcyj holomorficznych o wartościach w algebrze Banacha A określonych na pewnym otwartym podzbiórze $U \subset \mathbb{C}$. Niech C będzie krzywą zawartą w U . Załóżmy, że $f_n(z) \Rightarrow f(z)$ dla $z \in C$. Pokazać, że

$$\int_C f_n(z) dz \rightarrow \int_C f(z) dz.$$

7. Niech A będzie $*$ -algebrą Banacha z jednością. Niech f będzie funkcyj holomorficzną w obszarze otwartym $U \supset \sigma(a)$. Załóżmy, że zorientowana dodatnio krzywa prosta C jest zawarta w U i rozłączna ze spektrum elementu a , ale niekoniecznie obiega $\sigma(a)$. Określić

$$f_C(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)(ze - a)^{-1} dz.$$

- (a) Pokazać, że obszar wewnątrz C nie zawiera punktów z $\sigma(a)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f_C(a) = 0$ dla wszystkich funkcyj holomorficznych w U .
 - (b) Pokazać, że jeśli g jest holomorficzna w U , to $f_C(a)g_C(a) = (fg)_C(a)$.
 - (c) Znaleźć spektrum $f_C(a)$.
 - (d) Pokazać, że jeśli $f(z) \equiv 1$, to $f_C(a)$ jest rzutem.
8. Niech f będzie funkcyj ciągłą odwzorowującą otwarty podzbiór $U \subset \mathbb{C}$ w algebrę Banacha z jednością A . Załóżmy, że $\varphi \circ f$ jest funkcyj holomorficzną dla każdego funkcyjalu $\varphi \in A^*$. Pokazać, że wtedy f jest holomorficzna. **Wskazówka:** Udowodnić, że

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w - z} dw,$$

gdzie C jest prostą krzywą zamkniętą w U taką, że z leży wewnątrz C .