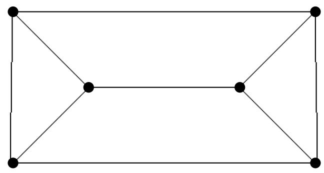
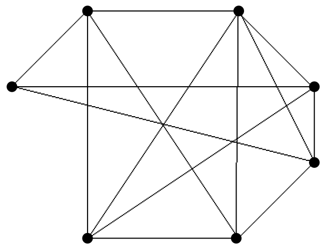
14. Zadania do wykładu
Wstęp do matematyki dyskretnej

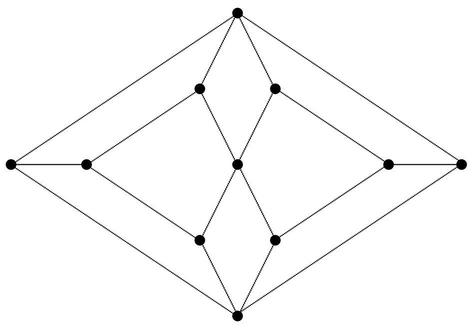
1. Ile razy trzeba podnieść ołówek nad kartkę przy rysowaniu grafu poniżej ?



2. Znaleźć cykl Hamiltona w grafie poniżej.



3. Pokazać, że poniższy graf nie posiada cyklu Hamiltona, ale posiada łańcuch Hamiltona.



4. Ile cykli Hamiltona posiada graf zupełny K_n ?

5. Niech G będzie grafem, którego wierzchołkami są 64 pola szachownicy 8×8, przy czym dwa pola są połączone krawędzią dokładnie wtedy, gdy mają wspólny bok. Czy graf G posiada łańcuch Hamiltona łączący dwa przeciwległe rogi szachownicy ?

6. Rozwiązać podane zagadnienie, formułując je w języku teorii grafów: W jaki sposób trzeba wykonywać ruchy konikiem szachowym aby przejść wszystkie pola szachownicy 8×8, każde pole tylko raz ?

$*$7. (Pósa, 1962.) Niech G będzie grafem prostym o $n \geqslant 3$ wierzchołkach takim, że

(i) dla każdego k spełniającego $1 \leqslant k \leqslant (n-1)/2$, liczba wierzchołków mających stopień co najwyżej k jest mniejsza niż k,

(ii) jeśli n jest nieparzysta, to liczba wierzchołków mających stopień co najwyżej $(n-1)/2$ jest równa co najwyżej $(n-1)/2$.

Pokazać, że G ma cykl Hamiltona.

$*$8. Korzystając z poprzedniego zadania wyprowadzić twierdzenie Ore.

$*$9. (Ore, 1961.) Niech G będzie grafem prostym o n wierzchołkach i m krawędziach, przy czym $m \geqslant \frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2$. Pokazać, że G posiada cykl Hamiltona. Znaleźć graf o n wierzchołkach i $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1$ krawędziach, który nie posiada cyklu Hamiltona.

10. Dla liczby $n \geqslant 3$ niech G_n oznacza graf. którego wierzchołkami są wszystkie permutacje zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, przy czym dwie permutacje są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy jedną permutację można otrzymać z drugiej poprzez przestawienie dwu liczb. Pokazać, że G_n ma cykl Hamiltona.

11. Niech D będzie grafem skierowanym takim, że dla każdego wierzchołka liczba wejść jest równa liczbie wyjść. Pokazać, że D posiada obwód elementarny.

12. Pokazać, że graf skierowany posiadający obwód Eulera jest mocno spójny.

13. Podać przykład grafu skierowanego D nie posiadającego obwodu Eulera, ale takiego, że związany z D graf G posiada cykl Eulera.

14. Udowodnić, twierdzenie z wykładu o istnieniu obwodu Eulera.

15. Udowodnić, twierdzenie z wykładu o istnieniu ścieżki Eulera.

16. W grafie zupełnym K_n określamy dowolnie kierunek każdej krawędzi otrzymując w ten sposób graf skierowany D. W ten sposób dla dowolnych dwu różnych wierzchołków x i y istnieje łuk od x do y albo od y do x. Pokazać, że D posiada ścieżkę Hamiltona.

17. Pokazać, że jeśli graf D z poprzedniego zadania jest mocno spójny, to istnieje obwód Hamiltona.

18. Niech G będzie grafem spójnym z przesmykiem e. Pokazać, że po usunięciu e otrzymany graf ma dokładnie dwie spójne komponenty.

19. Pokazać, że graf skierowany D nie posiada obwodów elementarnych wtedy i tylko wtedy, gdy jego wierzchołki można ustawić w ciąg $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tak, że każdy łuk w D ma postać (x_i, x_j), gdzie $i < j$.