

Niech $|x| \leq M$ oraz $M \geq 1$.

$$0 \leq \ln(nx^2 + 1) \leq \ln(nM^2 + 1) \leq \ln(2nM^2).$$

Mamy $\ln(1+x) \leq x$ dla $x > 0$. Zatem $\ln x \leq x$ dla $x \geq 1$. Stąd

$$\ln x = 4 \ln x^{1/4} \leq 4x^{1/4}, \quad x \geq 1.$$

Podstawiając $x = 2nM^2$ otrzymujemy

$$\ln(2nM^2) \leq 4(2M^2)^{1/4}n^{1/4}.$$

Czyli

$$0 \leq \frac{\ln(nx^2 + 1)}{n\sqrt{n}} \leq 4(2M^2)^{1/4}n^{-5/4},$$

dla $|x| \leq M$. Z kryterium Weierstrassa szereg

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(nx^2 + 1)}{n\sqrt{n}}$$

jest zbieżny jednostajnie na każdym przedziale $[-M, M]$. Zatem $f(x)$ jest ciągła na $\mathbb{R}$. Rozważmy szereg pochodnych

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{(1 + nx^2)\sqrt{n}}.$$

Dla $0 < \delta \leq |x| \leq M$ mamy

$$\frac{2|x|}{(1 + nx^2)\sqrt{n}} \leq \frac{2M}{(1 + n\delta^2)\sqrt{n}}$$

Znowu z kryterium Weierstrassa szereg pochodnych jest jednostajnie zbieżny dla $\delta \leq |x| \leq M$. Zatem z twierdzenia na wykładzie $f(x)$ jest różniczkowalna w sposób ciągły poza punktem $x = 0$ oraz

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{(1 + nx^2)\sqrt{n}}, \quad x \neq 0.$$

Pozostaje sprawdzić różniczkowalność w $x = 0$. Obliczymy, że

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 2\pi. \tag{1}$$

Wtedy z ciągłości funkcji $f(x)$ w zerze i z reguły de l'Hôpitala

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 2\pi.$$

Udowodnimy (1). Z parzystości funkcji założymy, że $x > 0$ i obliczymy tylko granicę prawostronną. Z twierdzenia Lagrange'a mamy

$$\begin{aligned} 4(\operatorname{arctg} x\sqrt{n+1} - \operatorname{arctg} x\sqrt{n}) &= \frac{4x}{1+x^2\sqrt{a_n}}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ &= \frac{2x}{1+x^2\sqrt{a_n}} \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \frac{2x}{1+x^2\sqrt{a_n}} \frac{1}{\sqrt{b_n}} \end{aligned}$$

dla pewnych $n < a_n, b_n < n+1$. Zatem

$$4(\operatorname{arctg} x\sqrt{n+1} - \operatorname{arctg} x\sqrt{n}) \leq \frac{x}{(1+nx^2)\sqrt{n}} \leq 4(\operatorname{arctg} x\sqrt{n+2} - \operatorname{arctg} x\sqrt{n+1}).$$

Sumując wszystkie strony od 1 do N otrzymamy

$$4(\operatorname{arctg} x\sqrt{N+1} - \operatorname{arctg} x) \leq \sum_{n=1}^N \frac{2x}{(1+nx^2)\sqrt{n}} \leq 4(\operatorname{arctg} x\sqrt{N+2} - \operatorname{arctg} x\sqrt{2})$$

Przechodzimy do granicy z $N \rightarrow \infty$. Wtedy

$$2\pi - 4\operatorname{arctg} x \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{(1+nx^2)\sqrt{n}} \leq 2\pi - 4\operatorname{arctg} x\sqrt{2}.$$

Następnie przechodzimy do granicy, gdy $x \rightarrow 0^+$ i z twierdzenia o trzech funkcjach otrzymujemy

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{(1+nx^2)\sqrt{n}} = 2\pi.$$