

1. Zadania z programowania matematycznego
do wykładu R. Szwarcza

1. Mówimy, że funkcja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jest wypukła, jeśli

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y),$$

dla $x, y \in \mathbb{R}^n$ i $0 \leq \lambda \leq 1$. Funkcję $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy wklęsłą, jeśli funkcja $-f$ jest wypukła. Załóżmy, że funkcja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jest jednocześnie wypukła i wklęsła. Pokazać, że f jest funkcją afiniczną. **Wskazówka:** Pokazać, że funkcja $F(x) = f(x) - f(0)$ jest liniowa.

2. Mówimy, że $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją wypukłą kawałkami liniową, jeśli f ma postać

$$f(x) = \max_{i=1, \dots, m} (c_i x + d_i)$$

dla pewnych wektorów c_i oraz liczb d_i . Pokazać, że suma funkcji wypukłych kawałkami liniowych jest również funkcją tego typu. **Wskazówka:** Niech

$$g(x) = \max_{j=1, \dots, n} (a_j x + b_j).$$

Pokazać, że

$$f(x) + g(x) = \max_{i,j} [(a_j + c_i)x + (b_j + d_i)].$$

3. Rozważmy zagadnienie

$$\begin{array}{ll} \text{zminimalizować} & \sum_{i=1}^n c_i |x_i| \\ \text{przy warunku} & Ax \geq b. \end{array}$$

Pokazać, że przez podstawienie $x_i = x_i^+ - x_i^-$ oraz $|x_i| = x_i^+ + x_i^-$ można sprowadzić problem do zagadnienia programowania liniowego. Przeformułować zagadnienia

$$\begin{array}{ll} \text{zminimalizować} & |x_1| + 4x_2 \\ \text{przy warunku} & -x_1 + 2|x_2| \geq 1. \end{array}$$

oraz

$$\begin{array}{ll} \text{zminimalizować} & 2x_1 + 3|x_2 - 10| \\ \text{przy warunku} & |x_1 + 2| + |x_2| \leq 5. \end{array}$$

4. Rozważmy zagadnienie

$$\begin{array}{ll} \text{zminimalizować} & -x_1 - x_2 \\ \text{przy warunkach} & x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

Zaznaczyć na wykresie w płaszczyźnie $x_1 x_2$ punkty odpowiadające rozwiązaniom dopuszczalnym. Znaleźć rozwiązanie optymalne.

5. Firma Glass Co. produkuje szklane drzwi z aluminiowymi ramami i okna w drewnianych ramach. Produkcja przebiega w trzech fabrykach: fabryka F1 wytwarza aluminiowe ramy i oprzyrządowanie, fabryka F2 - drewniane ramy, a w fabryce F3 wytwarzane jest szkło i wykonywany jest montaż. Zarząd firmy chce wprowadzić nowy model drzwi i okien, przy czym na partię okien fabryka F1 musi przeznaczyć 1 godzinę tygodniowo, a fabryka F3 - 3 godziny. Natomiast na partię drzwi fabryki F2 i F3 muszą przeznaczyć po 2 godziny tygodniowo. Fabryki F1, F2 i F3 mogą przeznaczyć na dodatkową produkcję odpowiednio 4, 12 i 18 godzin tygodniowo. Zysk ze sprzedaży partii okien wynosi 3000 \$ a ze sprzedaży partii drzwi 5000 \$. Zarząd chce zaplanować dodatkową produkcję tak, aby zysk był jak największy. Sformułować odpowiednie zagadnienie programowania liniowego.
6. Amerykański bokser odżywia się ziemniakami i kotletami (oraz płynami i witaminami). Dieta nie jest zdrowa, więc bokser chce się upewnić, że zjada właściwe ilości obu pożywien tak, aby spełnić podstawowe wymagania żywieniowe. W tabeli poniżej podane są zawartości w gramach składników odżywczych w jednej porcji.

Składnik	Kotlety	Ziemniaki	Dzienna norma
Węglowodany	5	15	≥ 50
Białko	20	5	≥ 40
Tłuszcz	15	2	≤ 60
Koszt	\$ 4	\$ 2	

Bokser chce wyznaczyć dzienną ilość porcji (może być ułamkowa) kotletów i ziemniaków, aby spełnić wymagania żywieniowe najmniejszym kosztem. Sformułować model programowania liniowego dla tego zagadnienia.

7. Rozważmy okręg szkolny, w którym znajduje się I osiedli, J szkół i G poziomów w każdej szkole. Szkoła j może przyjąć C_{jg} uczniów na poziom g . W osiedlu i mieszka S_{ig} uczniów o poziomie g . Odległość szkoły j od osiedla i wynosi d_{ij} . Sformułować zagadnienie programowania liniowego, w którym celem będzie przydzielenie uczniów do szkół w ten sposób, że całkowita droga pokonywana przez uczniów w drodze do szkoły będzie minimalna. **Wskazówka:** Przyjąć, że x_{ijg} oznacza liczbę uczniów z osiedla i uczęszczających do szkoły j na poziom g . Zapisać warunki jakie muszą spełniać te liczby. Zapisać za pomocą tych liczb i współczynników d_{ij} całkowitą drogę pokonywaną przez uczniów.
- *8. (Optymalna wymiana walut) Załóżmy, że dostępnych jest N walut, oraz jednostkę waluty w_i można wymienić na r_{ij} jednostek waluty w_j . Zakładamy, że $r_{ij} > 0$. Regulacje prawne wyznaczają dzienny limit u_i na walutę w_i , dla $i = 1, 2, \dots, N$, jaka może być wymieniona. Załóżmy, że zaczynamy z ilością $B \leq u_1$ waluty w_1 pewnego dnia i chcielibyśmy uzyskać jak najwięcej waluty w_N , pod koniec dnia, poprzez ciąg wymian. Sformułować to zagadnienie w języku programowania liniowego dla 3 walut i dla 4 walut. Zakładamy, że

$$r_{i_1 i_2} r_{i_2 i_3} \dots r_{i_{k-1} i_k} r_{i_k i_1} \leq 1,$$

tzn. nie można się wzbogacić poprzez cykliczną wymianę walut. Sformułować zagadnienie dla dowolnej ilości walut.