

1. Zadania do wykładu R. Szwarca
Wielomiany ortogonalne i problem momentów

1. Obliczyć momenty miar

$$\begin{aligned}d\mu(x) &= x^\alpha dx, & x \in [0, 1], \alpha > -1, \\d\mu(x) &= x^\alpha e^{-x} dx, & x > 0, \alpha > -1, \\d\mu(x) &= \frac{1}{2} d\delta_{-1}(x) + \frac{1}{2} d\delta_1(x), \\d\mu(x) &= e^{-x^2} dx.\end{aligned}$$

2. Miara probabilistyczna μ na prostej ma nośnik ograniczony. Pokazać, że problem momentów $\{m_n\} = \int x^n d\mu(x)$ jest jednoznaczny. **Wskazówka:** Udowodnić, że jeśli $\text{supp } \mu \subset [-a, a]$, to $m_{2n} \leq a^{2n}$. Wykazać też, że jeśli $b \in \text{supp } \mu$, to $\lim m_{2n}^{1/2n} \geq |b|$.

3. Miara probabilistyczna μ na prostej spełnia $|m_n| \leq CR^n n!$, dla pewnych stałych $C > 0$ i $R > 0$. Pokazać, że problem momentów $\{m_n\} = \int x^n d\mu(x)$ jest jednoznaczny. **Wskazówka:** Udowodnić, że $e^{\alpha x} \in L^1(\mathbb{R}, \mu)$ dla $|\alpha| < R^{-1}$. Zauważyć, że funkcja $F_\mu(z) = \int e^{izx} d\mu(x)$ jest analityczna dla $|\text{Im } z| < R^{-1}$. Udowodnić, że współczynniki Taylora w punkcie $z = 0$ dla funkcji $F(z)$ są równe $i^n m_n / n!$. Zatem $F_\mu(z) = F_\sigma(z)$, dla $|\text{Im } z| < R^{-1}$, jeśli σ jest innym rozwiązaniem problemu momentów. Wykazać, że wtedy $\mu = \sigma$.

4. Pokazać, że funkcje postaci $p(x)e^{-x}$, gdzie $p(x)$ jest wielomianem, leżą gęsto w przestrzeni $C_0(\mathbb{R}_+)$. **Wskazówka:** Pokazać, że

$$e^{-x/2} \left| e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \right| \rightarrow 0, \quad \text{gdy } n \rightarrow \infty$$

jednostajnie dla $x \geq 0$. Niech V oznacza domknięcie przestrzeni funkcji postaci $p(x)e^{-x}$ w normie $\sup$. Pokazać indukcyjnie, że V zawiera funkcje postaci $p(x)e^{-nx}$, gdzie $p(x)$ jest wielomianem i $n \geq 2$. Następnie skorzystać z Twierdzenia Stone'a-Weierstrassa.

5. Pokazać, że wielomiany leżą gęsto w przestrzeni Hilberta $L^2(\mu)$, gdzie

$$(a) \quad d\mu(x) = x^a e^{-x} dx, \quad x > 0, a > -1.$$

$$(b) \quad d\mu(x) = e^{-x^2} dx,$$

6. Pokazać, że dla dowolnej stałej rzeczywistej c mamy

$$\int_0^\infty x^n [1 + c \sin(2\pi \log x)] e^{-\log^2 x} dx = \sqrt{\pi} e^{(n+1)^2/4}.$$

Wynioskować, że odpowiedni problem momentów Stieltjesa jest niejednoznaczny.

7. Wyprowadzić wzór

$$\int_0^\infty x^n \sin(x^b \sin a) e^{-x^b \cos a} dx = \frac{1}{b} \Gamma\left(\frac{n+1}{b}\right) \sin \frac{(n+1)a}{b}$$

dla $0 < a < \pi/2$, $b > 0$ i $n = 0, 1, 2, \dots$. Rozważyć przypadek $a = \pi b$. Wskazać odpowiedni niejednoznaczny problem momentów. **Wskazówka:** W całce

$$\int_0^\infty x^n e^{-x^b e^{ia}} dx$$

dokonać zamiany zmiennych $z = x^b e^{ia}$, otrzymując wielokrotność całki

$$\int z^{(n+1)/b-1} e^{-z} dz$$

po łuku $\arg z = a$. Zauważyć, że ostatnia całka jest równa $\Gamma((n+1)/b)$.

8. Pokazać, że jeśli $d\mu_1(x) \leq cd\mu_2(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$, to gęstość wielomianów w $L^2(\mu_2)$ pociąga gęstość wielomianów w $L^2(\mu_1)$.
9. Dla niejednoznacznego ciągu momentów Stieltjesa $\{m_n\}$ określamy $\widetilde{m}_{2n} = m_n$ i $\widetilde{m}_{2n+1} = 0$. Pokazać, że $\{\widetilde{m}_n\}$ jest niejednoznacznym ciągiem momentów Hamburgera.
10. Korzystając z zadań 3 i 9, wykazać, że jeśli miara probabilistyczna μ na półprostej $[0, +\infty)$ spełnia $|m_n| \leq CR^n(2n)!$, dla pewnych stałych $C > 0$ i $R > 0$, to problem momentów $\{m_n\} = \int x^n d\mu(x)$ jest jednoznaczny.
11. Miara μ na $\mathbb{R}_+$ całkuje $e^{2\pi x}$. Pokazać, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4\pi^2)^n m_{2n}}{(2n)!} = 0,$$

gdzie $m_n = \int_0^{\infty} x^n d\mu(x)$, wtedy i tylko wtedy, gdy μ jest skupiona na liczbach $0, 1, 2, \dots$.

12. Pokazać, że jeśli n pierwszych momentów funkcji $f(x)$ ciągłej o wartościach rzeczywistych w przedziale $a < x < b$ znika

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b xf(x)dx = \dots = \int_a^b x^{n-1}f(x)dx = 0,$$

to $f(x)$ zmienia znak w tym przedziale n razy.

13. Wyrazić momenty miary $d\mu(x) = (1 - x^2)^\alpha dx$, $-1 < x < 1$, $\alpha > -1$, przy pomocy funkcji $\Gamma(x)$.