

2. Zadania do wykładu R. Szwarca
Wielomiany ortogonalne i problem momentów

1. Wielomiany p_n spełniają $p_0 = 1$, $p_1 = 2x$ oraz

$$xp_n = \frac{1}{2}p_{n+1} + \frac{1}{2}p_{n-1}.$$

Pokazać, że momenty związane ze wzorem rekurencyjnym wynoszą

$$m_{2n} = \frac{1}{4^n(n+1)} \binom{2n}{n} \quad m_{2n+1} = 0.$$

Wskazówka: Wprowadzić operator przesunięcia na wielomianach $\mathcal{P}$ wzorem $Sp_0 = 0$ i $Sp_n = p_{n-1}$, dla $n \geq 1$. Wtedy

$$xp_n = \frac{1}{2}(S + S^*)p_n.$$

Zatem

$$m_n = (x^n, 1) = \frac{1}{2^n} ((S + S^*)^n 1, 1).$$

Pokazać, że wielkość $((S + S^*)^{2n} 1, 1)$ jest równa liczbie wszystkich dróg długości $2n$ przechodzących przez punkty kratowe płaszczyzny łączących punkty $(0, 0)$ i (n, n) , leżących pod główną przekątną (patrz W. Feller, Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa, tom 1).

2. Pokazać, że jeśli wielomian trygonometryczny (tzn. kombinacja liniowa funkcji $\cos nx$ i $\sin nx$ dla $n \in \mathbb{N}$) jest nieujemny, to jest on postaci $|h(e^{ix})|^2$ dla pewnego wielomianu $h(x)$. Pokazać, że jeśli wielomian trygonometryczny jest funkcją parzystą, to można zażądać, aby $h(x)$ miał współczynniki rzeczywiste.
3. Pokazać, że liczby $\{m_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ są współczynnikami Fouriera miary μ na przedziale $[0, 2\pi)$, tzn.

$$m_n = \int_0^{2\pi} e^{inx} d\mu(x),$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $\{m_n\}$ jest dodatnio określony w następującym sensie

$$\sum_{i,j=0}^n m_{i-j} z_i \overline{z_j} \geq 0,$$

dla dowolnego ciągu $\{z_i\}_{i=0}^{\infty}$, w którym tylko skończenie wiele wyrazów nie zeruje się.

4. Udowodnić, że każdy wielomian przyjmujący nieujemne wartości dla $0 \leq x \leq 1$ ma postać

$$A(x)^2 + x(1-x)B(x)^2,$$

dla pewnych wielomianów $A(x)$ i $B(x)$. **Wskazówka:** Zastosować drugą część zadania 2.

5. Dla ciągu $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$, $m_0 = 1$, określamy

$$\Delta_0 m_n = m_n, \quad \Delta m_n = m_n - m_{n+1}, \quad \Delta^{k+1} m_n = \Delta^k m_n - \Delta^k m_{n+1}.$$

Pokazać, że $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ jest ciągiem momentów miary probabilistycznej określonej na przedziale $[0, 1]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta^k m_n \geq 0$ dla każdego k i n (Twierdzenie Hausdorffa). **Wskazówka:** Obliczyć $\Delta_k x^n$. Pokazać, że $\Delta^k (1-x)^{n-k} = x^k (1-x)^{n-k}$. Wywnioskować, że $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Delta^k m_{n-k} = m_0 = 1$. Dla funkcji $f(x) \in C[0, 1]$ określamy wielomiany Bernsteina $B_n(f) = \sum_{k=0}^n f(k/n) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$. Pokazać, że $B_n(x^l) = x^l + p_n(x)$, gdzie $p_{n,l}(x)$ jest wielomianem stopnia nie większego niż l oraz współczynniki tego wielomianu dążą do zera. Określimy miarę probabilistyczną σ_n wzorem $\sigma_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Delta^k m_{n-k} \delta_{k/n}$. Jeśli σ jest punktem skupienia miar σ_n , to $m_l = \int_0^1 x^l d\sigma$.

6. Pokazać, że dla ciągu momentów Stieltjesa wielomian $p_n(x) - \tau p_{n-1}(x)$ ma $n-1$ pierwiastków dodatnich. Czy mogą istnieć pierwiastki ujemne? Dla jakich wartości τ ?
7. Wyprowadzić wzór Christoffela–Darboux używając relacji ortogonalności. **Wskazówka:** Obliczyć iloczyn skalarny względem zmiennej y obu stron wzoru z wielomianem $p_k(y)$.

8. Przeanalizować rozwiązalność problemu momentów w przypadku ciągu momentów, który jest nieujemnie określony ale nie jest dodatnio określony, tzn. spełnia

$$\sum m_{i+j} z_i \bar{z}_j \geq 0.$$

9. Przeanalizować wzór rekurencyjny w przypadku nieujemnie określonego ciągu momentów.
10. Dla ciągu $\{m_n\}_{n=0}^\infty$ określamy

$$\begin{aligned}\tilde{m}_{2n} &= m_n, \\ \tilde{m}_{2n+1} &= 0.\end{aligned}$$

Pokazać, że ciąg $\{\tilde{m}_n\}$ jest dodatnio określony wtedy i tylko wtedy, gdy ciągi $\{m_n\}$ i $\{m_{n+1}\}$ są dodatnio określone, tzn. $\{\tilde{m}_n\}$ jest ciągiem momentów Hamburgera wtedy i tylko wtedy, gdy $\{m_n\}$ jest ciągiem momentów Stieltjesa.

11. Pokazać, że wielomiany $\tilde{p}_n$ i p_n ortonormalne względem $\{\tilde{m}_n\}$ i $\{m_n\}$ odpowiednio, spełniają

$$\tilde{p}_{2n}(\sqrt{x}) = p_n(x).$$

12. W oparciu o poprzednie zadanie podać inny dowód twierdzenia, że dla ciągu $\{m_n\}$ momentów Stieltjesa wielomian p_n posiada n różnych dodatnich pierwiastków.

13. Pokazać, że jeśli $\{m_n\}$ jest ciągiem dodatnio określonym oraz $m_{2n+1} = 0$ dla $n \in \mathbb{N}$, to $p_n(-x) = (-1)^n p_n(x)$. Pokazać, że wzór rekurencyjny ma wtedy postać

$$xp_n(x) = \lambda_n p_{n+1} + \lambda_{n-1} p_{n-1}(x) \quad n = 0, 1, \dots,$$

$p_{-1} = 0$, $p_0 = 1$. Udowodnić, że jeśli wielomiany p_n zadane są tym wzorem, gdzie $\lambda_n > 0$, to ciąg momentów związanych z wielomianami p_n spełnia $m_{2n+1} = 0$.

14. Udowodnić, że wielomiany p_n spełniające wzór

$$xp_n(x) = \lambda_n p_{n+1} + \beta_n p_n(x) + \lambda_{n-1} p_{n-1}(x) \quad n = 0, 1, \dots,$$

$p_{-1} = 0$, $p_0 = 1$, można określić wzorem $p_n(x) = \det(xI - J_n)$, gdzie J_n oznacza obciętą macierz Jacobi'ego, tzn.

$$J_n = \begin{pmatrix} \beta_0 & \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_0 & \beta_1 & \lambda_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \beta_2 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \lambda_{n-3} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-3} & \beta_{n-2} & \lambda_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_{n-2} & \beta_{n-1} \end{pmatrix}.$$

15. Pokazać, że jeśli wyrazy macierzy Jacobi'ego są ograniczone oraz

$$\sup |\beta_n| + 2 \sup \lambda_n \leq R,$$

formy kwadratowe

$$\sum_{i,j}^n (R m_{i+j} \pm m_{i+j+1}) x_i x_j$$

są dodatnio określone. Pokazać, że wynikanie odwrotne też jest prawdziwe.

16. Załóżmy, że ciąg momentów Hamburgera m_n spełnia $m_{2n} \leq R^{2n}$. Pokazać, że $p_n(x) > 0$ dla $x \geq R$, oraz $(-1)^n p_n(x) > 0$ dla $x \leq R$.

17. Ciąg liczb $\{a_n\}_1^\infty$ nazywamy ciągiem łańcuchowym jeśli istnieje ciąg $\{g_n\}_0^\infty$ spełniający $0 \leq g_n \leq 1$ oraz $a_n = g_n(1 - g_{n-1})$, dla $n = 1, 2, \dots$. Pokazać, że $(-1)^n p_n(0) > 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\beta_0 > 0$ oraz $\lambda_n^2/(\beta_n \beta_{n+1})$ jest ciągiem łańcuchowym.

18. Pokazać, że jeśli $(-1)^n p_n(0) > 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, to $(-1)^n q_n(0) > 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.