

3. Zadania do wykładu R. Szwarca
Wielomiany ortogonalne i problem momentów

1. Udowodnić, że dla liczb $x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \dots < x_{n-1} < y_{n-1} < x_n$ zachodzi nierówność

$$\left| \frac{(z - y_1)(z - y_2) \dots (z - y_{n-1})}{(z - x_1)(z - x_2) \dots (z - x_{n-1})(z - x_n)} \right| \leq \frac{1}{|\operatorname{Im} z|}.$$

2. (Kryterium Carlemana) Pokazać, że problem momentów jest zdeterminowany jeśli szereg $\sum \lambda_n^{-1}$ jest rozbieżny. **Wskazówka:** $p_n q_{n+1} - p_{n+1} q_n = \lambda_n^{-1}$.

3. Udowodnić, że jeśli

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\beta_{n+1}|}{\lambda_n \lambda_{n+1}} = +\infty,$$

to problem momentów jest zdeterminowany. **Wskazówka:** Obliczyć $p_n(x)q_{n+2}(x) - p_{n+2}(x)q_n(x)$.

4. (Kryterium Carlemana) Pokazać, że problem momentów $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ jest zdeterminowany, jeśli

$$\sum_{n=1}^{\infty} m_{2n}^{-1/2n} = +\infty.$$

Wskazówka: Dla $x p_n = \lambda_n p_{n+1} + \beta_n p_n + \lambda_{n-1} p_{n-1}$, mamy

$$\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1} p_n(x) = x^n + \dots$$

Zatem

$$\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1} (p_n, p_n) = (x^n, p_n) \leq \sqrt{m_{2n}}.$$

Stąd

$$\sum_{n=1}^{\infty} m_{2n}^{-1/2n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1})^{-1/n}.$$

Pokazać, że jeśli szereg jest rozbieżny, to również szereg $\sum \lambda_n^{-1}$ jest rozbieżny. W tym celu skorzystać z nierówności Carlemana

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 a_2 \dots a_n)^{1/n} \leq e \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

5. (Kryterium Hamburgera) Pokazać, że problem momentów $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ jest zdeterminowany wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej jeden z szeregów $\sum p_n^2(0)$ or $\sum q_n^2(0)$ jest rozbieżny. **Wskazówka:** Skorzystać z dowodu Twierdzenia Hellingera–Nevanlinny.

6. Pokazać, że jeśli $(-1)^n p_n(0) > 0$ dla $n \in \mathbb{N}$, to $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ jest ciągiem momentów Stieltjesa.

7. Dla ciągu liczb dodatnich λ_n znaleźć ciąg liczb rzeczywistych β_n tak, że odpowiadający tym ciągom problem momentów jest zdeterminowany. Czy można wybrać ciąg β_n tak, że nośnik miary jest zawarty w półprostej $[0, +\infty)$?

8. Dla ciągu liczb rzeczywistych β_n znaleźć ciąg liczb dodatnich λ_n tak, że odpowiadający tym ciągom problem momentów jest niezdecydowany.

9. Czy problem momentów odpowiadający ciągom $\lambda_{2n} = \lambda_{2n-1} = n^2$ oraz $\beta_n \equiv 0$ jest zdeterminowany ?
Czy problem momentów odpowiadający ciągom $\lambda_{2n} = \lambda_{2n+1} = n^2$ oraz $\beta_n \equiv 0$ jest zdeterminowany ?

10. Przy założeniach zadania 3 z listy 1 pokazać, że dla liczb $\operatorname{Im} z > 0$ zachodzi wzór

$$i \int_0^{\infty} e^{-ixz} F_{\mu}(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu(x)}{x - z}.$$

Udowodnić, że jeśli $F_{\mu} = F_{\sigma}$, to $\mu = \sigma$, korzystając z Twierdzenia Stieltjesa o odwróceniu.

11. Czy ciąg m_n spełniający $ce^{\sqrt{n}} \leq m_{2n} \leq Ce^{\sqrt{n}}$ dla pewnych stałych c i C , może być dodatnio określony ?