

4. Zadania do wykładu R. Szwarca
Wielomiany ortogonalne i problem momentów

1. Niech $G(z)$ będzie funkcją analityczną w kole jednostkowym $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Pokazać, że dla $0 < R < 1$ oraz dla $|z| \geq 1$ zachodzi wzór

$$G(Rz) = i\operatorname{Im} G(0) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \operatorname{Re} G(Re^{it}) dt.$$

Wskazówka: Pokazać, korzystając z całki Poissona dla funkcji harmoniczych, że części rzeczywiste obu stron wzoru są równe. Następnie zauważyć, że obie strony wzoru przedstawiają funkcje analityczne dla $|z| < 1$, zatem obie strony mogą różnić się o stałą.

2. Niech $G(z)$ będzie funkcją analityczną przekształcającą koło jednostkowe w półpłaszczyznę $\operatorname{Re} z \geq 0$. Pokazać, że z rodziny miar $d\sigma_R(t) = \operatorname{Re} G(Re^{it}) dt$ określonych na przedziale $[-\pi, \pi]$ można wybrać podciąg zbieżny $d\sigma_{R_k}(t)$ taki, że $R_k \rightarrow 1^-$. W tym celu obliczyć całkowitą masę miary $d\sigma_R(t)$.

3. Korzystając z zadań 1 i 2 pokazać, że funkcja analityczna przekształcająca koło jednostkowe w górną półpłaszczyznę ma postać

$$G(z) = iv + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\sigma(t),$$

dla pewnej miary σ , gdzie $v = \operatorname{Im} G(0)$.

4. Niech $F(w)$ będzie funkcją analityczną przekształcającą górną półpłaszczyznę w siebie. Pokazać, że funkcja

$$G(z) = -iF\left(i\frac{1-z}{1+z}\right)$$

odwzorowuje otwarte koło jednostkowe półpłaszczyznę $\operatorname{Re} z \geq 0$. Korzystając z poprzedniego zadania pokazać, że istnieje skończona miara $d\tau(x)$ na prostej taka, że

$$F(w) = cw + d + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+xw}{x-w} d\tau(x),$$

gdzie $c \geq 0$ oraz $d \in \mathbb{R}$. **Wskazówka:** W całce z zadania 3 podstawić $u = \operatorname{tg}(t/2)$.

5. Przy oznaczeniach z poprzedniego zadania pokazać, że przyjmując $d\sigma(x) = (1+x^2) d\tau(x)$ otrzymujemy

$$F(w) = cw + d + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{x-w} - \frac{x}{1+x^2} \right) d\sigma(x).$$

6. Niech A będzie macierzą samosprężoną wymiaru $n \times n$ z wartościami własnymi $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ uporządkowanymi tak, że $|\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_n|$. Udowodnić wzór "minimax"

$$\lambda_k = \min_{\dim V=k-1} \max_{x \perp V} \frac{(Ax, x)}{(x, x)}.$$

Wskazówka: Niech $x_1, \dots, x_n$ będą odpowiednimi wektorami własnymi i $V_k = \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_k\}$. Pokazać, że dla dowolnej podprzestrzeni V wymiaru $k-1$ istnieje wektor $x \in V_k$ taki, że $x \neq 0$ oraz $x \perp V$. Wtedy $(Ax, x)/(x, x) \geq \lambda_k$.

7. Zastosować poprzednie zadanie i zadanie 25 do podania innego dowodu o wzajemnym położeniu zer dla wielomianów p_n i p_{n+1} .

8. Niech A będzie operatorem liniowym o gęstej dziedzinie w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Wykres Γ_A określamy jako

$$\Gamma_A = \{\langle x, Ax \rangle \mid x \in D(A)\}.$$

Niech $J(x, y) = \langle -y, x \rangle$ dla $x, y \in \mathcal{H}$. Pokazać, że

$$\Gamma_{A^*} = J(\Gamma_A)^\perp,$$

gdzie symbol $\perp$ oznacza dopełnienie ortogonalne w przestrzeni $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$. W szczególności A^* jest operatorem domkniętym.

9. Pokazać, że jeśli $A \subset B$, to $B^* \subset A^*$, gdzie A i B są operatorami liniowymi o gęstych dziedzinach.

10. Operator liniowy A jest *domykalny* jeśli posiada on rozszerzenie o wykresie domkniętym. Pokazać, że jeśli A jest domykalny, to domknięcie zbioru Γ_A jest wykresem rozszerzenia operatora A , nazywanego domknięciem A i oznaczanego symbolem $\bar{A}$.

11. Pokazać, że operator A^* , gdzie A jest domykalnym operatorem o gęstej dziedzinie, ma również gęstą dziedzinę.

12. Pokazać, że jeśli A ma gęstą dziedzinę i jest domykalny, to $A^{**} = \bar{A}$.

Wskazówka: $\Gamma_{A^{**}} = J(\Gamma_{A^*})^\perp$.

13. Niech M i N będą domkniętymi podprzestrzeniami przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Pokazać, że jeśli M nie posiada wektora ortogonalnego do przestrzeni N , to $\dim M \leq \dim N$.

14. Dla domkniętego symetrycznego operatora liniowego A i liczby $z \notin \mathbb{R}$ niech V będzie izometrią z domkniętej podprzestrzeni $D(V)$ przestrzeni $N_{\bar{z}}$ w przestrzeń N_z . Pokazać, że operator A_V o dziedzinie

$$D(A_V) = \{x + u - Vu : x \in D(A), u \in D(V)\}$$

określony wzorem

$$A_V(x + u - Vu) = Ax + zu - \bar{z}Vu,$$

jest symetrycznym rozszerzeniem operatora A . Pokazać, że każde symetryczne rozszerzenie operatora A może być otrzymane w ten sposób. **Wskazówka:** Skorzystać ze wzorów łączących A i transformatę Cayley U_z .