

1. Zadania z matematyki wyższej

1. Czy liczba $\sqrt{12}$ jest wymierna ?
2. Czy liczba $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ jest wymierna ?
3. Znaleźć rozwinięcie dziesiętne liczb $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{99}$, $\frac{1}{999}$, itd. Korzystając z tego obliczyć $0, (12345)$ w postaci ułamka.
4. Znaleźć liczbę niewymierną pomiędzy 0 i 1.
5. Znaleźć liczbę niewymierną oraz liczbę wymierną pomiędzy 1 i $\sqrt{2}$. Znaleźć liczbę wymierną i liczbę niewymierną pomiędzy $\sqrt{2}$ i $\sqrt{3}$.
6. Czy liczba $\log_2 3$ jest wymierna ? A liczba $\log_{\sqrt{2}+1}(\sqrt{2}-1)$?
7. Dowieść, że istnieje n -cyfrowa potęga dwójki zaczynająca się od cyfry 1.
8. Rozwiązać nierówności.

$$\frac{2x+3}{(x-4)^3} > 0$$

$$\frac{x}{x-1} + \frac{x+2}{x-4} \leq 0$$

$$\frac{2}{3-x} \geq 4$$

$$|x+1| \leq |2x-3|$$

$$|4-6x| < \frac{1}{2}$$

$$\left| \frac{x+1}{x-1} \right| \leq 1.$$

9. Udowodnić przez indukcję następujące wzory:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2,$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = \frac{n-1}{n}.$$

10. Udowodnić przez indukcję, że liczba $13^n - 1$ jest podzielna przez 12.
11. Udowodnić przez indukcję nierówność Bernoulli'ego

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

dla $x > -1$.

12. Udowodnić przez indukcję, że $2^n > 2n$ dla $n \geq 3$.
13. Wyprowadzić wzór na

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}, \quad x \neq 1$$

nie korzystając z metody indukcji. **Wskazówka:** Oznaczając symbolem S całe wyrażenie, obliczyć $xS - S$.

14. Wyprowadzić wzór na $1 + 2 + \dots + n$ nie korzystając z metody indukcji. **Wskazówka:**
 $2(1+2+\dots+n) = [1+n] + [2+(n-1)] + [3+(n-2)] + \dots + [(n-2)+3] + [(n-1)+2] + [n+1].$