

10. Zadania z matematyki wyższej

1. Obliczyć pochodne funkcji.

$$\begin{array}{llll}
 f(x) = x^{9/4} & f(x) = x^{2/3} - 7x^{-1/3} & f(x) = (4 - 3x^2)^{400} & f(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 \\
 f(x) = z\sqrt{2-7x^2} & f(t) = \sin 5t & f(t) = \sin^4 t + \cos^4 t & g(x) = \operatorname{tg}^6 x \\
 g(x) = \sqrt[3]{1 - \sin x} & f(x) = \sin(\cos x) & f(x) = x \cos(1/x) & g(z) = \sqrt{2z - (2z)^{1/3}} \\
 g(z) = \cos^2(3z^6) & f(x) = \sqrt[4]{\frac{1}{\cos(\operatorname{tg} x)}} & f(x) = \operatorname{ctg}^2(2\sqrt{3x+1}) &
 \end{array}$$

2. Korzystając ze wzorów $(e^x)' = e^x$ oraz $(\ln x)' = 1/x$ obliczyć pochodne.

$$f(x) = 2^x \quad f(x) = e^{x^2} \quad f(x) = \ln(-x) \quad f(x) = \cos \ln x \quad f(x) = \log_2 x \quad f(x) = \ln(e^x + 1)$$

3. Znaleźć dy/dx .

$$y = 3x^{-2/3} \quad y = -x\sqrt{1+3x^2} \quad y = \left(\frac{1}{x \sin x}\right)^{2/3} \quad y = \operatorname{tg} \frac{3}{2}x$$

4. Załóżmy, że y jest funkcją różniczkowalną zmiennej x . Wyrazić pochodną podanych funkcji względem x za pomocą x , y oraz dy/dx .

$$y^5 \quad 2/y \quad \sin \sqrt{y} \quad x^3 y^2 \quad \sqrt{x^2 + y^2} \quad \frac{1}{x^2 - xy + y^3}$$

5. Znaleźć równanie stycznej do wykresu funkcji w podanym punkcie.

$$f(x) = (1 + x^{1/3})^{2/3}; (-8, 1) \quad f(x) = \sin \sqrt{x}; (\pi^2, 0)$$

6. Funkcje f i g są różniczkowalne. Wartości funkcji f , f' , g oraz g' w punktach -3 , 0 , 1 oraz 2 są podane w tabeli.

x	$f(x)$	$f'(x)$	$g(x)$	$g'(x)$
-3	2	4	6	11
0	1	2	-3	-7
1	16	-3	4	13
2	-3	2	0	$\sqrt{2}$

Wyznaczyć $(f \circ g)'(x)$ oraz $(g \circ f)'(x)$ dla takiej liczby wartości x na jaką pozwalają dane w tabeli.

7. Jeśli dwa ciała znajdują się w odległości r od siebie, to siła grawitacyjna $F(r)$ wywierana przez jedno ciało na drugie wyraża się wzorem

$$F(r) = \frac{k}{r^2},$$

gdzie k jest stałą dodatnią. Załóżmy, że odległość pomiędzy ciałami jest dana wzorem

$$r(t) = 64 + 48t - 16t^2 \quad \text{dla } 0 < t < 3$$

(a) Znaleźć tempo zmiany siły przyciągania względem czasu.

(b) Pokazać, że $(F \circ r)'(1) = -(F \circ r)'(2)$.

8. Balon w kształcie kuli jest pompowany tak, że jego promień rośnie 10 cm na minutę. Znaleźć tempo zmiany objętości V balonu korzystając z reguły łańcucha i ze wzoru $V = (4/3)\pi r^3$.

9. Sok jabłkowy jest wlewany do cylindrycznego pojemnika o średnicy 1 m i wysokości 2 m. Po t sekundach poziom soku wynosi $\frac{1}{2}t$ metra. Pokazać, że tempo zmiany objętości soku w naczyniu jest stałe.

10. Obliczyć f'' .

$$\begin{array}{llll} f(x) = 5x - 3 & f(x) = 12x^5 + \frac{1}{2}x^4 - \sqrt{1-x} & f(x) = \frac{2}{(1-4x)^2} & f(x) = ax^{-n} \\ f(x) = \frac{1}{\cos x} & f(x) = \operatorname{ctg} x & f(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}} & f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \end{array}$$

11. Obliczyć d^2y/dx^2 .

$$y = x^{3/2} \quad y = (x^4 - \operatorname{tg} x)^3 \quad y = \sin x + \cos x \quad y = \frac{1}{x|x|}$$

12. Dla $h = fg$ obliczyć h'' za pomocą f , g , f' i g' .

13. Dla $h = g \circ f$ obliczyć h'' za pomocą f , g , f' i g' .

14. (a) Jeśli $f''(x) = f(x)$ dla wszystkich x , to jaka jest relacja pomiędzy $f'(x)$ a $f^{(4)}(x)$?

(b) Jeśli $f^{(4)}(x) = f(x)$ dla wszystkich x , to jaka jest relacja pomiędzy $f^{(35)}(x)$ a $f^{(31)}(x)$?

15. Zastosować różniczkowanie niejawne do obliczenia pochodnej y względem x .

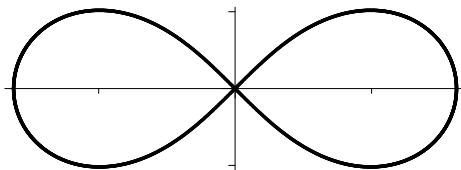
$$y^2 + y = \frac{1+x}{1-x} \quad x^2 + x^2y^2 + y^3 = 3 \quad \frac{\sin y}{y^2+1} = 3x \quad x^2 + y + e^y = 1 \quad \sqrt{xy} + \sqrt{x+2y} = 4$$

16. Zastosować różniczkowanie niejawne do obliczenia pochodnej y względem x w podanym punkcie.

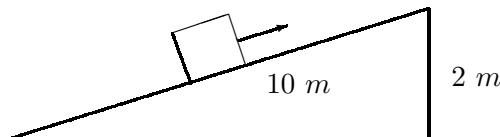
$$x^2 + y^2 = y; (0, 1) \quad x^2 + 3xy + 2y^2 = 6; (-1, -1) \quad \sin x = \cos y; \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right) \quad y^2 = \sin 2x = -2y, \left(\frac{\pi}{4}, -2\right)$$

17. Niech l będzie styczną do astroidy $x^{2/3} + y^{2/3} = 3xy$ w punkcie $(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Znaleźć pole trójkąta ograniczonego przez l i osie współrzędnych.

18. Lemniskata ma równanie $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$. Znaleźć punkty wykresu, w których styczna jest równoległa do osi OX .



19. Człowiek pcha pudło po rampie (patrz rysunek) z prędkością 1 m/s. Jak szybko pudło przesuwa się w górę ?



20. Człowiek oddala się od latarni idąc w kierunku swego cienia. Źródło światła znajduje się na wysokości 4,4 m. Wzrost człowieka wynosi 1,8 m. W odległości 10 m od latarni jego prędkość wynosi 1,2 m/s. Z jaką prędkością wydłuża się cień człowieka ? **Wskazówka:** Wykonać rysunek. Korzystając z twierdzenia Talesa znaleźć związek pomiędzy długością cienia i odległością od latarni.

21. Przemianę adiabatyczną pewnego gazu określa równanie $pV^{1,4} = 10$, gdzie p jest ciśnieniem wyrażonym w atmosferach, a V objętością wyrażoną w metrach sześciennych. W momencie, gdy objętość gazu wynosiła $V = 1 \text{ m}^3$ objętość powiększała się w tempie $dV/dt = 0,02 \text{ m}^3/\text{s}$. W jakim tempie spadało wówczas ciśnienie gazu ?

22. Samolot lecący na południe z prędkością $v_2 = 200 \text{ km/h}$ na wysokości $H = 0,5 \text{ km}$, znalazł się w pewnym momencie nad samochodem jadącym na wschód z prędkością $v_1 = 60 \text{ km/h}$. Wyznaczyć tempo zmiany odległości samolotu od samochodu po upływie 0,1 godziny.