

11. Zadania z matematyki wyższej

1. Obliczyć przybliżone wartości liczb za pomocą różniczki.

$$\sqrt{101} \quad \sqrt{99,5} \quad \sqrt[4]{17} \quad (28)^{4/3} \quad \cos \frac{2\pi}{13} \quad \frac{1}{1 + (1,00175)^2}$$

2. Obliczyć df dla podanych wartości a i h .

$$f(x) = \sqrt{x}; a = 4, h = 0,2 \quad f(x) = \sqrt{1+x^5}; a = 2, h = -0,01$$

3. Obliczyć różniczki według wzoru $df = f'(x)dx$.

$$f(x) = 5x^3 + 2 \quad f(x) = \sin(\cos x) \quad u = x\sqrt{x-1}$$

W zadaniach 4-6 można użyć programu Excel lub innego pakietu.

4. Znaleźć przybliżone rozwiązania równań w podanych przedziałach. Stosować metodę Newtona-Raphsona do momentu aż kolejne przybliżenia znajdują się w odległości nie przekraczającej 10^{-6} .

(a) $x^3 - 3x - 1 = 0$; $[0, 2]$ (To równanie związane jest z zagadnieniem wpisania dziewięcioboku foremnego w okrąg.)

(b) $x^3 - 2x - 5 = 0$; $[0, 3]$ (Sam Newton rozwiązał to równanie.)

(c) $x^4 + \sin x = 0$; $[-2, -\frac{1}{2}]$

5. Zastosować metodę Newtona-Raphsona do znalezienia przybliżonych wartości podanych pierwiastków, z dokładnością do 5 miejsc po przecinku: $\sqrt{15}$, $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[4]{13}$.

6. Niech $f(x) = x^4 + 2x^3 - x - 1$. Zastosować metodę Newtona-Raphsona do znalezienia przybliżonych wartości wszystkich zer funkcji f , z dokładnością do 2 cyfr po przecinku. **Wskazówka:** f ma dwa zera.

7. Znaleźć wszystkie punkty krytyczne podanych funkcji.

$$\begin{array}{lll} f(x) = x^2 + 4x + 6 & g(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 1 & f(x) = x + \sin x \\ h(x) = x + x^{-1} & k(t) = 3t^{2/5} & f(z) = z|z + 3| \end{array}$$

8. Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji (o ile istnieje) w podanym przedziale. Wyznaczyć punkty, w których wartości te są przyjęte.

$$\begin{array}{lll} f(x) = x^2 - x; [0, 2] & g(x) = x^4 - 4x; [-4, 4] & f(t) = -2t^{-1}; (0, \infty) \\ k(z) = \sqrt{1+z^2}; [-2, 3] & f(x) = \sqrt{|x|}; (-1, 2) & f(x) = -\sin \sqrt[3]{x}; [-\frac{\pi^3}{27}, \frac{\pi^3}{8}] \end{array}$$

9. Znaleźć wszystkie ekstrema lokalne podanych funkcji.

$$\begin{array}{lll} f(x) = x^3 - 3x^2; & g(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 2 & h(t) = t^5 - 20t \\ f(x) = -3 - \sin x & h(x) = x \ln x & k(t) = t^2 e^{-t} \end{array}$$

10. Zbadano eksperymentalnie, że łosoś płynąc pod prąd z prędkością v (względem prądu) w czasie T zużywa ilość energii równą

$$E = cv^3T,$$

gdzie c jest stałą. Załóżmy, że prąd ma prędkość 8 km/h i że łosoś ma przepłynąć 400 km. Jak szybko powinna płynąć ryba, aby zminimalizować zużycie energii?

11. Znaleźć prostokąt o największym polu wpisany w okrąg o promieniu 50 cm. * Znaleźć trójkąt równoramienny o największym polu wpisany w ten okrąg.
12. Namiot o pojemności 16 m^3 ma boki w kształcie prostokątów i dwa zakończenia w kształcie trójkątów równoramiennych. Jakie powinny wymiary namiotu, aby powierzchnia była jak najmniejsza ? Czy odpowiedź zmieni się, gdy dodamy podłogę do powierzchni namiotu ?
13. Przekrój poprzeczny tunelu ma mieć kształt prostokąta zwieńczonego półkolistym dachem. Powierzchnia przekroju ma być równa A , a obwód przekroju ma być zminimalizowany, aby zredukować koszt budowy. Znaleźć wymiary przekroju.
14. Prostokątny kawałek tektury ma wymiary 50 cm na 80 cm. Wycinamy z każdego rogu taki sam kwadratowy kawałek tektury i z tego co otrzymamy składamy pudełko (otwarte u góry). Jakie kwadraciki powinniśmy wyciąć, aby objętość pudełka była maksymalna ?
15. Strona powinna zmieścić 500 cm^2 tekstu. Marginesy boczne mają szerokość 5 cm, natomiast marginesy górny i dolny po 7 cm. Jakie powinny być wymiary kartki, aby jej powierzchnia była jak najmniejsza ?
16. Znaleźć wszystkie liczby c w przedziale (a, b) , dla których styczna do wykresu funkcji f jest równoległa do prostej łączącej punkty $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$.

$$f(x) = x^2 - 6x; (0, 4) \quad f(x) = x^3 + 4; (-2, 1) \quad f(x) = \sqrt{x} - 3; (0, 1) \quad f(x) = x + x^{-1}; \left(\frac{1}{3}, 3\right)$$

17. Załóżmy, że $|f'(x)| \leq M$ dla $a < x < b$. Korzystając z twierdzenia o wartości średniej pokazać, że $|f(b) - f(a)| \leq M(b - a)$. Wywnioskować, że

$$f(a) - M(b - a) \leq f(b) \leq f(a) + M(b - a).$$

18. Korzystając z poprzedniego zadania wyznaczyć oszacowanie górne dla liczb $\sqrt{101}$, $28^{2/3}$ i $33^{1/5}$.
Wskazówka: Dla $\sqrt{101}$ przyjąć $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 100$, $b = 101$.
19. Po wypadku samochodowym stwierdzono, że jeden z kierowców zwalniał aż do momentu zatrzymania w ciągu 9 sekund, przy czym poślizg miał długość 150 m. Jeśli ograniczenie prędkości wynosiło 50 km/godz, czy można wykazać, że kierowca przekroczył dozwoloną prędkość ?