

12. Zadania z matematyki wyższej

1. Znaleźć przedziały, w których podana funkcja jest ściśle rosnąca lub ściśle malejąca.

$$\begin{array}{llll} f(x) = x^2 + x + 1 & f(x) = x^3 - x^2 + x - 1 & f(x) = x^4 - 2x^3 + 1 & f(x) = x^5 + x^3 - 2x + 1 \\ g(x) = \sqrt{16 - x^2} & k(x) = \frac{1}{x^2 - 4} & f(t) = \sin t & f(t) = 2 \cos t - t \\ h(x) = x^2 e^{-x} & f(x) = x^5 \ln x & & \end{array}$$

2. Funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, \infty)$.

(a) Pokazać, że jeśli $f'(x) > 0$, dla $x > a$, to $f(x) > f(a)$ dla $x > a$.

(b) Pokazać, że jeśli $f'(x) < 0$, dla $x > a$, to $f(x) < f(a)$ dla $x > a$.

3. Korzystając z poprzedniego zadania wyprowadzić podane nierówności.

$$x^4 - 4x > -3 \quad \text{dla } x > 1, \quad \frac{x}{4} + \frac{1}{x} > 1 \quad \text{dla } x > 2, \quad e^x - 1 - x > 0 \quad \text{dla } x > 0.$$

4. Wyznaczyć wartości c , w których funkcja f' zmienia znak z plusa na minus lub odwrotnie.

$$f(x) = x^2 + 6x - 11 \quad f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 3 \quad f(t) = \sin t + \frac{1}{2}t \quad h(x) = x^4 e^{-x}$$

5. Wyznaczyć ekstrema lokalne korzystając z kryterium pierwszej pochodnej.

$$\begin{array}{lll} g(x) = 4x^2 - \frac{1}{x} & f(x) = \frac{x}{16 + x^2} & f(x) = x\sqrt{1 - x^2} \\ k(x) = \cos x + \frac{1}{2}x & k(x) = \sin \frac{x^2}{1 + x^2} & h(t) = \ln(t^2 + 3) - t \end{array}$$

6. Wyznaczyć ekstrema lokalne korzystając z kryterium drugiej pochodnej.

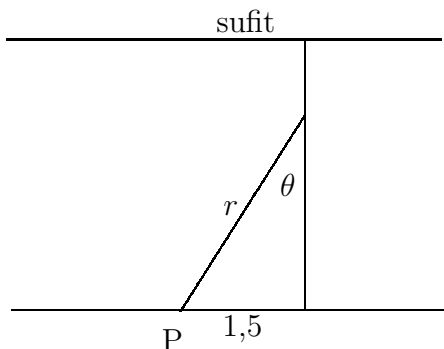
$$\begin{array}{lll} f(x) = x^3 + 8 & g(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 4 & f(x) = x\sqrt{x - 1} \\ h(x) = \sin 2x & g(x) = x^4 - 6x^2 + 8 & f(x) = x + \frac{1}{x} \end{array}$$

7. Wyznaczyć punkty przegięcia podanych funkcji i zbadać również zachowanie w nieskończoności.

$$\begin{array}{llll} f(x) = x^3 + 3x + 2 & f(x) = x^4 + 8x^3 + 36x^2 - 3 & g(x) = x + \frac{4}{x} & k(x) = \frac{4x}{1 + 4x^2} \\ f(t) = \frac{t^3}{1 - t^2} & f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} & g(x) = \sin x + \cos x & h(x) = x^2 e^{-x} \end{array}$$

8. W szesnastym i siedemnastym wieku kupcy winni z Linzu w Austrii obliczali cenę beczki wina wkładając jak najdalej pręt mierniczy do otworu umieszczonego na środku boku beczki. Cena była ustalana na podstawie długości l pręta wewnątrz beczki. Przy założeniu, że beczka ma kształt cylindra, obliczyć wymiary beczki o największej pojemności przy długości $l = 0,6$ m.

9. Cieśla chce oświetlić punkt P na podłodze za pomocą lampy znajdującej się 1,5 m obok, którą można podnieść na dowolną wysokość od 0 do 3 m nad podłogą. Jak wysoko cieśla powinien zawiesić lampę, aby intensywność światła była jak największa? Intensywność światła jest proporcjonalna do cosinusa kąta θ pomiędzy promieniem światła a pionem, oraz odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości r od punktu P do źródła światła.



10. Leśnik jest w lesie 3 km od prostej drogi. Jego samochód znajduje się 7 km w dół drogi. Leśnik idzie z prędkością 4 km/godz w lesie i 5 km/godz wzdłuż drogi. W kierunku jakiego punktu na drodze powinien iść leśnik, aby zminimalizować czas dojścia do samochodu?

