

13. Zadania z matematyki wyższej

- Obliczyć sumy dolne $L_f(P)$ oraz sumy górne $U_f(P)$ dla następujących funkcji f i danych podziałów P :
 - $f(x) = 7; P = \{-3, -\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, 0\}$
 - $f(x) = x + 2; P = \{-1, 1, 2\}$
 - $f(x) = x + 2; P = \{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\}$
 - $f(x) = x^2; P = \{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\}$
 - $f(x) = x^4; P = \{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\}$
 - $f(x) = \sin x; P = \{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\}$
 - $f(x) = \sin x; P = \{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\}$
 - $f(x) = \sin x + \cos x; P = \{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\}$
- Obliczyć sumy górne i dolne dla pola półkola określonego wzorem $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ dla następujących podziałów: a. $P = \{-2, 0, 2\}$ b. $P' = \{-2, 0, 1, 2\}$ c. $P'' = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
- Dlaczego nie można znaleźć funkcji f i podziału P , dla których $L_f(P) = 3$ i $U_f(P) = 2$?
- Niech $f(x) = x$ dla $0 \leq x \leq 7$, i niech $P = \{0, c, 7\}$, gdzie $0 < c < 7$. Pokazać, że $L_f(P) \neq U_f(P)$.
- Spróbować wyznaczyć $L_f(P)$ oraz $U_f(P)$ dla podziału P odcinka $[0, 1]$ oraz funkcji

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x = 0 \\ \frac{1}{x} & \text{dla } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Jaki problem pojawia się przy obliczaniu sumy górnej?
- Niech f będzie funkcją ciągłą na przedziale $[a, b]$ i załóżmy, że istnieje podział P tego przedziału, dla którego ma miejsce równość $L_f(P) = U_f(P)$. Udowodnić, że f jest funkcją stałą. (wskazówka: naszkicować wykres funkcji f wraz z prostokątami wpisanymi i opisanymi dla tego podziału.)
- Niech P_1, P_2, P_3 będą podziałami przedziału $[1, 2]$ odpowiednio na 3, 5 oraz 10 przedziałów równej długości. Obliczyć odpowiadające im sumy Riemanna dla punktów pośrednich będących: (a) lewymi, (b) prawymi końcami otrzymanych przedziałów.
- Znaleźć przybliżoną wartość całki $\int_a^b f(x)dx$ obliczając sumy dolne i sumy górne dla danych podziałów:
 - $\int_{-1}^3 2x dx; P = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$
 - $\int_{-2}^1 x^2 dx; P = \{-2, -1, 0, 1\}$
 - $\int_{-1}^3 |x| dx; P = \{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3\}$
 - $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} -\cos x dx; P = \{-\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}\}$
 - $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 3 \sin x dx; P = \{-\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}\}$
 - $\int_0^2 |x - 1| dx; P = \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\}$