

14. Zadania z matematyki wyższej

1. Korzystając z podanych twierdzeń obliczyć następujące całki oznaczone:

$$\begin{array}{llllll} \text{a. } \int_{-2}^3 4dx & \text{b. } \int_{-1}^1 -\frac{1}{3}dx & \text{c. } \int_1^{-1} \sqrt{2}dx & \text{d. } \int_0^3 xdx & \text{e. } \int_{-3}^3 xdx & \text{f. } \int_{-4}^{-2} xdx \\ \text{g. } \int_1^2 x^2dx & \text{h. } \int_{-5}^{-5} x^2dx & \text{i. } \int_{-1}^4 x^2dx & \text{j. } \int_2^{-3} x^2dx \end{array}$$

2. Znaleźć pole obszaru zawartego pomiędzy wykresem funkcji f i osią OX na podanym przedziale:

$$\begin{array}{lll} \text{a. } f(x) = \frac{5}{2}; [-2, 3] & \text{b. } f(x) = \sqrt{3}; [\sqrt{3}, 3\sqrt{3}] & \text{c. } f(x) = x; [1, 4] \\ \text{d. } f(x) = -x; [-3, -1] & \text{e. } f(x) = x^2; [-3, -1] & \text{f. } f(x) = x^2; [\sqrt{3}, 2\sqrt{3}] \end{array}$$

3. Obliczyć sumy Riemanna dla następujących całek oznaczonych, biorąc jako punkty pośrednie: a. lewe końce, b. prawe końce, c. środki przedziałów utworzonych przez dany podział:

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} \int_1^3 (x^2 - x)dx; P = \{1, 2, 3\} & \text{(ii)} \int_0^4 (x - 3)dx; P = \{0, 1, 2, 3, 4\} \\ \text{(iii)} \int_0^2 \sin \pi x dx; P = \{0, \frac{1}{2}, 1, 2\} & \text{(iv)} \int_{-\pi}^0 \cos x dx; P = \{-\pi, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, 0\} \\ \text{(v)} \int_1^5 \frac{1}{x} dx; P = \{1, 2, 3, 4, 5\} & \text{(vi)} \int_{-2}^{-1} \frac{1}{2x+1} dx; P = \{-2, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}, -1\} \end{array}$$

4. Uzasadnić prawdziwość następujących nierówności:

$$\begin{array}{lll} \text{a. } \int_0^1 x^6 dx \leq \int_0^1 x dx & \text{b. } \int_1^2 x dx \leq \int_1^2 x^6 dx & \text{c. } \int_1^2 \frac{1}{x^6} dx \leq \int_1^2 \frac{1}{x} dx \\ \text{d. } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx & \text{e. } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx \end{array}$$

5. Stosując obliczenia podane przykładowo na wykładzie uzasadnić równość:

$$\int_a^b (x+4)dx = \frac{1}{2} \cdot (b^2 - a^2) + 4(b-a)$$

6. Podobnie jak w zad. 5 uzasadnić równość $\int_a^b cxdx = \frac{c}{2} \cdot (b^2 - a^2)$ dla dowolnych a, b, c .

7. Pokazać, że dla $0 \leq a \leq b$ jest $\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3} \cdot (b^3 - a^3)$. (wskazówka: skorzystać z tego, że

$$\text{jeśli } x_{k-1} < x_k \text{ to } x_{k-1}^2 < \frac{1}{3}(x_k^2 + x_k x_{k-1} + x_{k-1}^2) < x_k^2.)$$

8. Niech $f(x) = mx + c$ dla $a \leq x \leq b$ i niech P będzie dowolnym podziałem przedziału $[a, b]$ na przedziały równej długości. Pokazać, że suma Riemanna, w której punktami pośrednimi są środki otrzymanych przedziałów, czyli dla $t_k = \frac{1}{2}(x_{k-1} + x_k)$, jest

$$\text{dokładnie równa } \int_a^b f(x)dx.$$