

15. Zadania z matematyki wyższej

1. Obliczyć pochodne następujących funkcji:

$$\begin{array}{llll} \text{a. } F(x) = \int_0^x t(1+t^3)^{29} dt & \text{b. } F(y) = \int_y^2 \frac{1}{t^3} dt & \text{c. } F(t) = \int_t^0 x \sin x dx & \text{d. } F(x) = \int_0^{x^2} t \sin t dt \\ \text{e. } G(y) = \int_y^{y^2} (1+t^2)^{\frac{1}{2}} dt & \text{f. } H(x) = \frac{d}{dx} \int_0^{4x} (1+t^2)^{\frac{4}{5}} dt & \text{g. } G(y) = \frac{d}{dy} \int_{\sin y}^{2y} \cos t dt. \end{array}$$

2. Znajdując funkcję pierwotną obliczyć następujące całki:

$$\begin{array}{llllll} \text{a. } \int_0^1 4 dx & \text{b. } \int_1^{12} 0 dx & \text{c. } \int_1^{-3} 3u du & \text{d. } \int_{-b}^b x^5 dx & \text{e. } \int_0^1 x^{100} dx & \text{f. } \int_0^2 u^{\frac{1}{2}} du \\ \text{g. } \int_1^4 x^{-\frac{7}{9}} dx & \text{h. } \int_0^3 \left(\frac{1}{2}x - 4\right) dx & \text{i. } \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x dx & \text{j. } \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \sin t dt & \text{k. } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{d}{dx} \sin^5 x\right) dx. \end{array}$$

3. Obliczyć pole powierzchni obszaru pomiędzy wykresem funkcji f i osią OX na podanym przedziale:

$$\begin{array}{llll} \text{a. } f(x) = x^4; [-1, 1] & \text{b. } f(x) = x^{-2}; [-2, -1] & \text{c. } f(x) = \sin x; [0, \frac{\pi}{2}] & \text{d. } f(x) = \sin x; [0, \frac{2\pi}{3}] \\ \text{e. } f(x) = \cos x; [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}] & \text{f. } f(x) = \sin x; [0, \pi] & \text{g. } f(x) = \cos x; [0, \pi] & \text{h. } f(x) = x^{\frac{1}{3}}; [1, 8] \end{array}$$

4. Obliczyć $\int_0^x f(t) dt$ dla następujących funkcji. Różniczkując otrzymany wynik sprawdzić czy jest on poprawny:

$$\text{a. } f(x) = x \quad \text{b. } f(x) = \sin x \quad \text{c. } f(x) = -\sin x \quad \text{d. } f(x) = \cos x \quad \text{e. } f(x) = -2x^2$$

5. Wyznaczyć liczbę I spełniającą warunek:

$$(x_0^2 + 4x_0)\Delta x_1 + \dots + (x_{n-1}^2 + 4x_{n-1})\Delta x_n \leq I \leq (x_1^2 + 4x_1)\Delta x_1 + \dots + (x_n^2 + 4x_n)\Delta x_n$$

dla każdego podziału $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ przedziału $[1, 2]$.

6. Wyznaczyć liczbę I spełniającą warunek:

$$(\cos x_1 - \sin x_1)\Delta x_1 + \dots + (\cos x_n - \sin x_n)\Delta x_n \leq I \leq (\cos x_0 - \sin x_0)\Delta x_1 + \dots + (\cos x_{n-1} - \sin x_{n-1})\Delta x_n$$

dla każdego podziału $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ przedziału $[0, \frac{\pi}{2}]$.

7. Załóżmy, że zysk ze sprzedaży pierwszego kilograma mydła wynosi 3 zł, oraz że zysk marginalny dany jest wzorem $m_R(x) = 4 - 0,02x$ dla $1 \leq x \leq 400$.

a. Jaki jest zysk ze sprzedaży 30 kg mydła? (wsk: z definicji $R'(x) = m_R(x)$, gdzie $R(x)$ = zysk ze sprzedaży x kilogramów mydła)

b. Jaki jest zysk ze sprzedaży ilości, przy której zysk marginalny jest 0?

8. Załóżmy, że koszt produkcji pierwszych dwóch kilogramów mydła wynosi 10,98zł oraz że koszt marginalny jest dany wzorem $m_C(x) = 3 - 0,1x$ dla $0 \leq x \leq 30$. Obliczyć całkowity koszt wyprodukowania 30 kg mydła.

9. Załóżmy, że prędkość samochodu, który rusza ze startu w $t = 0$ i porusza się wzdłuż osi OX , jest dana wzorem $v(t) = 10t - t^2$ dla $0 \leq t \leq 10$. Znaleźć położenie samochodu

a. w dowolnej chwili t , gdy $0 \leq t \leq 10$.

b. w momencie, gdy jego przyspieszenie wynosi 0.

10. Przepływ wody przez zaporę jest kontrolowany w ten sposób, że tempo przepływu $F'(t)$ wyrażone w tonach wody przepływającej na godzinę, jest dane wzorem
- $$F'(t) = 14000 \cdot \sin \frac{t\pi}{24} \text{ dla } 0 \leq t \leq 24.$$
- Ile ton wody przepływa przez tamę dziennie?
11. Pociąg jedzie z prędkością 60 kilometrów na godzinę, i w pewnym momencie maszynista zauważa na torach krowę. Natychmiast uruchamia hamowanie, co powoduje stałe zwalnianie prędkości. Dwie minuty później pociąg zostaje zatrzymany tuż przed krowim nosem. Jak daleko od krowy był pociąg w momencie, gdy maszynista zauważył ją na torach?
12. Problem igły Buffona. Igłę o długości 1 cm rzucamy na mozaikę z drewnianych listewek o szerokości 2 cm każda. Trzeba znaleźć prawdopodobieństwo tego, że igła ułoży się w poprzek dwóch listewek. (wskazówka: Załóżmy, że listewki leżą poziomo wzdłuż osi OX, prostopadle do osi OY. Oznaczmy przez P ten koniec igły, który ma mniejszą drugą współrzędną; jeśli igła leży równolegle do osi OX, to P będzie jej lewym końcem. Niech y oznacza odległość P od najbliższego złącza listewek, będącego powyżej igły; zatem $0 \leq y \leq 2$. Niech α będzie kątem pomiędzy linią poziomą przechodzącą przez P i półprostą wyznaczoną przez igłę, liczoną w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara; zatem $0 \leq \alpha \leq \pi$. Uzasadnić, że igła będzie leżała w poprzek dwóch listewek tylko wtedy gdy $y \leq \sin \alpha$. Zauważyć, że możliwe położenia igły są dokładnie dane przez wszystkie pary (y, α) spełniające warunki $0 \leq y \leq 2$ oraz $0 \leq \alpha \leq \pi$. Czym jest zbiór tych par? Czym jest zbiór par spełniających dodatkowo warunek $y \leq \sin \alpha$? Szukane prawdopodobieństwo będzie stosunkiem powierzchni tych dwóch zbiorów.)
13. Jaki wynik otrzymamy w zadaniu 12, jeśli długość igły będzie 2 cm, czyli tyle samo co szerokość listewki?
14. Sprawdzić co będzie w przypadku, gdy długość igły wynosi 2 cm, a szerokość listewki 5 cm.