

2. Zadania z matematyki wyższej

1. Podać pierwsze cztery wyrazy każdego z podanych ciągów.

$$\frac{1}{n+3}$$

$$\frac{1}{3^{n-1}}$$

$$\frac{n-1}{n+1}$$

$$n - \frac{1}{n}.$$

2. Znaleźć liczbę N taką, że dla $n > N$ mamy

(a) $\left| \frac{2n-1}{n+1} - 2 \right| < 0,01.$

(b) $\left| \frac{2n-1}{n+1} - 2 \right| < 0,0001.$

(c) $\left| \frac{2n-1}{n+1} - 2 \right| < \varepsilon.$

3. Znaleźć liczbę N taką, że dla $n > N$ mamy

(a) $\frac{n^2+1}{n} > 100.$

(b) $\frac{n^2+1}{n} > 10000.$

(c) $\frac{n^2+1}{n} > M.$

4. Obliczyć granice; dopuszczalny jest też wynik $+\infty$ lub $-\infty$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\pi + \frac{1}{n} \right)$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (0,8)^j$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n}$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{n+3}{n^2-2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2-4}{-n-5}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{\pi}{n}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \arctan k$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{2k}.$$

5. Liczba bakterii w pewnej kulturze rośnie wykładniczo, w ten sposób, że liczba podwaja się w ciągu 1 godziny. Na początku było 1000 bakterii. Znaleźć liczbę bakterii a_n po n godzinach. Wykonać to samo polecenie, gdy liczba ta podwaja się w ciągu 10 godzin.
6. Złożyliśmy 1000 zł na lokatę bankową oprocentowaną w stałej skali r procent na rok. Znaleźć wzór na kwotę a_n jaką uzyskamy likwidując lokatę po n latach (nie uwzględniamy podatku Belki).
7. Kwotę P złotych złożyliśmy na rachunku oszczędnościowym o stałym rocznym oprocentowaniu wynoszącym r procent. Aby przyciągnąć klientów bank nalicza odsetki n razy w roku w równych odstępach czasowych (np. co 3 miesiące, co miesiąc lub codziennie¹).

- (a) Pokazać, że po roku kwota na lokacie wyniesie

$$R_n = P \left(1 + \frac{0,01r}{n} \right)^n.$$

Wskazówka: Po $1/n$ roku kwota wyniesie $P(1 + 0,01r/n)$.

- (b) Można udowodnić, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{0,01r}{n} \right)^n = e^{0,01r}.$$

Zatem, gdyby bank zdecydował się naliczać odsetki w sposób ciągły, to kwota po roku wyniosłaby $R = Pe^{0,01r}$. Dla $P = 1000$ zł oraz $r = 5$ obliczyć różnicę pomiędzy kwotą uzyskaną na rachunku w przypadku ciągłego naliczania odsetek i w przypadku naliczania kwartalnego. Użyć kalkulatora lub innego narzędzia.

¹Czy ktoś zna taki bank ?