

3. Zadania z matematyki wyższej

1. Które z podanych ciągów są ograniczone ?

$$1 + \frac{2}{n}, \quad e^{1/n}, \quad n + \frac{1}{2n}, \quad \cos n^2$$

2. Znaleźć granice podanych ciągów.

$2 + \frac{1}{n}$	$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$	$\frac{2^{n+1}}{5^{n+2}}$	$\frac{k+1}{k}$
$\frac{4n^3 - 5}{6n^3 + 3}$	$\sqrt[n]{3n}$	$\frac{\sqrt{n} + 1}{\sqrt{n} - 1}$	$\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
$\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$	$\frac{(-1)^n}{n}$	$\frac{1}{n2^n}$	$\sqrt[n]{\ln n}$
$\frac{\sqrt{n^2 - 1}}{2n}$	$\frac{n \cos(n+2)}{n^2 + 2}$	$\frac{2 + (-1)^n}{3^n}$	$\frac{2n + (-1)^n}{4^n}$

3. Hodowla królików zaczyna się od jednej pary dorosłych królików. Każda dorosła para królików co miesiąc daje początek nowej parze (samiec i samiczka). Nowo narodzone króliki dorastają w ciągu 2 miesięcy. Problem polega na znalezieniu liczby par dorosłych królików po n miesiącach od początku hodowli, przy założeniu, że króliki nie wymierają. Niech a_n oznacza liczbę tych par. Obliczyć a_1 , a_2 , a_3 i a_4 . Uzasadnić wzór

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}. \quad (1)$$

Ciąg a_n nosi nazwę ciągu Fibonacciego, na cześć włoskiego matematyka, który naprawdę nazywał się Leonardo z Pizy, i w 1202 roku postawił ten problem i rozwiązał go.

Niech $b_n = a_{n+1}/a_n$. Zakładając, że granica $\lim_n b_n$ istnieje i wynosi b obliczyć, że

$$b = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

To oznacza, że po wielu latach liczba dorosłych królików przyrasta co miesiąc o około 62%. **Wskazówka:** Podzielić równanie (1) przez a_n i zauważyć, że

$$b_n = 1 + \frac{1}{b_{n-1}}.$$

Następnie wyprowadzić, że $b = 1 + 1/b$ i obliczyć b .