

4. Zadania z matematyki wyższej

1. Obliczyć czwartą sumę częściową szeregów.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

2. Sprawdzić, które z szeregów są rozbieżne z tego powodu, że wyraz ogólny nie dąży do zera.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}\right) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

3. Znaleźć wzór wyrażający sumę częściową szeregu i następnie sprawdzić zbieżność.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+1)^3}\right) \quad \sum_{n=1}^{\infty} [n^3 - (n+1)^3]$$

4. Sprawdzić, czy podane szeregi są zbieżne i obliczyć ich sumy tam, gdzie możliwe.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (0,3)^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 5^n}{10^n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{2^{n+2}}.$$

5. Wiadomo, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Ile wynosi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^2}$?

6. Znaleźć błąd w rozumowaniu: Niech

$$a = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots$$

Wtedy

$$2a = 2 + 4 + 8 + 16 + \dots = (1 + 2 + 4 + 8 + \dots) - 1 = a - 1.$$

Zatem $a = -1$.

7. Znaleźć najmniejszą wartość n , dla której $\sum_{j=1}^n 1/j \geq 3$. Wykonać to samo polecenie dla $\sum_{j=1}^n 1/j \geq 4$. Można użyć kalkulatora lub komputera.
8. (a) Na prostym odcinku torów dwa pociągi, jadące każdy z prędkością 30 km na godzinę, zbliżają się do siebie. Gdy odległość pomiędzy pociągami wynosi 1 km, pszczoła zaczyna latać tam i z powrotem pomiędzy pociągami z prędkością 60 km na godzinę. Wyrazić odległość jaką przeleci pszczoła zanim pociągi się zderzą za pomocą nieskończonego szeregu i obliczyć sumę tego szeregu.
- (b) Znaleźć elementarne rozwiązanie zagadnienia bez użycia szeregów. **Wskazówka:** Jak długo pszczoła będzie latała ?
9. Mrówka idzie z prędkością 30 cm na minutę wzdłuż jednorodnej gumowej taśmy. Na początku taśma ma długość 1 m i pod koniec każdej minuty jest rozciągana o dodatkowy metr. Mrówka zaczyna marsz w jednym końcu taśmy. Czy kiedykolwiek dotrze do drugiego końca ? Jeśli tak, to po jakim czasie ? **Wskazówka:** Niech a_n oznacza stosunek odległości mrówki od początku taśmy do aktualnej długości taśmy. Wyrazić a_{n+1} poprzez a_n .
- *10. Układamy cegły o jednakowej długości jedna na drugiej w ten sposób, aby konstrukcja nie zawaliła się, tzn. muszą być zachowane prawa fizyki. Pokazać, że można cegły ułożyć tak, aby brzeg górnej cegły był wysunięty w prawo od brzegu dolnej cegły tak daleko jak zechcemy.