

5. Zadania z matematyki wyższej

1. Zastosować kryterium porównawcze lub kryterium graniczne, aby stwierdzić zbieżność lub rozbieżność podanych szeregów.

$$\begin{array}{ccccc}
 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{n^2}} & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^3-n-1} \\
 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{7^n} & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2-3} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^3+1)^{3/7}} & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2-1}} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg n}{n^2+1} \\
 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n} & \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2} &
 \end{array}$$

Wskazówka: W ostatnim przykładzie skorzystać z nierówności $\ln n \leq 2\sqrt{n}$, która będzie udowodniona na wykładzie.

2. Uzasadnić, że jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach nieujemnych jest zbieżny, to również szereg

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ jest zbieżny. **Wskazówka:** Zauważyć, że $a_n^2 \leq a_n$ dla odpowiednio dużych wskaźników n .

3. Raketę wystrzelono z ziemi. W czasie podróży rakietą zużywa jedną czwartą paliwa w czasie pierwszych 100 km, jedną dziewiątą w czasie następnych 100 km, i ogólnie $1/(n+1)^2$ część swojego początkowego zapasu paliwa w czasie n -tych 100 km. Czy kiedykolwiek paliwo się zużyje? **Wskazówka:** Skorzystać z $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

4. Korzystając z kryterium d’Alamberta lub Cauchy’ego zbadać zbieżność podanych szeregów.

$$\begin{array}{ccccc}
 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!3^n}{10^n} & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+5}\right)^n & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{100}}{e^n} \\
 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1,7}}{(1,7)^n} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^n} & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(2n)^n} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}
 \end{array}$$

5. Zbadać zbieżność szeregów korzystając w razie potrzeby z kryterium Leibniza. Za każdym razem sprawdzić, czy kryterium może być zastosowane.

$$\begin{array}{ccc}
 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n+1} & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n+1} \frac{1}{5n+1} & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+2}{n^2+3n+5} \\
 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n}}{2n+1} & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n!}{100^n} & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^{1/10}}
 \end{array}$$

6. Obliczyć sumy podanych szeregów z dokładnością do 0,01.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^3} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{1+n+6n^2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{8}{10^n+1}$$

7. Uzasadnić podane wzory korzystając z kryterium d’Alamberta lub Cauchy’ego.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n}}{n^n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!x^n}{n^n} = 0 \text{ dla } |x| < e.$$