

6. Zadania z matematyki wyższej

1. Sprawdzić, które z podanych wzorów określają funkcję.

(a) Dziedzina składa się z liczby -2 , której przyporządkowana jest liczba π .

(b) Dziedzina składa się z liczby -2 , której przyporządkowane są liczby -2 i π .

(c) $f(x) = \pm\sqrt{x}$.

(d) $g(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{dla } x < 0 \\ 12x - 6 & \text{dla } x > 0 \end{cases}$

(e) $h(x) = \begin{cases} 2 - x^4 & \text{dla } x < 0 \\ x^2 & \text{dla } x > 1 \end{cases}$

(f) $g(x) = \begin{cases} 4x + 1 & \text{dla } x \leq 2 \\ 2x^3 - 7 & \text{dla } x \geq 20 \end{cases}$

(g) $f(x) = \begin{cases} 2 - 3x^3 & \text{dla } x \leq 1 \\ 3x^4 - 3 & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$

(h) $u(t) = \begin{cases} t^2 & \text{dla } t \text{ wymiernych} \\ t & \text{dla } t \text{ niewymiernych} \end{cases}$

(i) $v(t) = \begin{cases} t^2 & \text{dla } t^2 \text{ wymiernych} \\ t & \text{dla } t \text{ niewymiernych} \end{cases}$

2. Sprawdzić, czy funkcje f i g są równe.

(a) $f(x) = 1 - x^2$; $g(x) = 1 - x^2$ dla $-1 < x < 1$.

(b) $f(x) = \sqrt{x}$ dla $x \geq 0$; $g(x) = \sqrt{x}$.

(c) $f(x) = \sqrt{x^2}$; $g(x) = |x|$.

(d) $f(x) = \frac{x^3 - 4x}{x^3 - 4x}$; $g(x) = 1$.

(e) $f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 1}$; $g(x) = \frac{1}{x + 1}$.

(f) $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$; $g(x) = x - 3$ dla $x \neq 2$.

3. Dla $f(x) = 2x^2 + x - 4$ i $g(x) = 3 - x^2$ obliczyć

$$(f + g)(-1), (f - g)(2) (f/g)(-3) g(f(0)) f(g(1)).$$

4. Znaleźć dziedzinę i wzór na funkcje $g \circ f$ i $f \circ g$

(a) $f(x) = 1 - x$, $g(x) = 2x + 5$.

(b) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$.

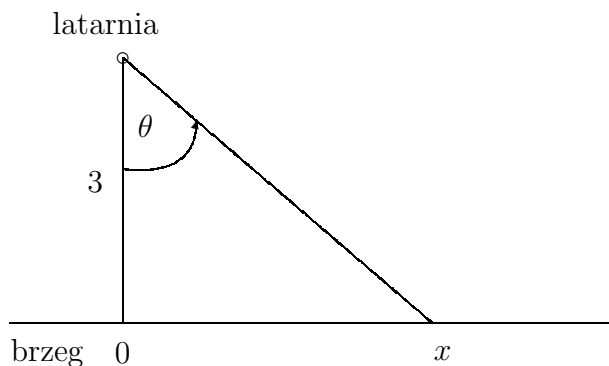
(c) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2 - 5x + 6$.

(d) $f(x) = \frac{1}{x - 1}$, $g(x) = \frac{1}{x + 1}$.

5. Zapisać funkcję h w postaci złożenia $g \circ f$ dwu funkcji f i g .

$$h(x) = \sqrt{x - 3} \quad h(x) = (3x^2 - 5\sqrt{x})^{1/3} \quad h(x) = \frac{1}{(x + 3)^2 + 1} \quad h(x) = \sqrt{\sqrt{x} - 1}$$

6. Funkcja f jest określona na przedziale $[0, 4]$. Jaka jest dziedzina funkcji $g(x) = f(x+3)$ i $h(x) = f(x^2-2)$.
7. Niech $f(x) = 1/(1-x)$. Wykazać, że $f(f(f(x))) = x$ dla liczb x różnych od 0 i od 1.
8. Pojemnik ma kształt cylindra zakończonych półsfery. Pojemność wynosi 100 litrów. Znaleźć długość cylindra w zależności od promienia półsfery.
9. Dwa samochody wyruszają jednocześnie z tego samego miejsca. Pierwszy jedzie na północ z prędkością 60 km/h, a drugi na wschód z prędkością 80 km/h. Znaleźć wzór dla funkcji $D(t)$ wyrażającej w zależności od t odległość samochodów w t godzin po starcie.
10. Latarnia morska znajduje się 3 km od linii brzegowej, jak na rysunku. Wyrazić odległość pomiędzy latarnią a oświetlonym punktem x leżącym na brzegu, jako funkcję kąta θ .



11. Biedronka stoi na podłodze podczas, gdy 2-metrowy olbrzym zbliża się do niej. Gdy olbrzym znajduje się 2 metry od niej, jak duży kąt w polu widzenia biedronki jest zajęty przez niego? Co stanie się, gdy olbrzym zbliży się? **Wniosek:** czasami lepiej siedzieć z tyłu w teatrze, jeśli jest kilka rzędów wolnych bezpośrednio z przodu, niż siedzieć w drugim rzędzie bezpośrednio za kimś.

Podręcznik do matematyki wyższej:

Włodzimierz Krysiński, Lech Włodarski, Analiza matematyczna w zadaniach. Część I. Wydawnictwo Naukowe PWN Warszawa, 2005 r. ISBN: 83-01-14295-2 Wydanie: Dwudzieste dziewiąte, dodruk Objętość: s. 512