

7. Zadania z matematyki wyższej

1. Znaleźć granice o ile istnieją. W razie potrzeby zastosować przekształcenia algebraiczne.

$$\begin{array}{llll}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3x}{x} & \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} & \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} & \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x + 2} \\
 \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 3x + 2}{x^2 + x} & \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x}{x + 3} + \frac{x - 3}{x^2 - 9} \right) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 + x)^2 - 4}{x} \\
 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 4}{x} & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(4 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} \right) & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{3x^3 + 5} & \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3(4x^4 + 7) \\
 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 5}{4x^2 + 2} & \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt[3]{x^2 - 3x} & \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 4} & \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} \\
 \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x + 3}{\sqrt{x} - 3} & \lim_{x \rightarrow 16} \frac{x - 16}{\sqrt{x} - 4} & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} & \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{x^3 + 8} \\
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a + x)^2 - x^2}{x} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a + x} - \sqrt{a}}{x} & a > 0. &
 \end{array}$$

2. Kompania produkująca części do komputerów stwierdziła, że przeciętny nowy pracownik może złożyć $N(t)$ części w ciągu dnia po t dniach praktyki, gdzie

$$N(t) = \frac{100t}{t + 9}$$

Obliczyć $N(11)$, $\lim_{t \rightarrow 11} N(t)$ i $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t)$.

3. Antybiotyk został podany dożylnie pacjentowi. Stężenie lekarstwa we krwi po upływie t godzin wynosi

$$C(t) = \frac{0,14t}{t^2 + 1}.$$

Znaleźć $\lim_{t \rightarrow \infty} C(t)$.

4. Naskicować wykresy podanych funkcji i obliczyć granice o ile istnieją.

$$\begin{array}{ll}
 f(x) = \begin{cases} 1 & -1 \leq x < 1 \\ x & 1 \leq x < 3 \\ 3 & 3 \leq x \leq 5 \end{cases} & \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \\
 f(x) = \begin{cases} -x - 1 & x \leq -1 \\ 1 - x^2 & 1 < x < 1 \\ x - 1 & x \geq 1 \end{cases} & \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x)
 \end{array}$$

5. Korzystając z wzorów trygonometrycznych i granicy $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ obliczyć granice

$$\begin{array}{llll}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{x + 2x^2} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} \\
 \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{\sin^2 x} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} &
 \end{array}$$

6. Naskicować wykresy funkcji i znaleźć punkty nieciągłości.

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & x \leq 1 \\ 5 - x & x > 1 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} 1 + x & x \leq 2 \\ 5 - x & x > 2 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$$

7. Zbadać w jakich przedziałach są ciągłe podane funkcje.

$$F(x) = 2x^8 - 3x^4 + 5 \quad g(x) = \sqrt{x-5} \quad K(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \quad k(x) = \sqrt{8x - 2x^2 - x^3}$$

8. W podanych niżej przykładach funkcja f nie jest określona w punkcie c . Naszkicować wykres funkcji f i sprawdzić, czy w punkcie c można dać funkcji f wartość $f(c)$ tak, aby f była ciągła w punkcie c .

$$f(x) = \frac{x}{|x|}, \quad c = 0 \quad f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}, \quad c = 1 \quad f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad c = 0.$$

9. Pokazać, że równanie $x^3 + x - 3 = 0$ ma pierwiastek w przedziale $(0, 2)$. Wyznaczyć go z dokładnością do 0.1.

10. Pokazać, że równanie $\sin x - x + 1 = 0$ ma pierwiastek w przedziale $(\frac{2}{3}\pi, \frac{3}{4}\pi)$.

11. Sprzedawca w firmie komputerowej otrzymuje pensję podstawową w wysokości \$1000 miesięcznie. Ponadto otrzymuje prowizję w wysokości 5% od przychodów ze sprzedaży powyżej \$10 000 w ciągu miesiąca. Jeśli sprzedaż miesięczna wyniesie \$20 000 lub więcej, otrzymuje on dodatkowo premię \$500. Niech $E(s)$ oznacza jego zarobki w ciągu miesiąca jako funkcję przychodów ze sprzedaży s .

(a) Naszkicować wykres $E(s)$ dla $0 \leq s \leq 30000$.

(b) Znaleźć $\lim_{s \rightarrow 10000} E(s)$ i $E(10000)$.

(c) Znaleźć $\lim_{s \rightarrow 20000} E(s)$ i $E(20000)$.

(d) Czy $E(s)$ jest ciągła w $s = 10000$? A w $s = 20000$?

12. Obliczyć podane wielkości dla $y = f(x) = 3x^2$.

(a) Δx , Δy i $\Delta y / \Delta x$ dla $x_1 = 1$ i $x_2 = 4$.

(b) Średnie tempo zmiany y , gdy x zmienia się od 2 do 5.

(c) $\frac{f(5 + \Delta x) - f(5)}{\Delta x}$ (uproszczyć)

Do czego dąży ten iloraz, gdy Δx dąży do 0?

13. Obiekt porusza się wzdłuż osi y tak, że jego położenie w chwili x jest $y = f(x) = x^2 + x$ (y jest w metrach, x w sekundach). Znaleźć

(a) Średnią prędkość, gdy x zmienia się od 1 do 3 sekund.

(b) Średnią prędkość, gdy x zmienia się od 1 do $1 + \Delta x$ sekund.

(c) Prędkość w chwili $x = 1$.

(d) Nachylenie siecznej łączącej $(1, f(1))$ i $(3, f(3))$.

(e) Nachylenie siecznej łączącej $(1, f(1))$ i $(1 + \Delta x, f(1 + \Delta x))$.

(f) Nachylenie stycznej w punkcie $(1, f(1))$.

(g) Równanie stycznej w punkcie $(1, f(1))$.

14. Dla funkcji $y = x^2$ znaleźć

(a) nachylenie stycznej w punktach $x = -2$, 0 i 2

(b) równania stycznych w $x = -2$, 0 i 2

15. Powtórzyć poprzednie zadanie dla $y = 2x^3 - 3x^2 - 5$.