

8. Zadania z matematyki wyższej

1. Zastosować regułę podstawiania do obliczenia granic

$$\begin{array}{llll} \lim_{x \rightarrow 7} (2x - 16)^4 & \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{3x^2} & \lim_{x \rightarrow \sqrt{5}} (9 - x^2)^{-5/2} & \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{2x+1}{2x-1}} \\ \lim_{x \rightarrow -\pi/6} \cos 2x & \lim_{x \rightarrow -\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) & \lim_{t \rightarrow 0} \sin^{4/3} t & \lim_{t \rightarrow \pi/4} \operatorname{tg}^{14} t \end{array}$$

2. Znaleźć asymptoty pionowe wykresów podanych funkcji.

$$\begin{array}{lll} f(x) = \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} & f(x) = \frac{x^2 - 4x - 12}{x^2 - x - 6} & f(x) = \frac{x + 1/x}{x^4 + 1} \\ f(x) = \frac{\sin x}{x} & f(x) = \frac{\cos x}{x} & f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}} \end{array}$$

3. (a) Załóżmy, że $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$. Zastosować regułę podstawiania, aby pokazać, że $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |L|$.
 (b) Pokazać, że jeśli $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$, to $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.
 (c) Podać przykład funkcji f takiej, że $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 1$, ale $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ nie istnieje.
 4. Załóżmy, że $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ oraz $|g(x)| \leq M$ dla pewnej stałej M i wszystkich $x \neq a$. Pokazać, że $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$. **Wskazówka:** Zauważyć, że $-M|f(x)| \leq f(x)g(x) \leq M|f(x)|$.
 5. Skorzystać z poprzedniego zadania przy obliczaniu granic

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}.$$

6. Znaleźć nachylenie stycznej do wykresu w podanym punkcie. Znaleźć równanie stycznej.

$$\begin{array}{ll} f(x) = \cos x; (0, 1) & f(x) = \sin 4x; (0, 0) \\ f(x) = \sqrt{4 - x^2}; (1, \sqrt{3}) & f(x) = \sqrt{x + x^2}; (1, \sqrt{2}) \end{array}$$

7. Niech $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ i $0 < a < 1$. Wykresem funkcji f jest górny półokrąg o promieniu 1.

- (a) Pokazać, że nachylenie promienia łączącego $(0, 0)$ z punktem $(a, \sqrt{1 - a^2})$ wynosi $\sqrt{1 - a^2}/a$.
 (b) Pokazać, że nachylenie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(a, \sqrt{1 - a^2})$ wynosi $-a/\sqrt{1 - a^2}$.
Wskazówka: Styczna jest prostopadła do promienia.
 (c) Dla $0 < x < 1$ i $x \neq a$ znaleźć nachylenie m_x siecznej przechodzącej przez punkty $(a, \sqrt{1 - a^2})$ i $(x, \sqrt{1 - x^2})$.
 (d) Pokazać, że

$$\lim_{x \rightarrow a} m_x = \frac{-a}{\sqrt{1 - a^2}}.$$

To oznacza, że definicja stycznej poprzez granicę siecznych przechodzących przez $(x, f(x))$ oraz $(a, f(a))$, gdy x dąży do a daje w wyniku tę samą prostą, jak przy definicji stycznej do okręgu wprowadzonej przez Euklidesa.

8. Po wykresie paraboli $y = 1 - x^2$ przechadza się mucha, zaczynając spacer w punkcie $(-1, 0)$ i idąc w prawo. W punkcie $(5/4, 0)$ leżącym poza parabolą czeka pająk. W którym punkcie wykresu mucha zauważy pająka (i vice versa)? Załóżmy, że pająk zasnął i mucha przeszła obok niego i poszła dalej. W którym punkcie paraboli mucha może czuć się bezpiecznie, tzn. pająk nie może jej zauważyć?
 9. Załóżmy, że Galileusz zrzucił kulki w dół z początkową prędkością 5 m/s. Znaleźć prędkość kulek po 2 sekundach spadku.
 10. Kamień został zrzuty z balkonu położonego 40 m nad ziemią. Po jednej sekundzie prędkość kamienia wynosiła -20 m/s. Znaleźć początkową prędkość kamienia. Czy wynik będzie taki sam, jeżeli balkon był położony wyżej?