

9. Zadania z matematyki wyższej

1. Obliczyć pochodną $f'(a)$ korzystając z definicji.

$$f(x) = x^2 - 2; a = -1$$

$$f(x) = \frac{1}{x}; a = -2$$

$$f(x) = |x|; a = \sqrt{2}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 2 \\ 4x - 4 & x \geq 2 \end{cases}; a = 2$$

2. Obliczyć pochodne funkcji korzystając z definicji.

$$f(x) = -\pi$$

$$f(x) = -5x^2$$

$$g(x) = x^3$$

$$k(x) = \frac{1}{x^2} - \sqrt{7}$$

3. Sprawdzić, czy podane funkcje są różniczkowalne w punkcie a .

$$f(x) = x^{4/3}; a = 0$$

$$f(x) = |x| - x; a = 0$$

$$g(x) = |x - 3|; a = 3$$

$$h(x) = \frac{1}{x^2}; a = 0$$

4. Znaleźć równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x)$ w podanym punkcie.

$$f(x) = x^2; (-2, 4)$$

$$f(x) = \sqrt{x}; (4, 2)$$

$$f(x) = \sin x; (0, 0)$$

5. W każdym przykładzie poniżej funkcja f jest różniczkowalna w punkcie a . Jaki jest związek pomiędzy podanymi granicami a liczbą $f'(a)$?

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(a) - f(t)}{t - a}$$

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(a) - f(t)}{a - t}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x - a} [f(x) - f(a)]$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{a}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a - h) - f(a)}{a}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a - h)}{a}$$

6. (a) Załóżmy, że $f(x)$ jest funkcją parzystą, tzn. $f(-x) = f(x)$ dla dowolnej liczby x . Wiadomo, że $f'(a) = 2$. Obliczyć $f'(-a)$.
 (b) Załóżmy, że $f(x)$ jest funkcją parzystą, tzn. $f(-x) = f(x)$ dla dowolnej liczby x . Wiadomo, że $f'(a) = 2$. Obliczyć $f'(-a)$.
7. Dwa samochody wyruszają z parkingu w tym samym momencie. Jeden jedzie z prędkością 60 km/h na północ a drugi z prędkością 80 km/h na wschód. Z jaką prędkością samochody oddalają się od siebie ?
8. Dwie łódki startują z tego samego miejsca i poruszają się po liniach prostych o kącie 45° pomiędzy nimi z prędkością 2 m/s każda. Z jaką prędkością łódki oddalają się od siebie ?
9. Załóżmy, że zysk ze sprzedaży x beczek miodu w złotych wyraża się wzorem $P(x) = 1200x^{1/2}$. Obliczyć zysk marginalny dla $x = 16$.
10. Znaleźć liczby a jeśli

$$f(x) = -2x^2; f'(a) = 12$$

$$f(x) = \frac{1}{x}; f'(a) = -\frac{1}{9}$$

$$f(x) = \sin x; f'(a) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

11. Obliczyć tempo zmiany pola $A(x)$ trójkąta równobocznego o długości boku x . Znaleźć a taki, że $A'(x) = A(x)$.
12. Obliczyć tempo zmiany objętości kuli względem promienia kuli. Jaki jest związek tego tempa z powierzchnią kuli ?
13. Obliczyć pochodne podanych funkcji korzystając ze wzorów na pochodną sumy, iloczynu i ilorazu.

$$f(t) = -3t^2 + \frac{3}{t^6}$$

$$f(x) = \sin x \cos x$$

$$f(x) = \operatorname{ctg} x$$

$$g(t) = \frac{t + 1}{t^2 + t + 2}$$

$$h(y) = \frac{\sqrt{y}}{\cos y}$$

14. Obliczyć dy/dx .

$$y = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

$$y = \frac{1}{\sin x \cos x}$$

$$y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$$

15. Obliczyć $f'(a)$.

$$f(x) = (3x - \sin x)(x^2 + \cos x); a = 0$$

$$f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1}; a = \sqrt{3}$$

16. Znaleźć punkt wykresu funkcji $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$, w którym styczna jest pozioma.

17. Żyrandol o długości 1 m spada z sufitu o wysokości 10 m. Ile czasu na usunięcie się ma osoba o wzroście 1,80 m stojąca pod żyrandolem ? Jeśli się nie usunie, z jaką prędkością żyrandol uderzy w jej głowę ? O ile zmieni się prędkość, gdy wzrost wynosi 1,50 m ?

18. Firma produkująca jogurt ma przychód i koszt wyrażające się wzorami

$$R(x) = 15x^{1/2} - x^{3/2} \quad C(x) = 3x^{1/2} + 4, \quad 0 \leq x \leq 5,$$

gdzie x jest mierzone w tysiącach litrów oraz $R(x)$ i $C(x)$ jest mierzone w setkach złotych. Znaleźć zysk marginalny m_P i obliczyć $m_P(1)$. Pokazać, że $m_P(4) = 0$.