Wielomiany ortogonalne i problem momentów

Ryszard Szwarc*

Spis treści

---

*Notatki do wykładu prowadzonego w semestrze zimowym 2003

1 Wstęp

Problem momentów pochodzi od Stieltjesa (1894). Zagadnienie polega na znalezieniu miary (lub funkcji niemalejącej) σ na półprostej $[0, +\infty)$ przy zadanych momentach m_n dla dowolnego $n = 0, 1, 2, \ldots$. Momentami miary nazywamy całki

$$m_n = \int_0^\infty x^n d\sigma(x).$$

Pierwsze trzy momenty mają naturalną interpretację fizyczną.

$\int_0^\infty d\sigma(x)$	całkowita masa miary
$\int_0^\infty x\, d\sigma(x)$	moment statyczny
$\int_0^\infty x^2 d\sigma(x)$	moment bezwładności

Około 1919 Hamburger badał rozszerzony problem momentów, gdzie rozważał miary o nośniku na całej prostej rzeczywistej.

Dwa podstawowe zagadnienia problemu momentów, Stieltjesa lub Hamburgera, to istnienie i jednoznaczność miary. Chcemy wiedzieć, czy dla danego ciągu liczb $\{m_n\}_{n=0}^\infty$ istnieje miara σ na półprostej nieujemnej lub na całej prostej, której momentami byłyby liczby m_n. W przypadku, gdy taka miara istnieje, chcemy stwierdzić, czy jest ona jedyna czy też takich miar jest więcej. Problem jednoznaczności jest związany ze zbieżnością ułamków łańcuchowych, a także z istotną samosprzężonością pewnych operatorów, tzw. macierzy Jacobi'ego. Stieltjes zajmował się problemem momentów w związku z badaniem własności ułamków łańcuchowych. Od niego pochodzą dwa podstawowe narzędzia stosowane powszechnie w analizie: całka Stieltjesa - tzn. całka względem funkcji o wahaniu ograniczonym, oraz wzór Stieltjesa na odwrócenie - pozwalający wyznaczyć miarę przy pomocy transformaty $F(z) = \int (x - z)^{-1} d\sigma(x)$.

2 Ciągi dodatnio określone, wielomiany ortogonalne i macierze Jacobi'ego

Definicja 2.1. *Ciąg liczb $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ nazywamy dodatnio określonym, jeśli*

$$\sum_{i,j=0}^{N} m_{i+j} z_i \overline{z_j} > 0$$

dla dowolnej liczby naturalnej N i dla dowolnego ciągu liczb zespolonych $z_0, z_1, \ldots, z_N$, takiego, że $|z_1|^2 + |z_2|^2 + \ldots + |z_N|^2 > 0$.

Innymi słowy, ciąg $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ jest dodatnio określony, jeśli dla dowolnej liczby N macierz $\{m_{i+j}\}_{i,j=0}^{N}$ jest dodatnio określona. Niech

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} m_0 & m_1 & \cdots & m_n \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ m_n & m_{n+1} & \cdots & m_{2n} \end{vmatrix} \tag{2.1}$$

Twierdzenie 2.2. *Ciąg $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ jest dodatnio określony wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta_n > 0$ dla każdej liczby $n = 0, 1, 2, \ldots$.*

Dowód. Por. podręcznik algebry liniowej. □

W szczególności ciąg dodatnio określony spełnia $\Delta_0 = m_0 > 0$. Bez straty ogólności będziemy zawsze zakładać, że $m_0 = 1$. Ponadto dodatnia określoność wymusza $m_{2n} > 0$ oraz $m_{2n-1} \in \mathbb{R}$.

Definicja 2.3. *Ciąg $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ dodatnio określony będziemy nazywać* ***ciągiem momentów Hamburgera****. Ciąg spełniający dodatkowo warunek, że $\{m_{n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ jest dodatnio określony, będziemy nazywać* ***ciągiem momentów Stieltjesa****.*

Przykład 2.4.

Niech σ będzie miarą na prostej, której nośnik jest nieskończonym zbiorem oraz całki $\int x^{2n} d\sigma(x)$ są zbieżne dla każdej liczby naturalnej n. Wtedy momenty

$$m_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n d\sigma(x)$$

są dobrze określone. Sprawdźmy, czy $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ jest ciągiem momentów Hamburgera.

$$\sum_{i,j=0}^{n} m_{i+j} z_i \overline{z_j} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{i,j=0}^{n} x^i z_i x^j \overline{z_j} \right) d\sigma(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{i=0}^{n} z_i x^i \right|^2 d\sigma(x) \geqslant 0.$$

Załóżmy niewprost, że ostatnia całka jest równa zeru. Wtedy

$$\sum_{i=0}^{n} z_i x^i = 0 \quad \text{dla} \quad x \in \operatorname{supp} \sigma.$$

Ponieważ nośnik miary σ jest nieskończony, to wielomian $\sum_{i=0}^{n} z_i x^i$ jest tożsamościowo równy zeru. Zatem $z_0 = z_1 = \ldots = z_n = 0$. Zauważmy, że warunek $m_0 = 1$ oznacza, że σ jest miarą probabilistyczną.

Przykład 2.5.

Rozważmy miarę probabilistyczną na półprostej $[0, +\infty)$, spełniającą założenia poprzedniego przykładu. Wiemy już, że ciąg $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ jest dodatnio określony. Z założenia $\nu(x) = x d\sigma(x)$ jest miarą nieujemną o skończonych momentach. Ponieważ

$$\int_{0}^{\infty} x^n d\nu(x) = \int_{0}^{\infty} x^{n+1} d\sigma(x) = m_{n+1},$$

to ciąg $\{m_{n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ jest dodatnio określony. Zatem $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ jest ciągiem momentów Stieltjesa.

Za pomocą ciągu momentów Hamburgera $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ wprowadzimy formę hermitowską $(\cdot, \cdot)$ dla wielomianów o współczynnikach zespolonych, według wzoru

$$(p, q) = \sum_{i,j=0}^{N} a_i \overline{b_j} m_{i+j},$$

gdzie

$$p(x) = \sum_{i=0}^{N} a_i x^i, \quad q(x) = \sum_{j=0}^{N} b_i x^j.$$

Dzięki dodatniej określoności ciągu $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ forma (p, q) określa iloczyn skalarny na przestrzeni liniowej $\mathbb{P}$ wszystkich wielomianów. Zauważmy, że mnożenie przez x jest operatorem symetrycznym na $\mathbb{P}$. Wynika to ze wzoru

$$(xp, q) = (p, xq) = \sum_{i,j=0}^{N} a_i \overline{b_j}\, m_{i+j+1}. \tag{2.2}$$

Z (2.2) natychmiast otrzymujemy

$$(hp, q) = (p, \overline{h}q), \quad p, q, h \in \mathbb{P}. \tag{2.3}$$

Przykład 2.6.

Niech $m_n = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^n d\sigma(x)$. Wtedy

$$(p, q) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x)\overline{q(x)}\, d\sigma(x).$$

Naszym celem będzie teraz skonstruowanie bazy w przestrzeni wszystkich wielomianów, ortonormalnej względem iloczynu skalarnego $(\cdot, \cdot)$. Zadanie polega na znalezieniu ciągu wielomianów p_n takich, że

$$\begin{aligned} p_n(x) &= k_n x^n + k_{n-1}x^{n-1} + \ldots + k_0, \quad \text{gdzie } k_n > 0 \\ (p_n, p_m) &= \begin{cases} 1 & \text{dla } n = m \\ 0 & \text{dla } n \neq m. \end{cases} \end{aligned}$$

Możemy otrzymać ciąg $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ poprzez zastosowanie metody Grama-Schmidta do ciągu jednomianów $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$. Można też określić wielomiany p_n jawnym wzorem.

Wzór (2.4)**.** *Niech* $p_0 = 1$ *oraz*

$$p_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{n-1}\Delta_n}} \begin{vmatrix} m_0 & m_1 & \cdots & m_n \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ m_{n-1} & m_n & \cdots & m_{2n-1} \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{vmatrix}, \tag{2.4}$$

dla $n > 0$. *Wtedy wielomiany* p_n *są ortonormalne względem* $(\cdot, \cdot)$.

Dowód. Zauważmy, że

$$p_n(x) = k_n x^n + \ldots + k_0,$$

gdzie

$$k_n = \frac{\Delta_{n-1}}{\sqrt{\Delta_{n-1}\Delta_n}} = \frac{\sqrt{\Delta_{n-1}}}{\sqrt{\Delta_n}} > 0. \tag{2.5}$$

Zatem p_n jest wielomianem stopnia n. Mamy

$$(p_n, x^k) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{n-1}\Delta_n}} \begin{vmatrix} m_0 & m_1 & \cdots & m_n \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ m_{n-1} & m_n & \cdots & m_{2n-1} \\ m_k & m_{k+1} & \cdots & m_{n+k} \end{vmatrix} = 0.$$

Zatem $(p_n, x^k) = 0$ dla $k \leqslant n-1$. Stąd $(p_n, p_m) = 0$ dla $m < n$. Dalej

$$(p_n, x^n) = \frac{\Delta_n}{\sqrt{\Delta_{n-1}\Delta_n}} = \frac{\sqrt{\Delta_n}}{\sqrt{\Delta_{n-1}}}.$$

Korzystając z (2.5) otrzymujemy

$$(p_n, p_n) = (p_n, k_n x^n + \ldots) = k_n (p_n, x^n) = \frac{\sqrt{\Delta_{n-1}}}{\sqrt{\Delta_n}} \frac{\sqrt{\Delta_n}}{\sqrt{\Delta_{n-1}}} = 1.$$

□

Uwaga 2.7.

Ze wzoru 2.4 wynika, że wielomiany p_n są funkcjami rzeczywistymi.

Każdy wielomian jest kombinacją liniową wielomianów $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$, ponieważ

$$\mathrm{lin}\{1, x, \ldots, x^n\} = \mathrm{lin}\{p_0, p_1, \ldots, p_n\}.$$

W szczególności

$$x p_n = a_{n,n+1} p_{n+1} + a_{n,n} p_n + a_{n-1,n} p_{n-1} + \ldots + a_{n,0} p_0.$$

Dzięki ortogonalności wielomianów p_n i symetrii (2.2) otrzymujemy

$$a_{n,k} = (x p_n, p_k) = (p_n, x p_k) = 0, \quad \text{dla } k \leqslant n-2,$$

oraz

$$\begin{aligned} a_{n,n+1} &= (x p_n, p_{n+1}) = (p_n, x p_{n+1}) =: \lambda_n, \\ a_{n,n-1} &= (x p_n, p_{n-1}) = (p_{n-1}, x p_n) =: \lambda_{n-1}, \\ a_{n,n} &= (x p_n, p_n) =: \beta_n. \end{aligned}$$

Reasumując otrzymujemy wzór rekurencyjny postaci

$$xp_n = \lambda_n p_{n+1} + \beta_n p_n + \lambda_{n-1} p_{n-1}, \; n \geqslant 1 \tag{2.6}$$

$$xp_0 = \lambda_0 p_1 + \beta_0 p_0. \tag{2.7}$$

Porównując współczynniki przy x^{n+1} uzyskujemy

$$\lambda_n = \frac{\sqrt{\Delta_{n-1}\Delta_{n+1}}}{\Delta_n} > 0,$$

$$\lambda_0 = \frac{\sqrt{\Delta_1}}{\Delta_0} > 0.$$

Wzór rekurencyjny pozwala obliczyć kolejno wielomiany $p_1, p_2, \ldots$, gdy znane są liczby λ_n i β_n, przy warunku początkowym $p_0 = 1$. Najpierw obliczamy

$$p_1 = \frac{1}{\lambda_0}(x - \beta_0).$$

Następnie korzystamy z

$$p_{n+1} = \frac{1}{\lambda_n}(xp_n - \beta_n p_n - \lambda_{n-1} p_{n-1}).$$

Wzory (2.6) i (2.7) można zapisać w postaci macierzowej. Wprowadźmy oznaczenia

$$\boldsymbol{P}(x) = \begin{pmatrix} p_0(x) \\ p_1(x) \\ p_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} \beta_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \lambda_0 & \beta_1 & \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_1 & \beta_2 & \lambda_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \lambda_2 & \beta_3 & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

Wtedy wzory (2.6) i (2.7) można krótko zapisać

$$J\,\boldsymbol{P}(x) = x\boldsymbol{P}(x). \tag{2.9}$$

Macierz J nazywamy macierzą Jacobi'ego. Z jej postaci można odczytać symetrię. Na przekątnej macierzy znajdują się liczby rzeczywiste, natomiast liczby bezpośrednio pod i nad przekątną są dodatnie.

Podany wyżej ciąg rozumowań pokazuje, że ciąg dodatnio określony $\{m_n\}_{n=0}^\infty$ wyznacza macierz Jacobi'ego J, której współczynniki pozwalają obliczyć rekurencyjnie wielomiany ortonormalne. Spróbujemy rozwiązać zagadnienie odwrotne i odpowiedzieć na pytanie, czy każda macierz Jacobi'ego jest związana w wyżej opisany sposób z ciągiem dodatnio określonym.

Rozważmy macierz postaci jak we wzorze (2.8), gdzie $\lambda_n > 0$ oraz $\beta_n \in \mathbb{R}$. Określamy wielomiany $p_0, p_1, p_2, \ldots$ rekurencyjnie korzystając ze wzorów (2.6) i (2.7), przyjmując $p_0 = 1$. W przestrzeni $\mathbb{P}$ wprowadzamy iloczyn skalarny kładąc

$$(p_n, p_m) = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = m \\ 0 & \text{dla } n \neq m. \end{cases}$$

i rozszerzamy liniowo na całą przestrzeń. W ten sposób układ $\{p_n\}_{n=0}^\infty$ stanowi bazę ortonormalną. Rozważmy operator mnożenia przez zmienną x w przestrzeni $\mathbb{P}$. Wzory (2.6) i (2.7) oznaczają, że macierzą tego operatora w bazie $\{p_n\}_{n=0}^\infty$ jest macierz Jacobi'ego zadana w (2.8). Z symetrii tej macierzy wynika zatem tożsamość

$$(xp_n, p_m) = (p_n, xp_m).$$

Wzór ten można też sprawdzić bezpośrednim rachunkiem. Poprzez rozszerzenie liniowe dostajemy

$$(xp, q) = (p, xq), \quad p, q \in \mathbb{P}. \tag{2.10}$$

Określmy ciąg m_n wzorem

$$m_n = (x^n, 1).$$

Wtedy z (2.10) wnioskujemy, że

$$m_{i+j} = (x^{i+j}, 1) = (x^i, x^j).$$

Sprawdzamy dodatnią określoność ciągu $\{m_n\}_{n=0}^\infty$.

$$\sum_{i,j=0}^N m_{i+j} z_i \overline{z_j} = \sum_{i,j=0}^N (x^i, x^j) z_i \overline{z_j} = \left(\sum_{i=0}^N z_i x^i, \sum_{j=0}^N z_j x^j \right) \geqslant 0. \tag{2.11}$$

Pozostaje pokazać, że ostatnia nierówność jest ostra przy założeniu, że nie wszystkie współczynniki z_i zerują się. Załóżmy, że $|z_0|^2 + |z_1|^2 + \ldots + |z_N|^2 > 0$ i zapiszmy wielomian $\sum_{i=0}^N z_i x^i$ w bazie $\{p_n\}_{n=0}^\infty$. Otrzymamy

$$\sum_{i=0}^N z_i x^i = \sum_{i=0}^N \xi_i p_i,$$

dla pewnych współczynników ξ_i takich, że $|\xi_0|^2 + \ldots + |\xi_N|^2 > 0$. Ponieważ wielomiany p_n są ortogonalne, to

$$\left(\sum_{i=0}^{N} z_i x^i, \sum_{j=0}^{N} z_j x^j \right) = \sum_{i=0}^{N} |\xi_i|^2 > 0.$$

Reasumując, wychodząc od macierzy Jacobi'ego J skonstruowaliśmy ciąg Hamburgera $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$. Zauważmy, że ze wzoru (2.11) wynika, że iloczyn skalarny określony przez nas w $\mathbb{P}$ i iloczyn skalarny wyznaczony przez ciąg $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ są identyczne. Zatem gdybyśmy dla ciągu $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ powtórzyli konstrukcję wielomianów ortonormalnych, otrzymalibyśmy ciąg $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ i macierz Jacobi'ego J.

3 Kilka użytecznych wzorów

Dla zadanego ciągu Hamburgera $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ wprowadzamy iloczyn skalarny $(\cdot, \cdot)$ w przestrzeni wielomianów $\mathbb{P}$ i konstruujemy macierz Jacobi'ego o współczynnikach λ_n i β_n, tak jak to było opisane w poprzednim rozdziale.

Rozważmy równanie różnicowe

$$x a_n = \lambda_n a_{n+1} + \beta_n a_n + \lambda_{n-1} a_{n-1}, \quad n \geqslant 1, \tag{3.1}$$

przy ustalonej wartości x. Przy zadanych wartościach początkowych a_0 i a_1 równanie (3.1) ma jednoznaczne rozwiązanie, bo $\lambda_n > 0$. Na przykład, gdy

$$\begin{aligned} a_0 &= p_0 = 1, \\ a_1 &= p_1(x) = \frac{x - \beta_0}{\lambda_0}, \end{aligned}$$

to $a_n = p_n(x)$. Z kolei dla

$$\begin{aligned} a_0 &= q_0 = 0, \\ a_1 &= q_1(x) = \frac{1}{\lambda_0}, \end{aligned}$$

otrzymujemy rozwiązanie $a_n = q_n(x)$. Wyrażenie $q_n(x)$ jest wielomianem stopnia $n-1$ zmiennej x dla $n \geqslant 1$. Wielomiany $q_n(x)$ noszą nazwę wielomianów drugiego rodzaju, lub wielomianów stowarzyszonych. Wprowadźmy oznaczenie

$$\boldsymbol{Q}(x) = \begin{pmatrix} q_0(x) \\ q_1(x) \\ q_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Wtedy

$$(J\boldsymbol{Q}(x))_n = xq_n(x), \quad n \geqslant 1,$$
$$(J\boldsymbol{Q}(x))_0 = \lambda_0 q_1(x) + \beta_0 q_0(x) = xq_0(x) + 1.$$

Powyższe wzory możemy zapisać łącznie jako

$$J\boldsymbol{Q}(x) = x\boldsymbol{Q}(x) + \delta_0, \qquad \text{gdzie } \delta_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Wzór (3.3)**.**

$$q_n(x) = \left(\frac{p_n(x) - p_n(y)}{x - y}, 1\right)_y, \tag{3.3}$$

gdzie $(\cdot, \cdot)_y$ *oznacza iloczyn skalarny względem zmiennej* y*.*

Dowód. Niech

$$a_n = \left(\frac{p_n(x) - p_n(y)}{x - y}, 1\right)_y.$$

Widać, że $a_0 = 0 = q_0(x)$. Dalej uwzględniając, że $p_1(x) = (x - \beta_0)/\lambda_0$ otrzymujemy

$$a_1 = \left(\frac{p_1(x) - p_1(y)}{x - y}, 1\right)_y = \frac{1}{\lambda_0} = q_1(x).$$

Następnie dla $n \geqslant 1$ obliczamy xa_n.

$$\begin{aligned} xa_n &= \left(x\frac{p_n(x) - p_n(y)}{x - y}, 1\right)_y = \left(\frac{xp_n(x) - yp_n(y)}{x - y} - p_n(y), 1\right)_y \\ &= \left(\frac{xp_n(x) - yp_n(y)}{x - y}, 1\right)_y = \lambda_n a_{n+1} + \beta_n a_n + \lambda_{n-1} a_{n-1}. \end{aligned}$$

Ponieważ ciąg a_n spełnia równanie (3.1) i spełnia te same warunki początkowe co ciąg $q_n(x)$, to $a_n = q_n(x)$. $\square$

Zapiszmy równanie (3.1) w następującej postaci.

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} & \frac{x-\beta_n}{\lambda_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix}, \qquad n \geqslant 1.$$

Jeśli inny ciąg $\{b_n\}_{n=0}^\infty$ spełnia (3.1), to

$$\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} & \frac{x-\beta_n}{\lambda_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} \\ a_n & b_n, \end{pmatrix}, \qquad n \geqslant 1.$$

Obliczmy wyznaczniki obu stron ostatniej równości. Wtedy

$$a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n = \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}(a_{n-1}b_n - a_n b_{n-1}).$$

Zatem

$$a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n = \frac{\lambda_0}{\lambda_n}(a_0 b_1 - a_1 b_0). \tag{3.4}$$

Uwaga 3.1.

Wyrażenie

$$W(a_n, b_n) = \begin{vmatrix} a_n & b_n \\ a_{n+1} - a_n & b_{n+1} - b_n \end{vmatrix} \tag{3.5}$$

nazywamy, poprzez analogię z równaniami różniczkowymi drugiego rzędu, dyskretnym wronskianem rozwiązań $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ i $\{b_n\}_{n=0}^\infty$. Zatem

$$W(a_n, b_n) = \frac{\lambda_0}{\lambda_n} W(a_0, b_0).$$

Stosując wzór (3.4) do ciągów $a_n = p_n(x)$ oraz $b_n = q_n(x)$ otrzymujemy

Wzór (3.6)**.**

$$p_n(x) q_{n+1}(x) - p_{n+1}(x) q_n(x) = \frac{1}{\lambda_n}. \tag{3.6}$$

Rozważmy rozwiązania $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ i $\{b_n\}_{n=0}^\infty$ równania (3.1) odpowiadające liczbom x i y, odpowiednio. Dla $n > m \geqslant 0$ mamy

$$(x-y) \sum_{k=m+1}^{n} a_k b_k = \sum_{m+1}^{n} (x a_k) b_k - \sum_{k=m+1}^{n} a_k (y b_k)$$

$$= \sum_{k=m+1}^{n} (\lambda_k a_{k+1} b_k + \beta_k a_k b_k + \lambda_{k-1} a_{k-1} b_k) - \sum_{k=m+1}^{n} (\lambda_k a_k b_{k+1} + \beta_k a_k b_k + \lambda_{k-1} a_k b_{k-1})$$

$$= \lambda_n a_{n+1} b_n + \lambda_m a_m b_{m+1} - \lambda_n a_n b_{n+1} - \lambda_m a_{m+1} b_m.$$

Wyprowadziliśmy zatem wzór

$$(x-y)\sum_{k=m+1}^{n} a_k b_k = \lambda_m W(a_m, b_m) - \lambda_n W(a_n, b_n). \tag{3.7}$$

Zastosujemy (3.7) dla $a_n = p_n(x)$, $b_n = p_n(y)$ oraz $m = 0$. Najpierw zauważamy, że

$$\lambda_0[p_0(x)p_1(y) - p_1(x)p_0(y)] = y - x = -(x-y)p_0(x)p_0(y).$$

Otrzymujemy wzór Christoffela-Darboux.

Wzór Christoffela-Darboux.

$$\sum_{k=0}^{n} p_k(x)p_k(y) = \lambda_n \frac{p_{n+1}(x)p_n(y) - p_n(x)p_{n+1}(y)}{x-y}, \quad x \neq y. \tag{3.8}$$

Podobnie stosując wzór (3.7) dla pary $a_n = p_n(x)$, $b_n = q_n(y)$, lub $a_n = q_n(x)$, $b_n = q_n(y)$ otrzymamy trzy kolejne wzory.

$$(x-y)\sum_{k=0}^{n} p_k(x)q_k(y) = 1 + \lambda_n[p_{n+1}(x)q_n(y) - p_n(x)q_{n+1}(y)], \tag{3.9}$$

$$(x-y)\sum_{k=0}^{n} q_k(x)p_k(y) = -1 + \lambda_n[q_{n+1}(x)p_n(y) - q_n(x)p_{n+1}(y)], \tag{3.10}$$

$$(x-y)\sum_{k=0}^{n} q_k(x)q_k(y) = \lambda_n[q_{n+1}(x)q_n(y) - q_n(x)q_{n+1}(y)]. \tag{3.11}$$

Wzór (3.10) można otrzymać z (3.9) przez zamianę x z y.

Przejście do granicy przy $y \to x$ we wzorze Christoffela-Darboux daje

Wzór (3.12)**.**

$$\sum_{k=0}^{n} p_k^2(x) = \lambda_n\{p_n(x)p'_{n+1}(x) - p'_n(x)p_{n+1}(x)\}. \tag{3.12}$$

Funkcja $K_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n} p_k(x)p_k(y)$ jest jądrem reprodukującym wielomiany stopnia niewiększego od n, tzn.

$$(p(y), K_n(x,y))_y = p(x), \qquad p \in \mathbb{P},\ \deg p \leqslant n.$$

Równość ta dla $p(x) = p_k(x)$, $k \leqslant n$, wynika z ortogonalności. Dalej wystarczy skorzystać z faktu, że każdy wielomian stopnia co najwyżej n jest kombinacją liniową wielomianów $p_0, p_1, \ldots, p_n$. Jądro $K_n(x,y)$ można przedstawić w postaci wyznacznika.

$$K_n(x,y) = -\frac{1}{\Delta_n}\begin{vmatrix} 0 & 1 & x & \cdots & x^n \\ 1 & m_0 & m_1 & \cdots & m_n \\ y & m_1 & m_2 & \cdots & m_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y^n & m_n & m_{n+1} & \cdots & m_{2n} \end{vmatrix}.$$

Wyprowadzimy jeszcze jeden wzór, który będzie przydatny w dalszej części. W (3.1) podstawmy $m = 0$, $x = z$, $y = \overline{z}$ oraz

$$\begin{aligned} a_n &= wp_n(z) + q_n(z), \\ b_n &= \overline{a_n}, \end{aligned}$$

gdzie z i w są ustalonymi liczbami zespolonymi.

$$\sum_{k=0}^{n} |wp_k(z) + q_k(z)|^2 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k = |a_0|^2 + \lambda_n \frac{\operatorname{Im}(a_{n+1}b_n)}{\operatorname{Im} z} - \lambda_0 \frac{\operatorname{Im}(a_1 b_0)}{\operatorname{Im} z}$$

Mamy $|a_0|^2 = |w|^2$. Ponadto

$$\begin{aligned} \lambda_0 \frac{\operatorname{Im}(a_1 b_0)}{\operatorname{Im} z} = \frac{\operatorname{Im}\{\lambda_0 \overline{w}[wp_1(z) + q_1(z)]\}}{\operatorname{Im} z} &= \frac{\operatorname{Im}\{|w|^2(z - \beta_0) + \overline{w}\}}{\operatorname{Im} z} \\ &= \frac{|w|^2 \operatorname{Im} z - \operatorname{Im} w}{\operatorname{Im} z} = |w|^2 - \frac{\operatorname{Im} w}{\operatorname{Im} z}. \end{aligned}$$

Ostatecznie otrzymujemy

Wzór (3.13)**.**

$$\sum_{k=0}^{n} |wp_k(z) + q_k(z)|^2 - \frac{\operatorname{Im} w}{\operatorname{Im} z} = \frac{\lambda_n}{\operatorname{Im} z} |wp_n(z) + q_n(z)|^2 \operatorname{Im} \frac{wp_{n+1}(z) + q_{n+1}(z)}{wp_n(z) + q_n(z)}. \quad (3.13)$$

4 Zera wielomianów ortogonalnych

Lemat 4.1. *Każdy wielomian $p(x)$ nieujemny na $\mathbb{R}$ ma postać $p(x) = A^2(x)+B^2(x)$, dla pewnych wielomianów $A(x)$ i $B(x)$ o współczynnikach rzeczywistych.*

Dowód. Z założenia wynika, że wielomian $p(x)$ ma postać

$$p(x) = c\prod_{i=1}^{n}(x-r_i)(x-\overline{r_i}), \quad \text{gdzie } c \geqslant 0.$$

Niech

$$h(x) = \sqrt{c}\prod_{i=1}^{n}(x-r_i).$$

Wtedy $p(x) = A^2(x) + B^2(x)$ dla $A(x) = \operatorname{Re} h(x)$ i $B(x) = \operatorname{Im} h(x)$. □

Lemat 4.2. *Każdy wielomian $p(x)$ nieujemny na $[0, +\infty)$ ma postać $p(x) = A^2(x)+B^2(x)+xC^2(x)+xD^2(x)$ dla pewnych wielomianów $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ i $D(x)$ o współczynnikach rzeczywistych.*

Dowód. Jeśli wielomian $p(x)$ nie ma ujemnych pierwiastków o krotności nieparzystej, to $p(x)$ jest nieujemny na całej prostej, więc ma żądaną postać z poprzedniego lematu.

Niech $-r_1, -r_2, \ldots, -r_n$ oznaczają ujemne pierwiastki o krotności nieparzystej. Wtedy $p(x)$ ma postać

$$p(x) = q(x)\prod_{j=1}^{n}(x+r_j), \tag{4.1}$$

gdzie $q(x)$ jest nieujemny na całej prostej. Z poprzedniego lematu $q(x)$ ma postać

$$q(x) = A^2(x) + B^2(x), \tag{4.2}$$

dla pewnych rzeczywistych wielomianów $A(x)$ i $B(x)$. Dla $x \geqslant 0$ mamy

$$\prod_{j=1}^{n}(x+r_j) = \prod_{j=1}^{n}(\sqrt{x}+i\sqrt{r_j})\prod_{j=1}^{n}(\sqrt{x}-i\sqrt{r_j}).$$

Zauważmy, że dla pewnych wielomianów rzeczywistych $C(x)$ i $D(x)$ mamy

$$g(x) = \prod_{j=1}^{n}(\sqrt{x}+i\sqrt{r_j}) = \begin{cases} C(x) + i\sqrt{x}D(x) & \text{dla parzystych } n \\ \sqrt{x}D(x) + iC(x) & \text{dla nieparzystych } n. \end{cases}$$

Zatem

$$\prod_{j=1}^{n}(x+r_j) = C^2(x) + xD^2(x). \tag{4.3}$$

Korzystając z (4.1), (4.2) i (4.3) otrzymujemy tezę lematu. □

Wniosek 4.3. *Niech $r(x)$ będzie niezerowym wielomianem nieujemnym na prostej. Wtedy $(r,1) > 0$*

Dowód. Z Lematu 4.1 wielomian $r(x)$ ma postać $r(x) = A^2(x) + B^2(x)$. Zatem korzystając z (2.3) i z faktu, że $A(x)$ i $B(x)$ są rzeczywiste otrzymujemy

$$(r,1) = (A^2 + B^2, 1) = (A,A) + (B,B) > 0.$$

□

Wniosek 4.4. *Załóżmy, że $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ jest ciągiem momentów Stieltjesa. Niech $r(x)$ będzie niezerowym wielomianem nieujemnym na półprostej $[0,+\infty)$. Wtedy $(r,1) > 0$.*

Dowód. Niech $(\cdot,\cdot)_1$ oznacza iloczyn skalarny związany z ciągiem momentów $\{m_{n+1}\}_{n=0}^{\infty}$. Mamy

$$(xp,q) = (p,q)_1.$$

Z Lematu 4.2 wielomian $r(x)$ ma postać

$$r(x) = A^2(x) + B^2(x) + xC^2(x) + xD^2(x).$$

Wtedy korzystając z (2.3) otrzymujemy

$$\begin{aligned}(r,1) &= (A,A) + (B,B) + (xC,C) + (xD,D)\\ &= (A,A) + (B,B) + (C,C)_1 + (D,D)_1 > 0.\end{aligned}$$

□

Wielomiany postaci

$$p_n(x,\tau) = p_n(x) - \tau p_{n-1}(x), \text{ gdzie } \tau \in \mathbb{R}$$

będziemy nazywali wielomianami quasiortogonalnymi. Wielomian $p_n(x,\tau)$ jest ortogonalny do wielomianów stopnia niższego niż $n-1$.

Twierdzenie 4.5.

(i) Wielomian $p_n(x,\tau)$ posiada n różnych rzeczywistych pierwiastków.

(ii) Załóżmy, że $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ jest ciągiem momentów Stieltjesa. Wtedy wszystkie pierwiastki wielomianu $p_n(x)$ są dodatnie.

(iii) Pierwiastki wielomianów $p_n(x)$ i $p_{n+1}(x)$ leżą na przemian, tzn. pomiędzy dwoma pierwiastkami wielomianu $p_{n+1}(x)$ leży dokładnie jeden pierwiastek wielomianu $p_n(x)$.

(iv) Wielomian $q_n(x)$ posiada $n-1$ różnych rzeczywistych pierwiastków, które leżą na przemian z pierwiastkami wielomianu $p_n(x)$.

Dowód. (i) Załóżmy, że wielomian $p_n(x,\tau)$ zmienia znak w punktach $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$. Liczba m nie może przekroczyć n. Wtedy wielomian

$$r(x) = p_n(x,\tau)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_m)$$

ma stały znak. Ponieważ współczynnik przy najwyższej potędze wielomianu $r(x)$ jest dodatni, to $r(x)$ przyjmuje wartości nieujemne. Z Wniosku 4.3 mamy

$$(p_n(x,\tau),(x-x_1)\ldots(x-x_m)) = (r(x),1) > 0.$$

Ponieważ wielomian $p_n(x,\tau)$ jest ortogonalny do wielomianów stopnia niższego niż $n-1$, to $m \geqslant n-1$. To oznacza, że $p_n(x,\tau)$ posiada przynajmniej $n-1$ pierwiastków rzeczywistych. Z własności $\deg p_n(x,\tau) = n$ wynika, że takich pierwiastków jest n.

(ii) Dowód tej części jest podobny do dowodu (i), przy czym wybieramy tylko dodatnie liczby $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$, i korzystamy z Wniosku 4.4.

(iii) Rozważmy dwa kolejne pierwiastki x_1 i x_2 wielomianu p_{n+1}. Wtedy liczby $p'_{n+1}(x_1)$ oraz $p'_{n+1}(x_2)$ mają przeciwne znaki. Ze wzoru (3.12) wynika, że

$$\lambda_n p_n(x_i)p'_{n+1}(x_i) = \sum_{k=0}^{n} p_n^2(x_i) > 0, \quad i = 1,2.$$

Zatem liczby $p_n(x_1)$ i $p_n(x_2)$ mają przeciwne znaki. W związku z tym wielomian p_n ma pierwiastek w przedziale (x_1, x_2).

(iv) Rozważmy znowu dwa kolejne pierwiastki x_1 i x_2 wielomianu p_{n+1}. Z (iii) wynika, że wielomian p_n ma dokładnie jeden pierwiastek w przedziale (x_1, x_2). Zatem $p_n(x_1)p_n(x_2) < 0$. Ze wzoru (3.6) wynika, że

$$p_n(x_i)q_{n+1}(x_i) = \frac{1}{\lambda_n} > 0, \quad i = 1, 2.$$

Stąd $q_{n+1}(x_1)q_{n+1}(x_2) < 0$ i w konsekwencji wielomian q_{n+1} musi mieć pierwiastek w przedziale (x_1, x_2). □

5 Konstrukcja rozwiązania problemu momentów i mechaniczna kwadratura Gaussa

Dla ustalonej liczby rzeczywistej τ rozważamy wielomiany

$$p_n(x,\tau)(x) = p_n(x) - \tau p_{n-1}(x),$$
$$q_n(x,\tau)(x) = q_n(x) - \tau q_{n-1}(x).$$

Niech $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ oznaczają kolejne pierwiastki wielomianu $p_n(x,\tau)$. Liczby x_i zależą również od n i τ, tzn. $x_i = x_i^{(n)}(\tau)$. Dowolny wielomian $r(x)$ stopnia co najwyżej $2n-2$ możemy przedstawić w postaci

$$r(x) = r_1(x)p_n(x,\tau) + r_2(x),$$

dla pewnych wielomianów r_1, r_2 takich, że $\deg r_1 \leqslant n-2$ i $\deg r_2 \leqslant n-1$. Ze wzoru interpolacyjnego Lagrange'a otrzymujemy

$$r_2(x) = \sum_{i=1}^{n} r_2(x_i)\frac{p_n(x,\tau)}{p_n'(x_i,\tau)(x-x_i)} = \sum_{i=1}^{n} r(x_i)\frac{p_n(x,\tau)}{p_n'(x_i,\tau)(x-x_i)}.$$

Z ortogonalności $p_n(x,\tau)$ i $r_1(x)$ wynika

$$(r,1) = (r_2,1) = \sum_{i=1}^{n} \frac{r(x_i)}{p_n'(x_i,\tau)}\left(\frac{p_n(x,\tau)}{x-x_i}, 1\right).$$

Ze wzoru (3.3) mamy

$$\left(\frac{p_n(x,\tau)}{x-x_i}, 1\right) = \left(\frac{p_n(x,\tau) - p_n(x_i,\tau)}{x-x_i}, 1\right) = q_n(x_i,\tau).$$

Reasumując otrzymaliśmy

Wzór (kwadratura Gaussa). *Dla dowolnego wielomianu $r(x)$ stopnia co najwyżej $2n-2$ zachodzi wzór*

$$(r,1)=\sum_{i=1}^{n}\frac{q_n(x_i,\tau)}{p_n'(x_i,\tau)}r(x_i). \tag{5.1}$$

Uwaga 5.1.

Dla $\tau=0$ mamy $p_n(x,\tau)=p_n(x)$ i $q_n(x,\tau)=q_n(x)$. W tym przypadku wzór (5.1) jest spełniony dla $\deg r\leqslant 2n-1$.

Wprowadzamy oznaczenie

$$\mu_i=\mu_i^{(n)}(\tau)=\frac{q_n(x_i,\tau)}{p_n'(x_i,\tau)}. \tag{5.2}$$

We wzorze (5.1) podstawmy $r(x)\equiv 1$. Wtedy

$$\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_n=1. \tag{5.3}$$

Pomnóżmy licznik i mianownik we wzorze (5.2). Wtedy z własności $p_n(x_i)-\tau p_{n-1}(x_i)=0$ można wyprowadzić wzór

$$\mu_i=\frac{p_{n-1}(x_i)q_n(x_i)-p_n(x_i)q_{n-1}(x_i)}{p_{n-1}(x_i)p_n'(x_i)-p_n(x_i)p_{n-1}'(x_i)}.$$

Następnie korzystając z (3.6) i (3.12) otrzymujemy

$$\mu_i=\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n-1}p_k^2(x_i)}>0. \tag{5.4}$$

Uwaga 5.2.

Wzór (5.4) nie oznacza, że μ_i nie zależy od parametru τ, ponieważ zależność od τ jest ukryta w $x_i=x_i^{(n)}(\tau)$.

Podstawienie we wzorze (5.1) wielomianu

$$r(x)=\left[\frac{p_n(x,\tau)}{p_n'(x_i,\tau)(x-x_i)}\right]^2$$

daje jeszcze jedno przedstawienie liczb μ_i.

$$\mu_i=\left(\frac{p_n(x,\tau)}{p_n'(x_i,\tau)(x-x_i)},\frac{p_n(x,\tau)}{p_n'(x_i,\tau)(x-x_i)}\right)>0. \tag{5.5}$$

Uwaga 5.3.

Na podstawie (5.3) i (5.4) kwadratura Gaussa oznacza, że wielkość $(r,1)$ jest całką wielomianu $r(x)$ względem miary probabilistycznej skupionej w punktach $x_1,\ldots,x_n$. Korzystając z dodatniości mas μ_i można udowodnić też, że zera wielomianów $p_n(x,\tau)$ i $q_n(x,\tau)$ są położone naprzemiennie.

Niech $\sigma_n = \sigma_n(\tau)$ oznacza miarę

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \delta_{x_i}. \tag{5.6}$$

Ze wzoru (5.1) wynika, że

$$m_k = (x^k, 1) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \, d\sigma_n(x), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, 2n-2. \tag{5.7}$$

To oznacza, że σ_n jest niepełnym rozwiązaniem problemu momentów, bo tylko pierwsze $2n-2$ momenty są równe odpowiednim liczbom ciągu m_n.

Twierdzenie 5.4 (Hamburger)**.** *Liczby $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ są ciągiem momentów miary o nośniku nieskończonym na prostej wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ jest dodatnio określony.*

Dowód. Konieczność warunku została udowodniona w Przykładzie 2.4. Dla dowodu dostateczności rozważmy ciąg miar σ_n przy ustalonej wartości τ, na przykład $\tau = 0$. Dystrybuanty miar σ_n

$$F_n(x) = \int_{-\infty}^{x} d\sigma_n(y),$$

są funkcjami niemalejącymi na prostej, przyjmującymi wartości w przedziale $[0,1]$. Na podstawie Pierwszego Twierdzenia Helly'ego o wyborze ciąg $F_n(x)$ posiada podciąg $F_{n_i}(x)$, zbieżny w każdym punkcie do pewnej funkcji niemalejącej $F(x)$. Pokażemy, że $F(x)$ wyznacza miarę rozwiązującą problem momentów. W dowodzie skorzystamy również z Drugiego Twierdzenia Helly'ego stanowiącego, że dla funkcji ciągłej $f(x)$ zachodzi

$$\int_a^b f(x)\, dF_{n_i}(x) \xrightarrow[i\to\infty]{} \int_a^b f(x)\, dF(x).$$

Niech $n_i > l + 2$. Na podstawie (5.7) dostajemy

$$m_l = \int_{-\infty}^{\infty} x^l \, dF_{n_i}(x) = \int_{-A}^{A} x^l \, dF_{n_i}(x) + \int_{|x|>A} x^l \, dF_{n_i}(x).$$

dla liczby A takiej, że $-A$ i A są punktami ciągłości dla wszystkich dystrybuant F_n i dla F. Oszacujemy drugą całkę korzystając znowu z (5.7).

$$\int_{|x|>A} x^l \, dF_{n_i}(x) = A^l \int_{|x|>A} \frac{|x|^l}{A^l} \, dF_{n_i}(x) \leqslant A^l \int_{|x|>A} \frac{x^{2l+2}}{A^{2l+2}} \, dF_{n_i}(x)$$
$$\leqslant A^{-l-2} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2l+2} \, dF_{n_i}(x) = A^{-l-2} m_{2l+2}.$$

Zatem

$$\left| \int_{-A}^{A} x^l \, dF(x) - m_l \right| = \lim_{i \to \infty} \left| \int_{-A}^{A} x^l \, dF_{n_i}(x) - m_l \right| \leqslant A^{-l-2} m_{2l+2}. \tag{5.8}$$

Dla $l = 2r$ ostatnia nierówność oznacza, że całka $\int_{-\infty}^{\infty} x^{2r} \, dF(x)$ jest zbieżna. Wtedy z nierówności

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2r-1} \, dF(x) \leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2r} \, dF(x) \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2r-2} \, dF(x) \right)^{1/2}$$

otrzymujemy zbieżność całki $\int_{-\infty}^{\infty} x^{2r-1} \, dF(x)$. Przechodzimy z A do nieskończoności w (5.8) i otrzymujemy

$$m_l = \int_{-\infty}^{\infty} x^l \, dF(x).$$

□

Twierdzenie 5.5 (Stieltjes)**.** *Liczby* $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ *są ciągiem momentów miary o nośniku nieskończonym na półprostej* $[0, +\infty)$ *wtedy i tylko wtedy, gdy ciągi* $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ *oraz* $\{m_{n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ *są dodatnio określone.*

Dowód. Konieczność warunków została wykazana w Przykładzie 2.5. Rozważamy ciąg σ_n miar przy wartości $\tau = 0$. Z Twierdzenia 4.5(ii) wynika, że miary σ_n są skupione na półprostej $(0, +\infty)$. To oznacza, że ich dystrybuanty F_n zerują się dla $x < 0$. Z dowodu poprzedniego twierdzenia wiemy, że rozwiązanie problemu momentów można uzyskać przez wzięcie granicy podciągu ciągu F_n. Ale każda dystrybuanta będąca granicą podciągu zbieżnego ciągu F_n również zeruje się dla $x < 0$. Zatem rozwiązanie problemu momentów jest miarą skupioną na $[0, +\infty)$. □

6 Narzędzia do badania jednoznaczności

Dla wartości parametru $\tau \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ i $z \in \mathbb{C}$ wprowadzamy oznaczenie

$$w_n(z, \tau) = -\frac{q_n(z) - \tau q_{n-1}(z)}{p_n(z) - \tau p_{n-1}(z)} = -\frac{q_n(z, \tau)}{p_n(z, \tau)}. \tag{6.1}$$

Dla $z \notin \mathbb{R}$ liczba $w_n(z, \tau)$ jest dobrze określona na podstawie Twierdzenia 4.5(i). Zauważamy, że

$$w_n(z, \infty) = w_{n-1}(z, 0).$$

Twierdzenie 6.1 (Hellinger)**.** *Ustalmy liczbę $z \in \mathbb{C}$ o własności $\operatorname{Im} z > 0$ (lub $\operatorname{Im} z < 0$). Zbiór wartości $w = w_n(z, \tau)$, dla $\tau \in \mathbb{R}^*$, tworzy okrąg $\partial K_n(z)$ położony w półpłaszczyźnie $\operatorname{Im} w > 0$ (lub $\operatorname{Im} w < 0$). Środek s i promień r okręgu $\partial K_n(z)$ wyrażone są wzorami*

$$\begin{aligned} s &= -\frac{q_n(z)\overline{p_{n-1}(z)} - q_{n-1}(z)\overline{p_n(z)}}{p_n(z)\overline{p_{n-1}(z)} - p_{n-1}(z)\overline{p_n(z)}}, \\ r &= \frac{1}{2|\operatorname{Im} z| \sum\limits_{i=0}^{n-1} |p_i(z)|^2}. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Równanie okręgu ma postać

$$\sum_{i=0}^{n-1} |w p_i(z) + q_i(z)|^2 = \frac{\operatorname{Im} w}{\operatorname{Im} z}. \tag{6.3}$$

Dowód. Podstawiamy

$$a = q_{n-1}(z), \;\; b = q_n(z), \;\; c = p_{n-1}(z), \;\; d = p_n(z)$$

i korzystamy ze wzoru

$$\frac{a\tau - b}{c\tau - d} = \frac{a\overline{d} - b\overline{c}}{c\overline{d} - \overline{c}d} + \frac{bc - ad}{c\overline{d} - \overline{c}d}\,\frac{\overline{c}\tau - \overline{d}}{c\tau - d}.$$

Stąd od razy odczytujemy wzór na s. Ponadto ze wzorów (3.6) i (3.8) zastosowanych dla $x = z,\ y = \overline{z}$ oraz $n := n - 1$ wynika, że

$$r = \left|\frac{bc - ad}{c\overline{d} - \overline{c}d}\right| = \left|\frac{p_{n-1}(z)q_n(z) - p_n(z)q_{n-1}(z)}{p_{n-1}(z)\overline{p_n(z)} - \overline{p_{n-1}(z)}p_n(z)}\right| = \frac{1}{2|\operatorname{Im} z|\sum\limits_{i=0}^{n-1}|p_i(z)|^2}.$$

Ze wzoru (6.1) obliczamy τ

$$\tau = \frac{w_n(z,\tau)p_n(z) + q_n(z)}{w_n(z,\tau)p_{n-1}(z) + q_{n-1}(z)}$$

i korzystamy ze wzoru (3.13) dla $w = w_n(z,\tau)$. Uwzględniając, że τ jest liczbą rzeczywistą otrzymujemy (6.3). $\square$

Uwaga 6.2.

Z Twierdzenia 6.1 wynika, że wnętrze koła $K_n(z)$ opisane jest nierównością

$$\sum_{i=0}^{n-1}|wp_i(z) + q_i(z)|^2 \leqslant \frac{\operatorname{Im} w}{\operatorname{Im} z}. \tag{6.4}$$

Stąd natychmiast wnioskujemy, że $K_n(z) \subset K_{n-1}(z)$. Ponadto okręgi $\partial K_n(z)$ i $\partial K_{n-1}(z)$ stykają się w jednym punkcie, bo jak wcześniej zauważyliśmy $w_n(z,\infty) = w_{n-1}(z,0)$.

Dla ustalonej liczby z, $\operatorname{Im} z \neq 0$, rozważamy zstępujący ciąg kół $\{K_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$. Zbiór $K_\infty(z) = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n(z)$ jest kołem lub zbiorem jednopuktowym. Jeśli $w \in K_\infty(z)$, to w spełnia (6.4) dla każdej liczby n. Zatem

$$\sum_{n=0}^{\infty}|wp_n(z) + q_n(z)|^2 \leqslant \frac{\operatorname{Im} w}{\operatorname{Im} z} < +\infty. \tag{6.5}$$

Z Twierdzenia Hellingera promień $K_\infty(z)$ wynosi

$$\frac{1}{2|\operatorname{Im} z|\sum\limits_{n=0}^{\infty}|p_n(z)|^2},$$

przy czym $K_\infty(z)$ jest kołem, gdy szereg w mianowniku jest zbieżny.

Twierdzenie 6.3.

(i) Dla $z \notin \mathbb{R}$ istnieje przynajmniej jedno niezerowe rozwiązanie $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ równania różnicowego

$$\lambda_n y_{n+1} + \beta_n y_n + \lambda_{n-1} y_{n-1} = z y_n, \quad n \geqslant 1$$

takie, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} |y_n|^2$ jest zbieżny.

(ii) Każde rozwiązanie tego równania jest sumowalne z kwadratem wtedy i tylko wtedy, gdy $K_\infty(z)$ jest kołem.

Dowód. (i). Niech $w \in K_\infty(z)$ oraz $y_n = wp_n(z) + q_n(z)$. Wtedy z (6.5) ciąg $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ jest sumowalny z kwadratem.

(ii). Jeśli każde rozwiązanie jest sumowalne z kwadratem, to również $\sum_{n=0}^{\infty} |p_n(z)|^2 < +\infty$. Zatem promień zbioru $K_\infty(z)$ jest dodatni, czyli $K_\infty(z)$ jest kołem. Aby udowodnić implikację przeciwną, załóżmy, że $K_\infty(z)$ jest kołem. Zatem $\sum_{n=0}^{\infty} |p_n(z)|^2 < +\infty$. Z dowodu (i) wynika, że $\sum_{n=0}^{\infty} |wp_n(z) + q_n(z)|^2 < +\infty$ dla pewnej liczby w. Stąd również szereg $\sum_{n=0}^{\infty} |q_n(z)|^2$ jest sumowalny. Każde rozwiązanie równania jest kombinacją liniową ciągów $\{p_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ i $\{q_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$, zatem każde rozwiązanie jest sumowalne z kwadratem. □

Uwaga 6.4.

Rozważmy miarę probabilistyczną σ na prostej, o wszystkich momentach skończonych. Obliczymy współczynniki Fouriera funkcji $(x-z)^{-1}$ względem układu ortonormalnego wielomianów $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$. Dla $z \notin \mathbb{R}$ niech

$$w = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(x)}{x-z}.$$

Wtedy ze wzoru (3.3) wynika, że

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_n(x)}{x-z}\, d\sigma(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_n(x) - p_n(z)}{x-z}\, d\sigma(x) + wp_n(z) = wp_n(z) + q_n(z).$$

Z nierówności Bessela otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} |wp_n(z) + q_n(z)|^2 &\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(x)}{|x-z|^2} \\ &= \frac{1}{2\mathrm{Im}\, z} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{x-z} - \frac{1}{x-\overline{z}} \right) d\sigma(x) = \frac{\mathrm{Im}\, w}{\mathrm{Im}\, z}. \end{aligned} \qquad (6.6)$$

Wprowadzamy cztery wielomiany

$$A_n(z,z_0) = (z-z_0)\sum_{i=0}^{n-1} q_i(z_0)q_i(z), \tag{6.7}$$

$$B_n(z,z_0) = -1 + (z-z_0)\sum_{i=0}^{n-1} q_i(z_0)p_i(z), \tag{6.8}$$

$$C_n(z,z_0) = 1 + (z-z_0)\sum_{i=0}^{n-1} p_i(z_0)q_i(z), \tag{6.9}$$

$$D_n(z,z_0) = (z-z_0)\sum_{i=0}^{n-1} p_i(z_0)p_i(z). \tag{6.10}$$

Ze wzorów (3.8), (3.9), (3.10) i (3.11) otrzymujemy

$$A_n(z,z_0) = \lambda_{n-1}[q_{n-1}(z_0)q_n(z) - q_n(z_0)q_{n-1}(z)], \tag{6.11}$$

$$B_n(z,z_0) = \lambda_{n-1}[q_{n-1}(z_0)p_n(z) - q_n(z_0)p_{n-1}(z)], \tag{6.12}$$

$$C_n(z,z_0) = \lambda_{n-1}[p_{n-1}(z_0)q_n(z) - p_n(z_0)q_{n-1}(z)], \tag{6.13}$$

$$D_n(z,z_0) = \lambda_{n-1}[p_{n-1}(z_0)p_n(z) - p_n(z_0)p_{n-1}(z)]. \tag{6.14}$$

Wzory te można łącznie zapisać w postaci

$$\begin{pmatrix} A_n(z,z_0) & B_n(z,z_0) \\ C_n(z,z_0) & D_n(z,z_0) \end{pmatrix} = \lambda_{n-1}\begin{pmatrix} q_{n-1}(z_0) & -q_n(z_0) \\ p_{n-1}(z_0) & -p_n(z_0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_n(z) & p_n(z) \\ q_{n-1}(z) & p_{n-1}(z) \end{pmatrix}. \tag{6.15}$$

Obliczamy wyznacznik obu stron i korzystamy z (3.6). Wtedy

$$A_n(z,z_0)D_n(z,z_0) - B_n(z,z_0)C_n(z,z_0) = 1. \tag{6.16}$$

Ponadto otrzymujemy

$$\begin{pmatrix} q_n(z) & p_n(z) \\ q_{n-1}(z) & p_{n-1}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p_n(z_0) & q_n(z_0) \\ -p_{n-1}(z_0) & q_{n-1}(z_0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_n(z,z_0) & B_n(z,z_0) \\ C_n(z,z_0) & D_n(z,z_0) \end{pmatrix}. \tag{6.17}$$

Zestawienie wzorów (6.15) oraz (6.17) daje

$$\begin{pmatrix} A_n(z,w) & B_n(z,w) \\ C_n(z,w) & D_n(z,w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_n(w,z_0) & -A_n(w,z_0) \\ D_n(w,z_0) & -B_n(w,z_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n(z,z_0) & B_n(z,z_0) \\ C_n(z,z_0) & D_n(z,z_0) \end{pmatrix} \tag{6.18}$$

Twierdzenie 6.5 (Hellinger-Nevanlinna)**.** *Jeśli $K_\infty(z)$ jest kołem dla jednej wartości $z \notin \mathbb{R}$, to również dla każdej wartości $z \notin \mathbb{R}$. W tym przypadku szereg $\sum_{n=0}^{\infty} |p_n(z)|^2$ jest zbieżny jednostajnie na zwartych podzbiorach płaszczyzny zespolonej.*

Przed dowodem twierdzenia wyprowadzimy kilka pomocniczych faktów.

Lemat 6.6.

$$\begin{pmatrix} A_{n+1}(z,z_0) & B_{n+1}(z,z_0) \\ C_{n+1}(z,z_0) & D_{n+1}(z,z_0) \end{pmatrix} = \Bigg[I + (z-z_0) \times \begin{pmatrix} -p_n(z_0)q_n(z_0) & q_n^2(z_0) \\ -p_n^2(z_0) & p_n(z_0)q_n(z_0) \end{pmatrix} \Bigg] \begin{pmatrix} A_n(z,z_0) & B_n(z,z_0) \\ C_n(z,z_0) & D_n(z,z_0) \end{pmatrix}. \tag{6.19}$$

Dowód. Ze wzorów (3.1) i (6.17) dla $n := n+1$ mamy

$$\begin{pmatrix} q_{n+1}(z) & p_{n+1}(z) \\ q_n(z) & p_n(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p_{n+1}(z_0) & q_{n+1}(z_0) \\ -p_n(z_0) & q_n(z_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{n+1}(z,z_0) & B_{n+1}(z,z_0) \\ C_{n+1}(z,z_0) & D_{n+1}(z,z_0) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{z_0-\beta_n}{\lambda_n} & -\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -p_n(z_0) & q_n(z_0) \\ -p_{n-1}(z_0) & q_{n-1}(z_0) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_{n+1}(z,z_0) & B_{n+1}(z,z_0) \\ C_{n+1}(z,z_0) & D_{n+1}(z,z_0) \end{pmatrix}. \tag{6.20}$$

Podobnie otrzymujemy

$$\begin{pmatrix} q_{n+1}(z) & p_{n+1}(z) \\ q_n(z) & p_n(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{z-\beta_n}{\lambda_n} & -\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_n(z) & p_n(z) \\ q_{n-1}(z) & p_{n-1}(z) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{z-\beta_n}{\lambda_n} & -\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -p_n(z_0) & q_n(z_0) \\ -p_{n-1}(z_0) & q_{n-1}(z_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n(z,z_0) & B_n(z,z_0) \\ C_n(z,z_0) & D_n(z,z_0) \end{pmatrix}. \tag{6.21}$$

Zestawiając (6.20) i (6.21) otrzymujemy tezę lematu. □

Lemat 6.7. *Załóżmy, że macierze* $T_n \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ *spełniają* $\sum_{n=1}^{\infty} \|T_n\| < +\infty$. *Niech*

$$S_n(z) = [I + (z - z_0)T_n] \cdot \ldots \cdot [I + (z - z_0)T_2][I + (z - z_0)T_1].$$

Wtedy istnieje granica $S_\infty(z) = \lim_{n\to\infty} S_n(z)$ *i przedstawia funkcję całkowitą spełniającą*

$$\|S_\infty(z)\| \leqslant c_\varepsilon \exp(\varepsilon|z|), \tag{6.22}$$

dla każdego $\varepsilon > 0$.

Dowód. Zauważmy, że

$$\|(I + B_n)\ldots(I + B_1)\| \leqslant \prod_{i=1}^{n}(1 + \|B_i\|) \leqslant \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \|B_i\|\right).$$

Podobnie otrzymujemy

$$\|(I + B_n)\ldots(I + B_1) - I\| \leqslant \prod_{i=1}^{n}(1 + \|B_i\|) - 1 \leqslant \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \|B_i\|\right) - 1.$$

Zatem

$$\|S_{n+k}(z) - S_n(z)\| \leqslant \left[\exp\left(|z| \sum_{i=n+1}^{\infty} \|T_i\|\right) - 1\right] \exp\left(|z| \sum_{i=1}^{\infty} \|T_i\|\right).$$

Z ostatniej nierówności wynika zbieżność ciągu $S_n(z)$. Ponadto

$$\|S_\infty(z)\| \leqslant \prod_{i=1}^{\infty}(1 + |z|\|T_i\|) \leqslant \prod_{i=1}^{n}(1 + |z|\|T_i\|) \exp\left(|z| \sum_{i=n+1}^{\infty} \|T_i\|\right).$$

Stąd otrzymujemy (6.22). □

Dowód Twierdzenia Hellingera-Nevanlinny. Załóżmy, że $K_\infty(z_0)$ jest kołem dla pewnej wartości $z_0 \in \mathbb{C}$. Z Lematów 6.6, 6.7 oraz z Twierdzenia Hellingera ciąg macierzy

$$\begin{pmatrix} A_n(z, z_0) & B_n(z, z_0) \\ C_n(z, z_0) & D_n(z, z_0) \end{pmatrix}$$

jest zbieżny jednostajnie na zwartych podzbiorach w $\mathbb{C}$. W szczególności, przy ustalonej wartości wyrazy macierzy są ciągami jednostajnie ograniczonymi na zwartych podzbiorach w $\mathbb{C}$. Ze wzoru (6.17) mamy

$$p_n(z) = -p_n(z_0)B_n(z, z_0) + q_n(z_0)D_n(z, z_0).$$

Zatem ciąg $\{p_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ jest sumowalny z kwadratem jednostajnie na zwartych podzbiorach w $\mathbb{C}$. $\square$

Dla $z_0 = 0$ będziemy stosować oznaczenie

$$A_n(z) = A_n(z, 0), \quad B_n(z) = B_n(z, 0) \tag{6.23}$$

$$C_n(z) = C_n(z, 0), \quad D_n(z) = D_n(z, 0). \tag{6.24}$$

Korzystając z (6.17) przekształcamy wzór na $w_n(z, \tau)$.

$$\begin{aligned} w_n(z, \tau) &= -\frac{q_n(z) - \tau q_{n-1}(z)}{p_n(z) - \tau p_{n-1}(z)} \\ &= -\frac{[q_n(0) - \tau q_{n-1}(0)]C_n(z) - [p_n(0) - \tau p_{n-1}(0)]A_n(z)}{[q_n(0) - \tau q_{n-1}(0)]D_n(z) - [p_n(0) - \tau p_{n-1}(0)]B_n(z)} \\ &= -\frac{A_n(z)t - C_n(z)}{B_n(z)t - D_n(z)}, \end{aligned} \tag{6.25}$$

gdzie

$$t = -\frac{p_n(0) - \tau p_{n-1}(0)}{q_n(0) - \tau q_{n-1}(0)}.$$

Wartość t jest dobrze określona, ponieważ wyznacznik współczynników jest niezerowy ze wzoru (3.6), w związku z czym licznik i mianownik nie mogą zerować się jednocześnie. W szczególności, jeśli $q_n(0) - \tau q_{n-1}(0) = 0$, to $t = \infty$.

Stąd przy ustalonej wartości $z \notin \mathbb{R}$ liczby

$$-\frac{A_n(z)t - C_n(z)}{B_n(z)t - D_n(z)}, \quad t \in \mathbb{R}^* \tag{6.26}$$

opisują okrąg $\partial K_n(z)$.

Rozważmy przypadek koła. Wtedy ciągi $A_n(z)$, $B_n(z)$, $C_n(z)$ i $D_n(z)$ są zbieżne do funkcji całkowitych $A(z)$, $B(z)$, $C(z)$ i $D(z)$. Ze wzoru (6.26) wnioskujemy, że liczby

$$-\frac{A(z)t - C(z)}{B(z)t - D(z)}, \quad t \in \mathbb{R}^* \tag{6.27}$$

opisują okrąg $\partial K_\infty(z)$.

Tabelę

$$\begin{pmatrix} A(z) & B(z) \\ C(z) & D(z) \end{pmatrix}$$

nazywamy macierzą Nevanlinny. Ze wzoru (6.16) otrzymujemy

$$A(z)D(z) - B(z)C(z) = 1. \tag{6.28}$$

Z Lematów 6.6, 6.7 wynika, że elementy macierzy Nevanlinny są funkcjami całkowitymi o wzroście podwykładniczym.

Twierdzenie 6.8. *W przypadku koła mamy*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |p_n(z)|^2 \leqslant c_\varepsilon \exp \varepsilon |z|,$$

dla każdego $\varepsilon > 0$.

Dowód. Na podstawie (6.27) liczby $A(z)/B(z)$ oraz $C(z)/D(z)$ leżą na okręgu $\partial K_\infty(z)$. Ich odległość nie przekracza promienia tego okręgu, czyli

$$\frac{1}{|B(z)D(z)|} = \left| \frac{A(z)}{B(z)} - \frac{C(z)}{D(z)} \right| \leqslant \frac{1}{2|\operatorname{Im} z| \sum\limits_{n=0}^{\infty} |p_n(z)|^2}$$

Po przekształceniu dostajemy

$$\sum_{n=0}^{\infty} |p_n(z)|^2 \leqslant \frac{1}{2|\operatorname{Im} z|} |B(z)D(z)|.$$

Wiemy, że $B(z)$ i $D(z)$ są funkcjami całkowitymi spełniającymi (6.22), stąd dla liczby $z = x + iy$ takiej, że $|y| > 1$ mamy

$$\sum_{n=0}^{\infty} |p_n(x+iy)|^2 \leqslant c_\varepsilon \exp \varepsilon |z|. \tag{6.29}$$

Ponieważ pierwiastki wielomianów p_n są liczbami rzeczywistymi, lewa strona nierówności rośnie wraz ze wzrostem $|y|$. Zatem dla $|y| < 1$ otrzymujemy

$$\sum_{n=0}^{\infty} |p_n(x+iy)|^2 \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |p_n(x+i)|^2 \leqslant c_\varepsilon \exp \varepsilon(|x|+1) \leqslant c_\varepsilon e^\varepsilon \exp \varepsilon |z|. \quad \square$$

Gdy $K_\infty(z)$ jest punktem dla $\operatorname{Im} z \neq 0$, czyli $K_\infty(z) = \{w(z)\}$, to $w = w(z)$ jest jedyną liczbą taką, że

$$\sum_{n=0}^{\infty} |wp_n(z) + q_n(z)|^2 < +\infty.$$

W ten sposób $w(z)$ określa funkcję dla $\operatorname{Im} z \neq 0$.

Twierdzenie 6.9 (o analityczności)**.** *W przypadku punktu funkcja $w(z)$ jest analityczna w każdej z półpłaszczyzn $\operatorname{Im} z > 0$ i $\operatorname{Im} z < 0$. Ponadto*

$$\frac{\operatorname{Im} w(z)}{\operatorname{Im} z} > 0. \tag{6.30}$$

Dowód. Własność (6.30) wynika z (6.5).Wiemy, że liczby $w_n(z,0) = -q_n(z)/p_n(z)$ leżą na okręgu $\partial K_n(z)$. Zatem $w_n(z,0) \to w(z)$, gdy $n \to \infty$. Funkcje $z \mapsto w_n(z,0)$ są analityczne dla $\operatorname{Im} z \neq 0$. W celu udowodnienia analityczności funkcji granicznej $z \mapsto w(z)$, wystarczy pokazać, że funkcje $w_n(z,0)$ tworzą rodzinę normalną, tzn. są wspólnie ograniczone na każdym zwartym podzbiorze zbioru $\operatorname{Im} z \neq 0$. Ten ostatni fakt wynika z następnego lematu, którego elementarny dowód pozostawiamy czytelnikowi. □

Lemat 6.10. *Dla liczb $x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \ldots < x_{n-1} < y_{n-1} < x_n$ zachodzi nierówność*

$$\left| \frac{(z-y_1)(z-y_2)\ldots(z-y_{n-1})}{(z-x_1)(z-x_2)\ldots(z-x_{n-1})(z-x_n)} \right| \leqslant \frac{1}{|\operatorname{Im} z|}.$$

Uwaga 6.11.

Twierdzenie o analityczności można też udowodnić korzystając z Twierdzenia 5.4. Niech σ będzie rozwiązaniem problemu momentów. Wtedy z Uwagi 6.4 mamy

$$w(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(x)}{x-z}.$$

Prawa strona przedstawia funkcję analityczną dla $\operatorname{Im} z \neq 0$.

7 Jednoznaczność problemu momentów Hamburgera i gęstość wielomianów

Twierdzenie 7.1. *Dla* $\operatorname{Im} z \neq 0$ *zbiór wartości*

$$w(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(x)}{x - z},$$

gdzie σ *jest miarą będącą rozwiązaniem problemu momentów dla ciągu* $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$*, pokrywa się ze zbiorem* $K_\infty(z)$*.*

Dowód. Niech σ będzie rozwiązaniem problemu momentów oraz $w = \int (x - z)^{-1} d\sigma(x)$. Z nierówności (6.6) otrzymujemy $w \in K_\infty(z)$.

Odwrotnie, załóżmy, że $w \in K_\infty(z)$. Wtedy w można zapisać w postaci $w = \theta w_1 + (1-\theta) w_2$, gdzie $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ oraz $w_1, w_2 \in \partial K_\infty(z)$. Jeśli znajdziemy dwa rozwiązania problemu momentów σ_1 i σ_2 odpowiadające liczbom w_1 i w_2, to miara $\theta\sigma_1 + (1-\theta)\sigma_2$ będzie rozwiązaniem problemu momentów odpowiadającym liczbie w. Zatem wystarczy rozpatrzyć przypadek $w \in \partial K_\infty(z)$. Ponieważ $K_\infty(z)$ jest przekrojem kół $K_n(z)$, to istnieją liczby $w_n \in \partial K_n(z)$ takie, że $w_n \to w$, gdy $n \to \infty$.

Lemat 7.2. *Miara* $\sigma_n = \sigma_n(\tau)$ *określona w (5.6) spełnia*

$$w_n(z, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_n(x)}{x - z}, \qquad \operatorname{Im} z \neq 0.$$

Dowód lematu. Zastosujmy wzór interpolacyjny Lagrange'a do wielomianu $q_n(z, \tau)$ względem zer wielomianu $p_n(z, \tau)$. Wtedy

$$w_n(z, \tau) = -\frac{q_n(z, \tau)}{p_n(z, \tau)} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{q_n(x_i, \tau)}{p_n'(x_i, \tau)(z - x_i)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_n(x)}{x - z}.$$

□

Liczby w_n należą do $\partial K_n(z)$, zatem są postaci $w_n = w_n(z, \tau_n)$ dla pewnych wartości $\tau_n \in \mathbb{R}^*$. Z lematu dostajemy

$$w_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_n(x)}{x - z},$$

gdzie $\sigma_n = \sigma_n(\tau_n)$. Z ciągu miar probabilistycznych σ_n wybieramy podciąg σ_{n_i} słabo zbieżny do pewnej miary σ. Z rozdziału 5 wiemy, że σ jest rozwiązaniem problemu momentów. Mamy

$$w_{n_i} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_{n_i}(x)}{x-z} = \int_{[-A,A]} \frac{d\sigma_{n_i}(x)}{x-z} + \int_{|x|>A} \frac{d\sigma_{n_i}(x)}{x-z}.$$

Dalej

$$\begin{aligned}\left|\int_{|x|>A} \frac{d\sigma_{n_i}(x)}{x-z}\right| &\leqslant \frac{1}{A}\int_{|x|>A} \left|\frac{x}{x-z}\right| d\sigma_{n_i}(x) \\ &\leqslant \frac{1}{A}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{x}{x-z}\right| \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma_{n_i}(x) \leqslant \frac{1}{A}\left(1+\frac{|z|}{|\operatorname{Im} z|}\right) = \frac{C(z)}{A}.\end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned}\left|\int_{[-A,A]} \frac{d\sigma(x)}{x-z} - w\right| &= \lim_{i\to\infty}\left|\int_{[-A,A]} \frac{d\sigma_{n_i}(x)}{x-z} - w_{n_i}\right| \\ &= \lim_{i\to\infty}\left|\int_{|x|>A} \frac{d\sigma_{n_i}(x)}{x-z}\right| \leqslant \frac{C(z)}{A}.\end{aligned}$$

Tezę otrzymujemy przez przejście do granicy, gdy $A \to +\infty$. □

Wniosek 7.3. *W przypadku koła problem momentów jest niezdeterminowany, tzn. rozwiązanie nie jest jednoznaczne.*

Twierdzenie 7.4. *W przypadku punktu problem momentów jest zdeterminowany, tzn. rozwiązanie jest jednoznaczne.*

Dowód. Załóżmy, że σ_1 i σ_2 są rozwiązaniami problemu momentów. Liczby $w_1(z)$ i $w_2(z)$ określone wzorami

$$w_1(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_1(x)}{x-z}, \qquad w_2(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_2(x)}{x-z},$$

należą do $K_\infty(z)$ dla każdej liczby $z \notin \mathbb{R}$. Zatem $w_1(z) = w_2(z)$. Teza twierdzenia wynika ze wzoru Stieltjesa na odwrócenie, który dowodzimy poniżej. □

Twierdzenie 7.5 (wzór Stieltjesa na odwrócenie)**.** *Niech σ będzie miarą probabilistyczną na prostej. Określamy transformatę $R(z)$ wzorem*

$$R(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(x)}{x-z}.$$

Wtedy

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\pi}\int_{t_1}^{t_2} \operatorname{Im} R(t+i\varepsilon)\,dt = \sigma(t_1,t_2) + \frac{1}{2}\sigma(\{t_1\}) + \frac{1}{2}\sigma(\{t_2\}).$$

Dowód. Mamy

$$\frac{1}{x-t-i\varepsilon} - \frac{1}{x-t+i\varepsilon} = \frac{2i\varepsilon}{(x-t)^2+\varepsilon^2}.$$

Zatem

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{t_1}^{t_2} \operatorname{Im} R(t+i\varepsilon)\,dt &= \frac{1}{\pi}\int_{t_1}^{t_2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon}{(x-t)^2+\varepsilon^2}d\sigma(x)\,dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{t_1}^{t_2} \frac{\varepsilon}{(x-t)^2+\varepsilon^2}\,dt\,d\sigma(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{t-x}{\varepsilon}\Big|_{t=t_1}^{t=t_2} d\sigma(x)\end{aligned}$$

Obliczamy granicę funkcji podcałkowej.

$$\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{t_2-x}{\varepsilon} - \operatorname{arctg}\frac{t_1-x}{\varepsilon}\right) \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} \begin{cases} 1 & \text{dla } t_1 < x < t_2, \\ \frac{1}{2} & \text{dla } x = t_1,\ x = t_2, \\ 0 & \text{dla } x < t_1,\ x > t_2. \end{cases}$$

Wzór Stieltjesa otrzymujemy przez przejście w całce do granicy, gdy $\varepsilon \to 0^+$. $\square$

Uwaga 7.6.

Wzór Stieltjesa jest spełniony dla miar znakowanych o wahaniu ograniczonym, jak również dla miar zespolonych o wahaniu ograniczonym.

Definicja 7.7. *Miarę σ będącą rozwiązaniem problemu momentów będziemy nazywać **N-ekstremalną** w punkcie $z \notin \mathbb{R}$, jeśli liczba $w = \int_{\mathbb{R}} d\sigma(x)/(x-z)$ należy do zbioru $\partial K_\infty(z)$, tzn. zachodzi*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |wp_n(z) + q_n(z)|^2 = \frac{\operatorname{Im} w}{\operatorname{Im} z}.$$

Twierdzenie 7.8 (M. Riesz)**.** *Jeśli wielomiany tworzą gęstą podprzestrzeń w przestrzeni $L^2(\mathbb{R}, \sigma)$, to miara σ jest N-ekstremalna w każdym punkcie $z \notin \mathbb{R}$. Jeśli miara σ jest N-ekstremalna w pewnym punkcie $z \notin \mathbb{R}$, to wielomiany leżą gęsto w $L^2(\mathbb{R}, \sigma)$.*

Dowód. Załóżmy, że wielomiany leżą gęsto w $L^2(\mathbb{R}, \sigma)$. Zatem układ $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ tworzy bazę ortonormalną. Z równości Parsevala zastosowanej do funkcji $(x-z)^{-1}$ (por. Uwaga 6.4) otrzymujemy

$$\sum_{i=0}^{\infty} |wp_n(z) + q_n(z)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(x)}{|x-z|^2} = \frac{\operatorname{Im} w}{\operatorname{Im} z}.$$

Zatem σ jest N-ekstremalna dla każdej liczby $z \notin \mathbb{R}$.

Załóżmy, że σ jest N-ekstremalna w punkcie z_0, $\operatorname{Im} z_0 \neq 0$. Zatem

$$\sum_{i=0}^{\infty} |wp_n(z_0) + q_n(z_0)|^2 = \frac{\operatorname{Im} w}{\operatorname{Im} z_0} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(x)}{|x-z_0|^2},$$

gdzie $w = w(z_0) = \int (x-z_0)^{-1} d\sigma(x)$. Ta równość oznacza, że funkcja $(x-z_0)^{-1}$ może być aproksymowana wielomianami względem normy przestrzeni $L^2(\mathbb{R}, \sigma)$. Zastosowanie sprzężenia zespolonego implikuje, że również funkcja $(x-\overline{z}_0)^{-1}$ może być aproksymowana wielomianami. Każdy wielomian można zapisać w postaci $A + (x-z_0)p(x)$. Wtedy z nierówności

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{(x-z_0)^2} - \frac{A}{x-z_0} - p(x) \right|^2 d\sigma(x) \leqslant \frac{1}{(\operatorname{Im} z_0)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{x-z_0} - A - (x-z_0)p(x) \right|^2 d\sigma(x)$$

wynika, że funkcja $(x-z_0)^{-2}$ może być aproksymowana wielomianami, jak również funkcja $(x-\overline{z_0})^{-2}$. Dalej, przez indukcję, dowodzimy, że funkcje

$(x-z_0)^{-n}$ i $(x-\overline{z_0})^{-n}$ można aproksymować wielomianami dla każdej liczby naturalnej n.

Załóżmy niewprost, że dla pewnej funkcji $g(x) \in L^2(\mathbb{R}, \sigma)$ zachodzi

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) x^n d\sigma(x) = 0, \qquad n \geqslant 0.$$

Zatem

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x)}{(x-z_0)^{n+1}} d\sigma(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x)}{(x-\overline{z_0})^{n+1}} d\sigma(x) = 0, \qquad n \geqslant 0.$$

Rozważmy funkcję

$$\varphi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x)}{x-z} d\sigma(x).$$

Funkcja $\varphi(z)$ jest holomorficzna dla $\operatorname{Im} z \neq 0$, zatem rozwija się w zbieżny szereg Taylora w otoczeniu każdego punktu. Obliczymy współczynniki Taylora funkcji $\varphi(z)$ w punktach z_0 i $\overline{z_0}$. Mamy

$$\begin{aligned} \varphi^{(n)}(z_0) &= n! \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x)}{(x-z_0)^{n+1}} d\sigma(x) = 0, \\ \varphi^{(n)}(\overline{z_0}) &= n! \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x)}{(x-\overline{z_0})^{n+1}} d\sigma(x) = 0. \end{aligned}$$

Zatem $\varphi(z) = 0$ dla $z \notin \mathbb{R}$. Z Twierdzenia Stieltjesa o odwróceniu zastosowanego do miary zespolonej $g(x)d\sigma(x)$ otrzymujemy $g(x) = 0$ prawie wszędzie. □

Definicja 7.9. *Rozwiązane σ problemu momentów będziemy nazywać N-ekstremalnym, jeśli spełniony jest jeden z warunków*

(a) σ jest jedynym rozwiązaniem problemu momentów, tzn. problem momentów jest zdeterminowany.

(b) σ nie jest jedynym rozwiązaniem problemu momentów, ale liczba $w = \int (x-z)^{-1} d\sigma(x)$ należy do $\partial K_\infty(z)$ dla pewnej (każdej) wartości $z \notin \mathbb{R}$.

Uwaga 7.10.

Miarę σ będziemy nazywali zdeterminowaną, jeśli problem momentów związany z momentami miary σ jest zdeterminowany. Podobnie miarę σ będziemy nazywali miarą N-ekstremalną, jeśli σ jest N-ekstremalnym rozwiązaniem problemu momentów związanego z momentami miary σ.

Poprzednie rozważania możemy teraz podsumować następująco.

Twierdzenie 7.11. *Niech σ będzie rozwiązaniem problemu momentów. Wielomiany tworzą gęstą podprzestrzeń w $L^2(\mathbb{R},\sigma)$ wtedy i tylko wtedy, gdy σ jest N-ekstremalna. Z kolei miara σ jest N-ekstremalna, jeśli funkcję $x \mapsto (x-i)^{-1}$ można aproksymować wielomianami w przestrzeni $L^2(\mathbb{R},\sigma)$.*

Wniosek 7.12. *Jeśli σ jest zdeterminowna, to wielomiany leżą gęsto w $L^2(\mathbb{R},\sigma)$.*

Lemat 7.13. *Dla $z \in \mathbb{C}$ zachodzi wzór*

$$\min_{p\in\mathbb{P}_{n-1}} \|1-(x-z)p(x)\|^2 = \left(\sum_{i=0}^{n} |p_i(z)|^2\right)^{-1},$$

gdzie $\mathbb{P}_{n-1}$ oznacza przestrzeń wielomianów stopnia mniejszego niż n, oraz $\|\cdot\|^2 = (\cdot,\cdot)$.

Dowód. Dla $p \in \mathbb{P}_{n-1}$ rozważamy wielomian $P(x) = 1-(x-z)p(x)$. Wtedy $P(z) = 1$ oraz $\deg P \leqslant n$. Wielomian $P(x)$ możemy zapisać w postaci

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i p_i(x).$$

Podstawiamy $x = z$ i otrzymujemy

$$1 = \left|\sum_{i=0}^{n} a_i p_i(z)\right|^2 \leqslant \sum_{i=0}^{n} |a_i|^2 \sum_{i=0}^{n} |p_i(z)|^2 = \|P\|^2 \sum_{i=0}^{n} |p_i(z)|^2.$$

Stąd

$$\|P\|^2 \geqslant \left(\sum_{i=0}^{n} |p_i(z)|^2\right)^{-1}.$$

Niech

$$P(x) = \left(\sum_{i=0}^{n} |p_i(z)|^2\right)^{-1} \sum_{i=0}^{n} \overline{p_i(z)} p_i(x).$$

Wtedy $P(z) = 1$, $\deg P = n$. Zatem $P(x)$ można zapisać w postaci

$$P(x) = 1 - (x - z)p(x), \qquad \text{gdzie } p \in \mathbb{P}_{n-1}.$$

Ponadto $\|P\|^2 = \left(\sum_{i=0}^{n} |p_i(z)|^2\right)^{-1}$. □

Wniosek 7.14. *Zachodzi wzór*

$$\inf_{p\in\mathbb{P}} \|1 - (x - z)p(x)\|^2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |p_n(z)|^2\right)^{-1}.$$

Twierdzenie 7.15 (M. Riesz)**.** *Miara σ jest zdeterminowana wtedy i tylko wtedy, gdy miara $(1 + x^2)d\sigma(x)$ jest N-ekstremalna.*

Dowód. Zauważamy, że

$$\int_{-\infty}^{\infty} |1 - (x - i)p(x)|^2 d\sigma(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{1}{x - i} - p(x)\right|^2 (1 + x^2)\, d\sigma(x).$$

Na podstawie Wniosku 7.14 mamy

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} |p_n(i)|^2\right)^{-1} = \inf_{p\in\mathbb{P}} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{1}{x - i} - p(x)\right|^2 (1 + x^2)\, d\sigma(x).$$

Lewa strona równości zeruje się wtedy i tylko wtedy, gdy σ jest zdeterminowana. Z kolei z drugiej części Twierdzenia 7.11 prawa strona zeruje się tylko wtedy, gdy $(1 + x^2)d\sigma(x)$ jest N-ekstremalna. □

8 Rozwiązania N-ekstremalne

Rozważamy niezdeterminowany problem momentów Hamburgera. Z Lematu 7.2 i ze wzoru (6.25) wiemy, że dla ustalonej liczby $t \in \mathbb{R}^*$ istnieje miara $\sigma_{n,t}$, będąca zredukowanym rozwiązaniem problemu momentów taka, że

$$-\frac{A_n(z)t - C_n(z)}{B_n(z)t - D_n(z)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_{n,t}(x)}{x - z}, \qquad \operatorname{Im} z \neq 0.$$

Niech miara σ_t będzie punktem skupienia miar $\sigma_{n,t}$. Wtedy σ_t jest rozwiązaniem problemu momentów oraz

$$-\frac{A(z)t - C(z)}{B(z)t - D(z)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_t(x)}{x - z}, \qquad \operatorname{Im} z \neq 0. \tag{8.1}$$

Miara σ_t jest N-ekstremalna, ponieważ liczby $w = \int (x - z) d\sigma_t(x)$ leżą na okręgu $\partial K_\infty(z)$ (por. (6.26)). Okazuje się, że nie ma już innych rozwiązań N-ekstremalnych.

Twierdzenie 8.1. *Każde N-ekstremalne rozwiązanie niezdeterminowanego problemu momentów ma postać σ_t dla pewnej liczby $t \in \mathbb{R}^*$.*

Dowód. Załóżmy, że σ jest rozwiązaniem N-ekstremalnym. Wtedy

$$w(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(x)}{x - z} \in \partial K_\infty(z).$$

Stąd na podstawie (6.26) dla każdej liczby $z \notin \mathbb{R}$ istnieje liczba $\varphi(z) \in \mathbb{R}^*$ taka, że

$$w(z) = -\frac{A(z)\varphi(z) - C(z)}{B(z)\varphi(z) - D(z)}.$$

Obliczamy $\varphi(z)$ i otrzymujemy

$$\varphi(z) = \frac{D(z)w(z) + C(z)}{B(z)w(z) + A(z)}.$$

Ułamek ma dobrze określoną wartość w $\mathbb{R}^*$, bo licznik i mianownik nie mogą się zerować jednocześnie. Niech Z oznacza zbiór zer mianownika leżących w górnej półpłaszczyźnie. Punkty zbioru Z są biegunami funkcji $\varphi(z)$. Załóżmy najpierw, że zbiór Z nie ma punktów skupienia w półpłaszczyźnie $\operatorname{Im} z > 0$. Wtedy funkcja $\varphi(z)$ jest analityczna i rzeczywista w $\mathbb{C}_+ \setminus Z$. Zatem $\varphi(z)$ jest funkcją stałą na tym zbiorze. To oznacza, że $\varphi(z)$ nie ma biegunów w górnej półpłaszczyźnie, czyli $Z = \emptyset$. Funkcja $\varphi(z)$ jest więc funkcją stałą w górnej półpłaszczyźnie. Przyjmijmy, że $\varphi(z) = t$ dla $\operatorname{Im} z > 0$ i pewnej stałej liczby rzeczywistej t. To oznacza, że

$$w(z) = -\frac{A(z)t - C(z)}{B(z)t - D(z)}, \qquad \operatorname{Im} z > 0.$$

Stosując sprzężenie zespolone do obu stron otrzymamy

$$w(z) = -\frac{A(z)t - C(z)}{B(z)t - D(z)}, \qquad \operatorname{Im} z < 0.$$

Ostatecznie mamy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(x)}{x - z} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_t(x)}{x - z}, \qquad \operatorname{Im} z \neq 0.$$

Z Twierdzenia Stieltjesa o odwróceniu wnioskujemy, że $\sigma = \sigma_t$.

Pozostaje zbadać przypadek, gdy zbiór Z ma punkty skupienia w górnej półpłaszczyźnie. Wtedy $B(z)w(z) + A(z) = 0$ dla z z górnej półpłaszczyzny. W konsekwencji $w(z) = -A(z)/B(z)$ dla $\operatorname{Im} z > 0$, co pociąga $w(z) = -A(z)/B(z)$ dla $\operatorname{Im} z \neq 0$. Otrzymujemy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(x)}{x - z} = -\frac{A(z)}{B(z)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_\infty(x)}{x - z}, \qquad \operatorname{Im} z \neq 0.$$

Zatem $\sigma = \sigma_\infty$. □

Definicja 8.2. *Dla miary σ na prostej rzeczywistej, funkcję*

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(x)}{x - z}, \qquad \operatorname{Im} z \neq 0 \tag{8.2}$$

nazywamy transformatą Cauchy'ego miary σ.

Z postaci funkcji $F(z)$ wynika, że jest ona analityczna dla $\operatorname{Im} z \neq 0$. Z poprzedniego twierdzenia wynika, między innymi, że transformata Cauchy'ego rozwiązania N-ekstremalnego jest ilorazem dwu funkcji całkowitych (tzn. analitycznych w całej płaszczyźnie zespolonej). Ponadto, jeśli

$$w(z,t) = -\frac{A(z)t - C(z)}{B(z)t - D(z)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_t(x)}{x - z},$$

to

$$\frac{\operatorname{Im} w(z,t)}{\operatorname{Im} z} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_t(x)}{|x - z|^2} > 0, \qquad \operatorname{Im} z \neq 0.$$

Zatem ani licznik $A(z)t - C(z)$ ani mianownik $B(z)t - D(z)$ nie zerują się dla $\operatorname{Im} z \neq 0$. Dodatkowo wszystkie cztery funkcje $A(x)$, $B(x)\, C(x)$ i $D(x)$ przyjmują wartości rzeczywiste dla $x \in \mathbb{R}$.

Uwaga 8.3. Wielomiany $p_n(x)$ i $q_n(x)$ możemy zastąpić wielomianami $p_n(x+u)$ i $q_n(x+u)$ dla ustalonego parametru rzeczywistego u. Nowe wielomiany odpowiadają momentom

$$m_n(u) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} u^k m_{n-k}.$$

Zatem własności funkcji $A(z)$, $B(z)$, $C(z)$ oraz $B(z)$ przenoszą się na własności funkcji $A(z,u)$, $B(z,u)$, $C(z,u)$ i $B(z,u)$.

Lemat 8.4. *Załóżmy, że transformata Cauchy'ego miary σ jest ilorazem dwu funkcji całkowitych $G(z)/H(z)$, przy czym $G(x)$ oraz $H(x)$ przyjmują wartości rzeczywiste dla $x \in \mathbb{R}$. Wtedy miara σ jest skupiona na zbiorze $Z = \{x \in \mathbb{R} : \ H(x) = 0\}$. W szczególności σ jest miarą dyskretną. Jeśli $G(x)$ nie zeruje się w punktach zbioru Z, to* $\operatorname{supp} \sigma = Z$.

Dowód. Z jest co najwyżej przeliczalnym podzbiorem w $\mathbb{R}$ bez punktów skupienia. Zatem Z jest zbiorem dyskretnym. Wtedy funkcja $F(z)$ przedłuża się wzorem $\widetilde{F}(z) = G(z)/H(z)$ do funkcji analitycznej w $\mathbb{C} \setminus Z$. Funkcja $\widetilde{F}(x)$ przyjmuje wartości rzeczywiste dla $x \in \mathbb{R} \setminus Z$. Zatem dla $x \in \mathbb{R} \setminus Z$ i $\varepsilon > 0$ mamy

$$\operatorname{Im} F(x+i\varepsilon) = \operatorname{Im} \widetilde{F}(x+i\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} \operatorname{Im} \widetilde{F}(x) = 0.$$

Rozważmy przedział $[a,b]$ rozłączny z Z. Wtedy

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^b \operatorname{Im} F(x+i\varepsilon)\, dx = 0.$$

Ze wzoru Stieltjesa na odwrócenie wnioskujemy, że $\sigma([a,b]) = 0$. Stąd $\operatorname{supp} \sigma \subseteq Z$.

Niech $x \in Z$. Załóżmy, niewprost, że $\sigma(\{x\}) = 0$. Wtedy funkcja $F(z)$ przedłuża się do funkcji analitycznej w otoczeniu punktu x wzorem (8.2). Zatem granica

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{G(x+i\varepsilon)}{H(x+i\varepsilon)}$$

istnieje i jest skończona. Ponieważ $H(x) = 0$, to $G(x) = 0$, co przeczy założeniom. W związku z tym otrzymujemy $\sigma(\{x\}) > 0$. □

Z Lematu 8.4 wynika, że miara σ_t jest skoncentrowana na zbiorze $Z_t = \{x \in \mathbb{R} : \ B(x)t - D(x) = 0\}$ dla $t \in \mathbb{R}$ i na zbiorze $Z_\infty = \{x \in \mathbb{R} : \ B(x) = 0\}$ dla $t = \infty$.

Twierdzenie 8.5. *Jeśli σ jest rozwiązaniem problemu momentów, to dla $a \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność*

$$\sigma(\{a\}) \leqslant \frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n^2(a)}.$$

Jeśli σ jest N-ekstremalnym rozwiązaniem i $\sigma(\{a\}) > 0$, to

$$\sigma(\{a\}) = \frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n^2(a)}.$$

Jeśli szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n^2(a)$ jest zbieżny, to istnieje rozwiązanie N-ekstremalne σ problemu momentów spełniające

$$\sigma(\{a\}) = \frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n^2(a)}.$$

Dowód. Załóżmy, że σ jest rozwiązaniem problemu momentów. Dla $\varepsilon > 0$ niech f_ε będzie funkcją ciągłą taką, że $0 \leqslant f_\varepsilon(x) \leqslant 1$ oraz $f_\varepsilon(x) = 1$ dla $|x - a| \leqslant \varepsilon$ i $f_\varepsilon(x) = 0$ dla $|x - a| \geqslant 2\varepsilon$. Z nierówności Bessela otrzymujemy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x) p_n(x) d\sigma(x) \right|^2 \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f_\varepsilon(x)|^2 d\sigma(x).$$

Przechodząc do granicy przy $\varepsilon \to 0^+$ otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n^2(a) \sigma^2(\{a\}) \leqslant \sigma(\{a\}).$$

Jeśli miara σ jest N-ekstremalna, to z równości Parsevala dostajemy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x) p_n(x) d\sigma(x) \right|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f_\varepsilon(x)|^2 d\sigma(x).$$

Obliczamy granicę obu stron, gdy ε dąży do zera. Jeśli można wejść z granicą pod znak sumy nieskończonej, to

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n^2(a) \sigma^2(\{a\}) = \sigma(\{a\}).$$

Prawidłowość takiego postępowania wynika z lematu, którego nietrudny dowód pozostawiamy czytelnikowi.

Lemat 8.6. *Rozważmy bazę ortonormalną $\{e_i\}_{i=0}^{\infty}$ w przestrzeni Hilberta H oraz ciąg Cauchy'ego $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ w H. Wtedy*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{\infty}|(x_n,e_i)|^2=\sum_{i=0}^{\infty}\lim_{n\to\infty}|(x_n,e_i)|^2.$$

Załóżmy, że szereg $\sum p_n^2(a)$ jest zbieżny. Wielomiany p_{n-1} i p_n nie mają wspólnych zer, zatem $p_{n-1}(a)\neq 0$ dla nieskończenie wielu n. Jeśli $p_{n-1}(a)\neq 0$, to wybieramy $\tau_n\in\mathbb{R}$ tak, aby $p_n(a)-\tau_n p_{n-1}(a)=0$. Wtedy miara $\sigma_n(\tau_n)$ (por. Uwaga 5.3) określona przy pomocy kwadratury Gaussa spełnia

$$\sigma_n(\{a\})=\frac{1}{\sum_{i=0}^{n-1}p_i^2(a)}.$$

Niech σ będzie punktem skupienia miar σ_n. Zatem σ jest rozwiązaniem problemu momentów oraz

$$\sigma(\{a\})=\frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty}p_n^2(a)}.$$

Z konstrukcji liczby $w_n(z)=\int(x-z)^{-1}\,d\sigma_n(x)$ leżą na okręgu $\partial K_n(z)$. Stąd $w(z)=\int(x-z)^{-1}d\sigma(x)$ leży na okręgu $\partial K_\infty(z)$. Zatem miara σ jest N-ekstremalna. □

Uwaga 8.7.

Jeśli problem momentów jest niezdeterminowany, to dla każdej liczby rzeczywistej x istnieje rozwiązanie σ problemu momentów spełniające $\sigma(\{x\})>0$. Co więcej można zażądać, aby miara σ była N-ekstremalna.

Wniosek 8.8. *Niech σ będzie N-ekstremalnym rozwiązaniem niezdeterminowanego problemu momentów oraz $a\in\operatorname{supp}\sigma$. Wtedy miara $\widetilde{\sigma}=\sigma-\sigma(\{a\})\delta_a$ jest zdeterminowana.*

Dowód. Załóżmy, że miara $\widetilde{\sigma}$ jest niezdeterminowana. Z Uwagi 8.7 istnieje miara $\widetilde{\mu}$ o tych samych momentach co miara $\widetilde{\sigma}$ taka, że $\widetilde{\mu}(\{a\})>0$. Wtedy miary $\sigma = \widetilde{\sigma} + \sigma(\{a\})\delta_a$ oraz $\mu = \widetilde{\mu} + \sigma(\{a\})\delta_a$ mają te same momenty. Ponadto

$$\mu(\{a\}) = \sigma(\{a\}) + \widetilde{\mu}(\{a\}) = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n^2(a)} + \widetilde{\mu}(\{a\}),$$

gdzie $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ oznacza układ wielomianów ortogonalnych względem momentów miary σ. Otrzymujemy sprzeczność z Twierdzeniem 8.5. $\square$

Twierdzenie 8.9. *Załóżmy, że*

$$\sigma(\{a\}) = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n^2(a)},$$

dla pewnej liczby $a \in \mathbb{R}$. Wtedy miara σ jest N-ekstremalna.

Dowód. Jeśli σ jest zdeterminowana, to σ jest N-ekstremalna. Załóżmy, że σ nie jest zdeterminowana. Zatem istnieje rozwiązanie N-ekstremalne μ takie, że $\mu(\{a\}) > 0$. Z Twierdzenia 8.5 mamy $\sigma(\{a\}) = \mu(\{a\})$. Miary $\sigma - \sigma(\{a\})\delta_a$ oraz $\mu - \sigma(\{a\})\delta_a$ mają te same momenty. Z poprzedniego wniosku te miary są równe. Zatem $\sigma = \mu$, czyli σ jest N-ekstremalna $\square$

Wniosek 8.10. *Jeśli miara σ jest rozwiązaniem problemu momentów i σ nie jest N-ekstremalna, to*

$$\sigma(\{a\}) < \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n^2(a)},$$

dla $a \in \mathbb{R}$.

Zajmiemy się obecnie zbadaniem N-ekstremalnych rozwiązań niezdeterminwanego problemu momentów. Rozwiązania te mają postać σ_t, gdzie $t \in \mathbb{R}^*$ oraz

$$w(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_t(x)}{x-z} = -\frac{A(z)t - C(z)}{B(z)t - D(z)}.$$

Z Lematu 8.4 miara σ_t jest skupiona na zbiorze $Z_t = \{x \in \mathbb{R} : B(x)t - D(x) = 0\}$, jeśli $t \in \mathbb{R}$ lub na zbiorze $Z_\infty = \{x \in \mathbb{R} : B(x) = 0\}$, jeśli $t = \infty$. Stąd zbiór Z_t jest przeliczalny i nie posiada punktów skupienia, jako zbiór zer funkcji całkowitej. Na podstawie wzoru (6.28) funkcje $B(x)$ i $D(x)$ nie mają wspólnych zer. Zatem dla $s \neq t$ zbiory Z_t i Z_s są rozłączne. Ponieważ problem momentów jest niezdeterminowany, to zbiór Z_t nie może być ograniczony (por. Zadanie 2). Jednakże może się zdarzyć, że Z_t jest ograniczony z dołu lub ograniczony z góry. Niech $Z_t = \{x_k(t)\}_{k\in I}$, przy czym $x_k(t) < x_{k+1}(t)$. W zależności, czy zbiór Z_t jest ograniczony z dołu, z góry lub jest nieograniczony z obu stron, zbiór indeksów I jest równy $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Z}_-$ lub $\mathbb{Z}$. Miara σ_t posiada atom w każdym z punktów $x_k(t)$ oraz masa $\mu_k(t)$ miary σ_t w tym punkcie wynosi

$$\mu_k(t) = \frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n^2(x_k(t))}.$$

Zatem

$$-\frac{A(x)t - C(x)}{B(x)t - D(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_t(y)}{y-x} = \sum_{k\in I} \frac{\mu_k(t)}{x_k(t) - x}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus Z_t.$$

Twierdzenie 8.11. *Niech $\sigma_\infty = \{x_k(\infty)\}_{k\in I}$. W przedziale $(x_k(\infty), x_{k+1}(\infty))$ znajduje się dokładnie jeden punkt $x_k(t)$ ze zbioru Z_t, dla każdej liczby $t \in \mathbb{R}$. Ponadto odwzorowanie $t \mapsto x_k(t)$ jest funkcją ciągłą i malejącą na prostej, przyjmującą wszystkie wartości z przedziału $(x_k(\infty), x_{k+1}(\infty))$. Jeśli $I = \mathbb{Z}_+$ ($I = \mathbb{Z}_-$), to istnieje liczba $t_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, ($t_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$) taka, że w przedziale $(-\infty, x_1(\infty))$ $((x_{-1}(\infty), +\infty))$ znajduje się dokładnie jeden punkt $x_0(t)$ ze zbioru Z_t dla $t < t_0$ ($t > t_0$). Ponadto odwzorowanie $t \mapsto x_0(t)$ ($t \mapsto x_{-1}(t)$) jest funkcją ciągłą i malejącą na przedziale $(-\infty, t_0)$ $((t_0, +\infty))$przyjmującą wszystkie wartości z przedziału $(-\infty, x_1(\infty))$ $((x_{-1}(\infty), +\infty))$.*

Dowód. Na podstawie (6.12), (6.14) oraz (3.12) otrzymujemy

Wzór (8.3)**.**

$$B_n'(x)D_n(x) - B_n(x)D_n'(x) = \sum_{i=0}^{n-1} p_i^2(x). \tag{8.3}$$

Ze wzoru (8.3) dla $z \notin Z_\infty$ otrzymujemy

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{D(x)}{B(x)}\right) = -B^{-2}(x)[B'(x)D(x) - B(x)D'(x)] = -B^{-2}(x)\sum_{n=0}^{\infty} p_n^2(x) < 0.$$

Funkcja $D(x)/B(x)$ jest zatem malejąca w każdym z przedziałów $(x_k(\infty), x_{k+1}(\infty))$. Ponieważ punkty $x_k(\infty)$ są jej biegunami, to funkcja $D(x)/B(x)$ odwzorowuje każdy z przedziałów $(x_k(\infty), x_{k+1}(\infty))$ na prostą $\mathbb{R}$. Zauważmy, że $x_k(t)$ jest funkcją odwrotną do $D(x)/B(x)$.

W przypadku, gdy $I = \mathbb{Z}_+$ $(I = \mathbb{Z}_-)$ funkcja $D(x)/B(x)$ jest malejąca w przedziale $(-\infty, x_1(\infty))$ $((x_{-1}(\infty), +\infty))$, zatem ma granicę t_0 w $-\infty$ $(+\infty)$. Wtedy funkcja odwrotna $x_0(t)$ $(x_{-1}(t))$ spełnia tezę twierdzenia. □

Uwaga 8.12.

Przechodząc do granicy we wzorze (8.3) dostajemy

$$B'(x)D(x) - B(x)D(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n^2(x).$$

Zatem jeśli $B(x) = 0$, to $B'(x) \neq 0$. To oznacza, że wszystkie zera funkcji $B(z)$ mają krotność 1. To samo dotyczy $D(z)$ oraz pozostałych dwu funkcji $A(z)$ i $C(z)$.

9 Parametryzacja Nevanlinny rozwiązań niezdeterminowanego problemu momentów

W poprzednim rozdziale otrzymaliśmy opis wszystkich rozwiązań N-ekstremalnych niezdeterminowanego problemu momentów. Wiemy, że rozwiązania N-ekstremalne są miarami dyskretnymi, że dwa różne rozwiązania N-ekstremalne mają rozłączne nośniki, i że suma nośników wszystkich rozwiązań N-ekstremalnych jest równa $\mathbb{R}$. Każda nietrywialna kombinacja liniowa rozwiązań N-ekstremalnych jest nowym rozwiązaniem problemu momentów, już nie N-ekstremalnym. Jednakże wszystkich rozwiązań problemu momentów jest znacznie więcej.

Lemat 9.1. *Niech $\mathcal{M}$ oznacza zbiór wszystkich rozwiązań niezdeterminowanego problemu momentów Hamburgera $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$. Dla $\sigma \in \mathcal{M}$ oznaczmy $F(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(x)}{x-z}$. Dla liczby naturalnej N niech*

$$R_N^F(y) = y^{N+1}\left[F(iy) + \sum_{n=0}^{N} (iy)^{-(n+1)} m_n\right].$$

Wtedy

$$\lim_{y\to+\infty} R_N^F(y) = 0 \tag{9.1}$$

i zbieżność jest jednostajna względem $\sigma \in \mathcal{M}$.

Jeśli $F(z)$ *jest funkcją holomorficzną w* $\mathbb{C}_+$ *spełniającą* $\operatorname{Im} F(z) > 0$ *i warunek (9.1) dla każdej wartości* N, *to istnieje rozwiązanie* $\sigma \in \mathcal{M}$ *takie, że* $F(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(x)}{x-z}$.

Dowód. Mamy

$$\sum_{n=0}^{N} (iy)^{-(n+1)} m_n = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{N} (iy)^{-(n+1)} x^n \, d\sigma(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{iy}\right)^{N+1} - 1}{x - iy} \, d\sigma(x).$$

Zatem

$$R_N^F(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(-i)^{N+1} x^{N+1}}{x - iy} \, d\sigma(x).$$

Otrzymujemy wtedy

$$\begin{aligned} |R_N^F(y)| &\leqslant \frac{1}{y} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|^{N+1} \, d\sigma(x) \\ &\leqslant \frac{1}{y} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^{2N+2} \, d\sigma(x) \right\}^{1/2} = \frac{1}{y} \, m_{2N+2}^{1/2} \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Dla dowodu drugiej części lematu wykorzystamy Twierdzenie Herglotza*, które stanowi, że jeśli $F(z)$ jest funkcją holomorficzną odwzorowującą górną półpłaszczyznę w siebie, to istnieją stałe $c \geqslant 0$, $d \in \mathbb{R}$ oraz miara σ takie, że $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(x)}{1+x^2} < +\infty$ oraz

$$F(z) = cz + d + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{x-z} - \frac{x}{1+x^2} \right) d\sigma(x). \tag{9.2}$$

*Patrz zadania 44–48

Z (9.1) dla $N = 0$ otrzymujemy

$$yF(iy) \xrightarrow[y\to+\infty]{} im_0. \tag{9.3}$$

Z kolei wzór (9.2) daje

$$y^{-1}F(iy) \xrightarrow[y\to+\infty]{} ic.$$

Zatem $c = 0$. Przechodząc do granicy przy $y \to +\infty$ w równości

$$y \operatorname{Im} F(iy) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^2}{x^2+y^2}\, d\sigma(x)$$

i korzystając z (9.3) dostajemy

$$m_0 = \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma(x). \tag{9.4}$$

W szczególności σ ma skończoną całkowitą masę. Obliczamy

$$\operatorname{Re} F(iy) = d + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{x}{1+x^2} \right) d\sigma(x) \xrightarrow[y\to+\infty]{} d - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\, d\sigma(x).$$

W związku z (9.3) mamy $\operatorname{Re} F(iy) \to 0$, gdy $y \to +\infty$. Zatem $d = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\, d\sigma(x)$, co pociąga

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(x)}{x-z}.$$

Pozostaje pokazać, że $\sigma \in \mathcal{M}$. Udowodnimy indukcyjnie, że

$$m_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n d\sigma(x). \tag{9.5}$$

Dla $n = 0$ równość jest spełniona na podstawie (9.4). Załóżmy, że (9.5) zachodzi dla $n = 0, 1, 2, \ldots, 2M-2$. Zastosujemy (9.1) dla $N = 2M$ po pomnożeniu przez i^{2M+1}. Otrzymamy wtedy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(iy)^2 x^{2M-1}}{x-iy}\, d\sigma(x) + iy\, m_{2M-1} + m_{2M} \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0.$$

Obliczamy części rzeczywistą i urojoną, aby dostać

$$\begin{aligned} m_{2M-1} &= \lim_{y\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y^2x^{2M-1}}{x^2+y^2}\,d\sigma(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2M-1}\,d\sigma(x),\\ m_{2M} &= \lim_{y\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y^2x^{2M}}{x^2+y^2}\,d\sigma(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2M}\,d\sigma(x). \end{aligned}$$

□

Lemat 9.2. *Dla* $\operatorname{Im} z > 0$ *funkcja* G_z *określona wzorem*

$$G_z(u) = -\frac{A(z)u - C(z)}{B(z)u - D(z)}$$

odwzorowuje $\mathbb{C}_+$ *w* $\operatorname{int} K_\infty(z)$.

Dowód. Wiemy, że dla $z \notin \mathbb{R}$ funkcja G_z odwzorowuje $\mathbb{R}^*$ na $\partial K_\infty(z)$. Aby zakończyć dowód pokażemy, że $G_z(\mathbb{C}_-) \subset \mathbb{C} \cup \infty \setminus K_\infty(z)$. W tym celu wystarczy sprawdzić, że liczba $G_z^{-1}(\infty) = D(z)/B(z)$ leży w dolnej półpłaszczyźnie dla $\operatorname{Im} z > 0$.

Ze wzorów (6.8) i (6.10) wynika, że przy $|z| \to 0$

$$\begin{aligned} &B(z) = -1 + \mathrm{O}(|z|),\\ &D(z) = az + \mathrm{O}(|z|^2), \quad a = \sum_{n=0}^{\infty} p_n^2(0). \end{aligned}$$

Zatem

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\frac{D(ix)}{B(ix)} = -ia.$$

W szczególności $\operatorname{Im}\frac{D(ix)}{B(ix)} < 0$ dla małych dodatnich wartości x. Z ciągłości funkcji $D(z)/B(z)$ wynika, że $\operatorname{Im} D(z)/B(z) < 0$ dla $\operatorname{Im} z > 0$ albo $D(z)/B(z)$ jest liczbą rzeczywistą dla pewnej wartości z, $\operatorname{Im} z > 0$. Ostatnia ewentualność nie jest możliwa, bo z rozważań po Definicji 8.2 wynika, że funkcja $D(z)t - B(z)$ nie zeruje się w górnej półpłaszczyźnie dla żadnej wartości rzeczywistej t. □

Twierdzenie 9.3. *Niech $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ będzie niezdeterminowanym ciągiem momentów Hamburgera. Istnieje wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie zbioru rozwiązań $\mathcal{M}$ problemu momentów na zbiór Φ wszystkich funkcji holomorficznych φ takich, że $\varphi : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}_+$ lub $\phi(z) \equiv t \in \mathbb{R}^*$. Odwzorowanie to jest wyznaczone przez*

$$F_\sigma(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(x)}{x-z} = -\frac{A(z)\varphi(z) - C(z)}{B(z)\varphi(z) - D(z)}.$$

Dowód. Pokażemy, że jeśli $\varphi \in \Phi$, to dla funkcji

$$F(z) = -\frac{A(z)\varphi(z) - C(z)}{B(z)\varphi(z) - D(z)}$$

istnieje miara $\sigma \in \mathcal{M}$ taka, że $F(z) = F_\sigma(z)$. Jeśli $\varphi(z) \equiv t$, to $\sigma = \sigma_t$. Załóżmy zatem, że $\varphi : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}_+$. Wtedy

$$F(z) = G_z(\varphi(z)). \tag{9.6}$$

Zatem $F(z) \in \operatorname{int} K_\infty(z)$ dla $\operatorname{Im} z > 0$. Twierdzimy, że $F(z)$ spełnia (9.1). Rzeczywiście, możemy zapisać

$$F(iy) = \alpha F_{\sigma_{t_1}}(iy) + (1-\alpha) F_{\sigma_{t_2}}(iy),$$

gdzie $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^*$ oraz $\alpha \in (0,1)$ zależą od y. Na podstawie Lematu 9.1 otrzymujemy

$$|R_N^F(y)| \leqslant \sup_{t \in \mathbb{R}^*} |R_N^{F_{\sigma_t}}(y)| \xrightarrow[y \to +\infty]{} 0.$$

Zatem istnieje miara $\sigma \in \mathcal{M}$ taka, że $F(z) = F_\sigma(z)$.

Odwrotnie, załóżmy, że $\sigma \in \mathcal{M}$. Jeśli σ jest N-ekstremalna, to $\sigma = \sigma_t$ dla pewnego $t \in \mathbb{R}^*$, w związku z czym możemy przyjąć $\varphi(z) \equiv t$. Jeśli σ nie jest N-ekstremalna, to F_σ odwzorowuje $\mathbb{C}_+$ w $\operatorname{int} K_\infty(z)$. Wtedy funkcja $\varphi(z) = G_z^{-1}(F_\sigma(z))$ odwzorowuje $\mathbb{C}_+$ w $\mathbb{C}_+$. Ponadto $G_z(\varphi(z)) = F_\sigma(z)$. $\square$

10 Rozszerzenia samosprzężone operatorów symetrycznych

Niech $\mathcal{H}$ będzie przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym $(\cdot,\cdot)$. Będziemy rozważać operatory liniowe A odwzorowujące podprzestrzeń $D(A) \subset \mathcal{H}$, nazywaną dziedziną operatora A, w przestrzeń $\mathcal{H}$. Wykresem Γ_A operatora A nazywamy zbiór

$$\Gamma_A = \{\langle v, Av\rangle \ : \ v \in D(A)\}.$$

Definicja 10.1. *Operator liniowy $A: D(A) \to \mathcal{H}$, gdzie dziedzina $D(A)$ jest liniową podprzestrzenią w $\mathcal{H}$, nazywamy symetrycznym, jeśli $(Ax, y) = (x, Ay)$ dla dowolnych wektorów $x, y \in D(A)$.*

Korzystając z tożsamości polaryzacyjnej można udowodnić, że operator liniowy A jest symetryczny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego wektora $x \in D(A)$ liczba (Ax, x) jest rzeczywista.

Okazuje się, że operator symetryczny o pełnej dziedzinie jest ograniczony.

Twierdzenie 10.2 (Hellinger, Toeplitz)**.** *Jeśli operator liniowy $A: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ jest symetryczny, to A jest ograniczony.*

Dowód. Pokażemy, że wykres operatora A jest domknięty. Niech $x_n \to x$ oraz $Ax_n \to y$, gdy $n \to \infty$. Dla dowolnego wektora $z \in \mathcal{H}$ mamy

$$(y, z) = \lim_{n\to\infty} (Ax_n, z) = \lim_{n\to\infty} (x_n, Az) = (x, Az) = (Ax, z).$$

Zatem $y = Ax$. □

Dla dwu operatorów liniowych A i B zawieranie $A \subset B$ oznacza, że $D(A) \subset D(B)$ oraz $Ax = Bx$ dla wszystkich wektorów $x \in D(A)$. Operator A jest zawarty w B wtedy i tylko wtedy, gdy wykres Γ_A operatora A jest zawarty w wykresie Γ_B operatora B. Będziemy zajmować się wyłącznie operatorami liniowymi A o gęstej dziedzinie $D(A)$.

Definicja 10.3. *Dla operatora liniowego $A: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ o gęstej dziedzinie $D(A)$ operator sprzężony A^* jest określony na dziedzinie*

$$D(A^*) = \{x \in \mathcal{H} : \textit{ istnieje } z \in \mathcal{H} \textit{ taki, że } (Ay, x) = (y, z) \textit{ dla } y \in D(A)\}.$$

Dla $x \in D(A^*)$ określamy $A^*x = z$.

Uwaga 10.4.

Z Twierdzenia Riesza wektor x należy do $D(A^*)$ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcjonał $D(A) \ni y \mapsto (Ay, x)$ jest ograniczony. Z gęstości dziedziny $D(A)$ wynika, że operator A^* jest dobrze określony, bo dla $x \in \mathcal{H}$ co najwyżej jeden element $z \in \mathcal{H}$ może spełniać $(Ay, x) = (y, z)$ dla wszystkich wektorów $y \in D(A)$.

Jeśli A jest operatorem symetrycznym, to $D(A) \subset D(A^*)$ oraz $A^*x = Ax$ dla $x \in D(A)$. Zatem $A \subset A^*$. Ponadto

Definicja 10.5. *Operator symetryczny $A: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ nazywamy samosprzężonym, jeśli $A = A^*$, tzn. $D(A^*) = D(A)$.*

Naszym głównym zadaniem jest znalezienie samosprzężonych rozszerzeń operatora symetrycznego. Jeśli operatory symetryczne spełniają $A \subset B$, to

$$A \subset B \subset B^* \subset A^*.$$

Zatem jeśli A jest operatorem samosprzężonym, to $A = B$, czyli A jest maksymalnym symetrycznym operatorem.

Dla operatora symetrycznego A o gęstej dziedzinie i dla liczby zespolonej $z \notin \mathbb{R}$ symbolami R_z i $R_{\overline{z}}$ będziemy oznaczać obrazy operatorów $A - zI$ oraz $A - \overline{z}I$, odpowiednio. Dopełnienia ortogonalne tych przestrzeni, tzn. $N_z = R_z^{\perp}$ oraz $N_{\overline{z}} = R_{\overline{z}}^{\perp}$, nazywamy podprzestrzeniami defektu.

Twierdzenie 10.6. *Przestrzenie N_z i $N_{\overline{z}}$ są podprzestrzeniami własnymi operatora A^* odpowiadającymi wartościom własnym $\overline{z}$ i z, odpowiednio.*

Dowód. Dla ustalonego wektora $v \in N_z$ i dowolnego wektora $w \in D(A)$ mamy $((A - zI)w, v) = 0$. Zatem $(Aw, v) = (w, \overline{z}v)$. To oznacza, że $v \in D(A^*)$ oraz $A^*v = \overline{z}v$. Odwrotnie, jeśli $A^*v = \overline{z}v$, to powyższe obliczenia implikują $v \in N_z$. $\square$

Dla operatorów A i B dziedziną operatora $A + B$ jest część wspólna dziedzin, czyli $D(A + B) = D(A) \cap D(B)$. Z kolei dziedziną operatora AB jest przestrzeń tych wektorów $x \in D(B)$, dla których $Bx \in D(A)$. Wtedy $(AB)x = A(Bx)$. Jeśli operator A jest różnowartościowy na swojej dziedzinie $D(A)$, to dziedziną operatora A^{-1} jest obraz operatora A oraz $A^{-1}(Ax) = x$.

Definicja 10.7. *Dla $z \notin \mathbb{R}$ operator*

$$U_z = (A - zI)(A - \overline{z}I)^{-1}$$

nazywamy ***transformatą Cayley*** *operatora symetrycznego A.*

Uwaga 10.8.

Definicja operatora U_z jest poprawna, bo operator $A - \overline{z}I$ jest różnowartościowy na $D(A)$. Istotnie dla $x \in D(A)$ oraz $x \neq 0$ mamy

$$\operatorname{Im}((A - \overline{z}I)x, x) = \operatorname{Im} z(x, x) \neq 0. \tag{10.1}$$

Nietrudno sprawdzić, że dziedziną operatora U_z jest $D(U_z) = \operatorname{Im}(A - \overline{z}I)$.

Twierdzenie 10.9.

(i) Transformata Cayley jest izometrią z przestrzeni $R_{\overline{z}}$ na przestrzeń R_z.

(ii) Zbiór wektorów $U_z v - v$, gdzie $v \in D(U_z)$, jest gęstą podprzestrzenią w $\mathcal{H}$.

(iii) Każda izometria U spełniająca warunek (ii) jest transformatą Cayley pewnego symetrycznego operatora.

Dowód. (i) Niech $x \in D(A)$. Wtedy z równości

$$\|(A - zI)x\|^2 = \|Ax\|^2 + |z|^2\|x\|^2 - 2(\operatorname{Re} z)(Ax, x)$$

wynika, że

$$\|(A - zI)x\| = \|(A - \overline{z}I)x\|. \tag{10.2}$$

To kończy dowód części (i), ponieważ

$$U_z : (A - \overline{z}I)x \mapsto (A - zI)x.$$

Część (ii) wynika natychmiast ze wzoru

$$(A - zI)x - (A - \overline{z}I)x = 2i(\operatorname{Im} z)x,$$

jeśli przyjmiemy $v = (A - \overline{z}I)x$ dla $x \in D(A)$.

(iii) Najpierw sprawdzimy, że operator $U - I$ jest różnowartościowy. Niech $Uw = w$, dla $w \in D(U)$. Wtedy

$$(Uv - v, w) = (Uv, w) - (v, w) = (Uv, Uw) - (v, w) = 0,$$

dla dowolnego wektora $v \in D(U)$. Z założenia wynika, że $w = 0$.

Określmy

$$A = (zI - \overline{z}U)(I - U)^{-1}. \tag{10.3}$$

Wtedy dziedzina $D(A) = \operatorname{Im}(I - U)$ jest gęstą podprzestrzenią w $\mathcal{H}$. Ponadto

$$A(w - Uw) = zw - \overline{z}Uw.$$

Dalej obliczamy

$$\begin{aligned}(A(w - Uw), w - Uw) &= (zw - \overline{z}Uw, w - Uw) \\ &= (z + \overline{z})(w, w) - \overline{z}(Uw, w) - z(w, Uw) \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Zatem A jest operatorem symetrycznym. Pokażemy, że $U = U_z$. Z równości

$$A - \overline{z}I = (zI - \overline{z}U)(I-U)^{-1} - \overline{z}(I-U)(I-U)^{-1} = (z-\overline{z})(I-U)^{-1},$$
$$A - zI = (zI - \overline{z}U)(I-U)^{-1} - z(I-U)(I-U)^{-1} = (z-\overline{z})U(I-U)^{-1}$$

wynika $\operatorname{Im}(A-\overline{z}I) = \operatorname{Im}(I-U)^{-1} = D(U)$ oraz $U(A-\overline{z}I) = A - zI$. □

Następne twierdzenie jest natychmiastową konsekwencją definicji transformaty Cayley i wzoru (10.3).

Twierdzenie 10.10. *Niech A_1 i A_2 będą operatorami symetrycznymi, których transformaty Cayley są równe $U_{z,1}$ i $U_{z,2}$. Zawieranie $A_1 \subset A_2$ jest równoważne zawieraniu transformat Cayley $U_{z,1} \subset U_{z,2}$.*

Definicja 10.11. *Operator A nazywamy **domkniętym**, jeśli wykres Γ_A operatora A jest domkniętym podzbiorem $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$.*

Lemat 10.12. *Każdy operator symetryczny można rozszerzyć do domkniętego operatora symetrycznego.*

Dowód. Z definicji operatora sprzężonego $\langle x, y\rangle$ należy do Γ_{A^*} wtedy i tylko wtedy, gdy $(Av, x) = (v, y)$ dla każdego $v \in D(A)$. Stąd wykres Γ_{A^*} jest domknięty. Wtedy domknięcie V wykresu Γ_A w $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ jest zawarte w Γ_{A^*}. Zatem V jest wykresem operatora liniowego $\widetilde{A}$. Symetria operatora $\widetilde{A}$ wynika z tego, że jeśli $x_n \xrightarrow{n} x$ oraz $Ax_n \xrightarrow{n} \widetilde{A}x$, to

$$(\widetilde{A}x, x) = \lim_{n\to\infty}(Ax_n, x_n) \in \mathbb{R}.$$

□

Rozszerzenie skonstruowane w dowodzie lematu nazywamy ***domknięciem operatora*** A i oznaczamy symbolem $\bar{A}$.

Lemat 10.13. *Dla operatora symetrycznego A zachodzi równość $\bar{A}^* = A^*$.*

Dowód. Ponieważ $A \subset \bar{A}$, to $(\bar{A})^* \subset A^*$. Niech $\langle x, y\rangle$ należy do Γ_{A^*}. To oznacza, że $(x, Av) = (y, v)$ dla każdego $v \in D(A)$. Dla $w \in D(\bar{A})$ istnieje ciąg $v_n \in D(A)$ taki, że $v_n \to w$ oraz $Av_n \to \bar{A}w$. Zatem $(x, \bar{A}w) = (y, w)$. Stąd $x \in D((\bar{A})^*)$ oraz $(\bar{A})^*x = y$, czyli $\langle x, y\rangle$ należy do $\Gamma_{(\bar{A})^*}$. □

Twierdzenie 10.14. *Operator symetryczny A jest domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy przestrzeń R_z jest domknięta dla pewnej (każdej) wartości $z \notin \mathbb{R}$.*

Dowód. Dla $z = a + bi$, gdzie $b \neq 0$, oraz $v \in D(A)$ mamy

$$\|(A - zI)v\|^2 = \|(A - aI)v\|^2 + |b|^2\|v\|^2 \geqslant |b|^2\|v\|^2. \tag{10.4}$$

Załóżmy, że A jest operatorem domkniętym. Niech $(A - zI)x_n \xrightarrow{n} y$. Podstawiając $v = x_n - x_m$ do wzoru (10.4) wyciągamy wniosek, że ciąg x_n spełnia warunek Cauchy'ego. Zatem $x_n \to x$ dla pewnego wektora $x \in \mathcal{H}$. Otrzymujemy $Ax_n \xrightarrow{n} y + zx$. Z domkniętości operatora A wnioskujemy, że $Ax = y + zx$, czyli $(A - zI)x = y$. To oznacza, że R_z jest podprzestrzenią domkniętą.

Odwrotnie, załóżmy, że podprzestrzeń R_z jest domknięta. Niech $x_n \to x$ oraz $Ax_n \xrightarrow{n} y$. Wtedy $(A - zI)x_n \xrightarrow{n} y - zx$. Z domkniętości podprzestrzeni R_z wynika, że dla pewnego wektora $w \in D(A)$ zachodzi

$$(A - zI)w = y - zx. \tag{10.5}$$

Zatem

$$(A - zI)(x_n - w) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Podstawiamy $v = x_n - w$ do wzoru (10.4), aby otrzymać $x_n \xrightarrow{n} w$. Stąd $x = w$. Teraz z (10.5) dostajemy $(A - zI)x = y - zx$, czyli $Ax = y$. $\square$

Twierdzenie 10.15. *Dla domkniętego operatora symetrycznego A i dla $z \notin \mathbb{R}$ przestrzenie $D(A)$, $N_{\overline{z}}$ oraz N_z są liniowo niezależne oraz*

$$D(A^*) = D(A) + N_{\overline{z}} + N_z.$$

Dowód. Niech $a + b + c = 0$ dla $a \in D(A)$, $b \in N_{\overline{z}}$ i $c \in N_z$. Wtedy z Twierdzenia 10.6 otrzymujemy

$$0 = (A^* - \overline{z}I)(a + b + c) = (A - \overline{z}I)(a) + (z - \overline{z})b.$$

Składniki po prawej stronie są ortogonalne do siebie, bo $(A-\overline{z}I)(a) \in R_{\overline{z}}$ oraz $b \in N_{\overline{z}}$. Zatem $b = 0$ i $(A - \overline{z}I)(a) = 0$. Na podstawie (10.1) wnioskujemy, że $a = 0$. Wtedy $c = 0$.

Z Twierdzenia 10.6 mamy, że $D(A^*) \supseteq D(A) + N_{\overline{z}} + N_z$. Niech $v \in D(A^*)$. Twierdzenie 10.14 implikuje domkniętość podprzestrzeni $R_{\overline{z}}$. Zatem $\mathcal{H} = R_{\overline{z}} + N_{\overline{z}}$. Wektor $(A^* - \overline{z}I)v$ możemy więc rozłożyć w postaci

$$(A^* - \overline{z}I)v = (A - \overline{z}I)a + (z - \overline{z})b,$$

gdzie $a \in D(A)$ oraz $b \in N_{\overline{z}}$. Otrzymujemy

$$(A^* - \overline{z}I)v = (A^* - \overline{z}I)(a + b),$$

czyli

$$(A^* - \overline{z}I)(v - a - b) = 0.$$

To oznacza, że $v - a - b \in N_z$. Stąd $v = a + b + c$, gdzie $c \in N_z$ □

Wniosek 10.16. *Domknięty operator symetryczny jest samosprzężony wtedy i tylko wtedy, gdy jego przestrzenie defektu są zerowe.*

Wniosek 10.17. *Domknięty operator symetryczny jest samosprzężony wtedy i tylko wtedy, gdy $R_z = \mathcal{H}$ i $R_{\overline{z}} = \mathcal{H}$ dla $z \notin R$.*

Definicja 10.18. *Operator symetryczny nazywamy* ***istotnie samosprzężonym****, jeśli jego domknięcie jest operatorem samosprzężonym.*

Na podstawie Lematu 10.13 i Wniosku 10.16 otrzymujemy

Wniosek 10.19. *Operator symetryczny jest istotnie samosprzężony wtedy i tylko wtedy, gdy jego przestrzenie defektu są zerowe.*

Z kolei z Lematu 10.13 i Wniosku 10.17 dostajemy

Wniosek 10.20. *Operator symetryczny jest istotnie samosprzężony wtedy i tylko wtedy, gdy przestrzenie R_z oraz $R_{\overline{z}}$ są gęste w $\mathcal{H}$.*

Lemat 10.21. *Niech A będzie operatorem domkniętym spełniającym*

$$\|Ax\| \geqslant \lambda \|x|, \qquad x \in D(A).$$

Dla dowolnego operatora ograniczonego B spełniającego $\|B\| < \lambda/2$ operator $A + B$ jest domknięty oraz

$$\dim \ker(A + B)^* = \dim \ker A^*.$$

Dowód. Z założenia mamy

$$\|(A + B)x\| \geqslant \frac{\lambda}{2}\|x|, \qquad x \in D(A).$$

Domkniętość operatora $A+B$ wynika natychmiast z ograniczoności operatora B. Ponadto, podobnie jak w dowodzie Twierdzenia 10.14, dowodzimy, że przestrzenie $\operatorname{Im} A$ oraz $\operatorname{Im}(A+B)$ są domknięte. Niech $y \in \ker(A+B)^*$ oraz $\|y\| = 1$. Załóżmy, że y jest ortogonalny do $\ker A^*$. To oznacza, że $y \in \operatorname{Im} A$ (por. dowód Twierdzenia 10.6). Stąd $y = Ax$ dla pewnego wektora $x \in D(A)$. Z założenia otrzymujemy $\|y\| \geqslant \lambda\|x\|$. Ponadto

$$\begin{aligned} 0 = ((A+B)^*y, x) = (y, Ax + Bx) = (y, y) + (y, Bx) \\ \geqslant \|y\|^2 - \|B\|\|x\|\|y\| > \|y\|^2 - \frac{1}{2}\lambda\|x\|\|y\| \geqslant 0, \end{aligned}$$

co prowadzi do sprzeczności. Zatem przestrzeń $\ker(A+B)^*$ nie posiada niezerowego wektora ortogonalnego do $\ker A^*$. To oznacza, że[†]

$$\dim\ker(A+B)^* \leqslant \dim\ker A^*.$$

Podobnie pokazujemy nierówność w drugą stronę stosując poprzednie rozumowanie dla operatorów $A' = A + B$ oraz $B' = -B$. □

Wniosek 10.22. *Dla operatora symetrycznego A i dowolnej liczby zespolonej z, spełniającej* $\operatorname{Im} z > 0$ *mamy*

$$\dim N_{\overline{z}} = \dim N_{-i}, \qquad \dim N_z = \dim N_i.$$

Dowód. Możemy założyć, że A jest domknięty. Niech $\operatorname{Im} z_0 = b \neq 0$. Wiemy, że (por. (10.4))

$$\|(A - z_0 I)x\| \geqslant |b|\|x\|, \qquad x \in D(A).$$

Z Lematu 10.21 zastosowanego do $A - z_0 I$ oraz $B = (z_0 - z)I$ wynika, że liczba $\dim N_z$ jest stała dla $|z - z_0| < |b|/2$. Zatem wartość $\dim N_z$ jest stała w każdej z półpłaszczyzn $\operatorname{Im} z > 0$ i $\operatorname{Im} z < 0$. □

Liczby $\dim N_i$ oraz $\dim N_{-i}$ nazywamy ***indeksami defektu*** operatora symetrycznego A. Z Wniosku 10.16 domknięty operator symetryczny jest samosprzężony wtedy i tylko wtedy, gdy jego indeksy defektu są równe zero.

Twierdzenie 10.23. *Niech A będzie domkniętym operatorem symetrycznym natomiast B ograniczonym operatorem samosprzężonym. Wtedy operatory A i $A + B$ mają te same indeksy defektu.*

[†]por. Zadanie 56

Dowód. Niech $\lambda = 3\|B\|$. Skorzystamy z nierówności (10.4)

$$\|(A \pm \lambda i I)x\| \geqslant \lambda \|x\|, \qquad x \in D(A).$$

Wtedy z Lematu 10.21 zastosowanego do $A \pm \lambda i I$ otrzymujemy

$$\dim \ker((A + B)^* \mp \lambda i I) = \dim \ker(A \mp \lambda i I).$$

Z Wniosku 10.22 indeksy defektu operatorów A i $A + B$ są zatem równe. $\square$

Twierdzenie 10.24. *Operator symetryczny posiada samosprzężone rozszerzenie wtedy i tylko wtedy, gdy jego indeksy defektu są równe sobie. Każde samosprzężone rozszerzenie można utożsamić z izometrią z podprzestrzeni N_{-i} na podprzestrzeń N_i.*

Dowód. Na podstawie Lematu 10.12 możemy założyć, że operator A jest domknięty, bo w razie konieczności możemy go zastąpić domkniętym symetrycznym rozszerzeniem. Załóżmy, że $\dim N_i = \dim N_{-i}$. Niech V_1 będzie dowolną izometrią z N_{-i} na N_i. Przez V_2 oznaczymy transformatę Cayley'a operatora A odpowiadającą liczbie i. Wiemy, że V_2 jest izometrią odwzorowującą R_{-i} na R_i. Określmy operator U na przestrzeni $\mathcal{H} = N_{-i} + R_{-i}$ przez

$$U|_{N_{-i}} = V_1, \qquad U|_{R_{-i}} = V_2.$$

Wtedy U jest operatorem unitarnym oraz $V_2 \subset U$. Z Twierdzenia 10.9 odwzorowanie U jest transformatą Cayley'a operatora symetrycznego $\widetilde{A}$. Z Twierdzenia 10.10 operator $\widetilde{A}$ jest rozszerzeniem operatora A. Ponieważ U jest operatorem unitarnym, to $\mathrm{Im}\,(\widetilde{A} - iI) = \mathrm{Im}\,(\widetilde{A} + iI) = \mathcal{H}$. Zatem indeksy defektu operatora $\widetilde{A}$ są równe zero, czyli $(\widetilde{A})^* = \widetilde{A}$.

Odwrotnie, załóżmy, że $A \subset \widetilde{A}$ oraz $(\widetilde{A})^* = \widetilde{A}$. Wtedy transformata Cayley U_i operatora $\widetilde{A}$ jest operatorem unitarnym. Z Twierdzenia 10.10 odwzorowanie U_i jest rozszerzeniem transformaty Cayley V_i operatora A. Zatem $U_i(R_{-i}) = V_i(R_{-i}) = R_i$. Z unitarności operatora U_i wynika, że $U(N_{-i}) = N_i$. Stąd $\dim N_{-i} = \dim N_i$. $\square$

Definicja 10.25. *Odwzorowanie $C : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ nazywamy* ***sprzężeniem****, jeśli C jest antyliniowe, $C^2 = I$, oraz C zachowuje normę, tzn. $\|Cx\| = \|x\|$, dla $x \in \mathcal{H}$.*

Twierdzenie 10.26. *Niech A będzie operatorem symetrycznym. Załóżmy, ze istnieje sprzężenie C spełniające $C : D(A) \to D(A)$ oraz $AC = CA$. Wtedy operator A posiada samosprzężone rozszerzenie.*

Dowód. Z tożsamości polaryzacyjnej i z antyliniowości operatora C otrzymujemy

$$(Cx, Cy) = (y, x), \qquad \text{dla } x, y \in \mathcal{H}.$$

Pokażemy, że wymiary N_i i N_{-i} są równe. Najpierw udowodnimy, że C odwzorowuje N_i w N_{-i}. Niech $x \in N_i$ i $y \in D(A)$. Wtedy

$$0 = ((A^* + iI)x, Cy) = (x, (A - iI)Cy) = (x, C(A + iI)y) = ((A + iI)y, Cx).$$

Zatem $Cx \in \ker(A^* - iI) = N_{-i}$. Podobnie dowodzimy, że C odwzorowuje N_{-i} w N_i. Ponieważ C jest bijekcją, to $\dim N_{-i} = \dim N_i$. □

11 Problem momentów Hamburgera jako samosprzężone rozszerzenie operatora symetrycznego

Dla ciągu momentów Hamburgera $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ niech J będzie odpowiadającą temu ciągowi macierzą Jacobi'ego. Macierz J możemy traktować jako operator liniowy w przestrzeni Hilberta $\ell^2(\mathbb{N})$ z dziedziną

$$D(J) = \operatorname{lin}\{\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_n, \ldots\}.$$

Jak wiemy, J jest operatorem symetrycznym oraz

$$\begin{aligned} J\delta_n &= \lambda_n \delta_{n+1} + \beta_n \delta_n + \lambda_{n-1}\delta_{n-1}, \quad n \geqslant 1 \\ J\delta_0 &= \lambda_0 \delta_1 + \beta_0 \delta_0. \end{aligned}$$

Przyjmując umowę, że $\lambda_{-1} = \delta_{-1} = 0$ działanie J można zapisać jednym wzorem

$$J\delta_n = \lambda_n \delta_{n+1} + \beta_n \delta_n + \lambda_{n-1}\delta_{n-1}, \quad n \geqslant 0.$$

Operator C określony przez

$$C\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \delta_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n}\delta_n$$

jest sprzężeniem na $\ell^2(\mathbb{N})$. Co więcej $JC = CJ$, zatem J posiada samosprzężone rozszerzenia na podstawie Twierdzenia 10.26.

Zbadajmy przestrzenie defektu dla operatora J. W tym celu rozwiązujemy równanie
$$(J^* - zI)v = 0$$
dla $z \notin \mathbb{R}$ i dla $v \in D(J^*)$. Otrzymujemy
$$0 = ((J^* - zI)v, \delta_n) = (v, (J - \overline{z}I)\delta_n) = (v, \lambda_n\delta_{n+1} + \beta_n\delta_n + \lambda_{n-1}\delta_{n-1} - \overline{z}\delta_n).$$
Przy oznaczeniu $v_n = (v, \delta_n)$ dostajemy
$$zv_n = \lambda_n v_{n+1} + \beta_n v_n + \lambda_{n-1}v_{n-1}, \quad n \geqslant 0.$$
Stąd wnioskujemy, że $v_n = v_0 p_n(z)$.

Wniosek 11.1. *Przestrzeń defektu $N_{\overline{z}}$ jest niezerowa wtedy i tylko wtedy, gdy* $\sum_{n=0}^{\infty} |p_n(z)|^2 < +\infty$.

Twierdzenie 11.2. *Problem momentów Hamburgera $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ jest zdeterminowany wtedy i tylko wtedy, gdy macierz Jacobi'ego J jest istotnie samosprzężona.*

Symbolem $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ oznaczamy układ wielomianów ortonormalnych związany z ciągiem momentów Hamburgera $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$. Niech $\mathcal{H}$ będzie uzupełnieniem przestrzeni $\mathbb{P}$ wielomianów względem iloczynu skalarnego wyznaczonego przez momenty. Wtedy układ $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ stanowi bazę ortonormalną przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Niech U będzie operatorem liniowym z przestrzeni $\ell^2(\mathbb{N})$ w przestrzeń $\mathcal{H}$ określonym przez
$$U\delta_n = p_n. \tag{11.1}$$
U jest operatorem unitarnym, bo odwzorowuje bazę ortonormalną przestrzeni $\ell^2(\mathbb{N})$ na bazę ortonormalną przestrzeni $\mathcal{H}$.

W przestrzeni $\mathcal{H}$ określamy operator M z dziedziną $D(M) = \mathbb{P}$ wzorem $(Mp)(x) = xp(x)$. Operator M jest symetryczny, bo $(Mx^k, x^l) = (x^k, Mx^l) = m_{k+l+1}$. Zauważmy, że $UD(J) = D(M)$ oraz
$$UJU^{-1} = M. \tag{11.2}$$
Rzeczywiście, równość (11.2) wystarczy sprawdzić na bazie przestrzeni $\mathcal{H}$.
$$\begin{aligned} UJU^{-1}p_n = UJ\delta_n &= U(\lambda_n\delta_{n+1} + \beta_n\delta_n + \lambda_{n-1}\delta_{n-1}) \\ &= \lambda_n p_{n+1} + \beta_n p_n + \lambda_{n-1}p_{n-1} = xp_n = Mp_n. \end{aligned}$$

Rozważania powyższe dowodzą, że operator J jest unitarnie równoważny z operatorem M. W szczególności J jest istotnie samosprzężony wtedy i tylko wtedy, gdy M jest istotnie samosprzężony. Ponadto każde samosprzężone rozszerzenie $\widetilde{M}$ operatora M wyznacza samosprzężone rozszerzenie $\widetilde{J}$ operatora J wzorem $\widetilde{J} = U^{-1}\widetilde{M}U$.

Lemat 11.3. *Zachodzi wzór* $p_n(J)\delta_0 = \delta_n$.

Dowód. Ze wzoru (11.2) wynika, że $p_n(J) = U^{-1}p_n(M)U$. Zatem

$$p_n(J)\delta_0 = U^{-1}p_n(M)U\delta_0 = U^{-1}p_n(M)1 = U^{-1}p_n = \delta_n.$$

□

Dowód następnego lematu pozostawiamy czytelnikowi.

Lemat 11.4. *Niech σ będzie miarą probabilistyczną na prostej a M_x operatorem liniowym w przestrzeni $L^2(\mathbb{R},\sigma)$ określonym wzorem $M_xf(x) = xf(x)$ z dziedziną*

$$D(M_x) = \{f \in L^2(\mathbb{R},\sigma)\ :\ xf \in L^2(\mathbb{R},\sigma)\}.$$

Wtedy M_x jest operatorem samosprzężonym. Rozkład jedności[‡] *$F(x)$ związany z M_x ma postać $F(x)f = \chi_{(-\infty,x)}f$, dla $f \in L^2(\mathbb{R},\sigma)$.*

Twierdzenie 11.5. *Niech $\widetilde{J}$ będzie samosprzężonym rozszerzeniem operatora J. Niech $E(x)$ będzie rozkładem jedności związanym z $\widetilde{J}$. Wtedy miara $d\sigma(x) = d(E(x)\delta_0,\delta_0)$ jest N-ekstremalnym rozwiązaniem problemu momentów $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$. Każde N-ekstremalne rozwiązanie może być otrzymane w ten sposób.*

Dowód. Dla odróżnienia iloczynów skalarnych w $\ell^2(\mathbb{N})$ i w przestrzeni wielomianów, ten pierwszy oznaczymy przez $(\cdot,\cdot)_{\ell^2}$. Z Lematu 11.3 mamy

$$(p_n(J)\delta_0, p_m(J)\delta_0)_{\ell^2} = (p_n, p_m).$$

Zatem

$$(J^k\delta_0, J^l\delta_0)_{\ell^2} = (x^k, x^l) = m_{k+l}. \tag{11.3}$$

Mamy $\delta_0 \in D(J^n) \subset D(\widetilde{J}^n)$. Zatem

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n}\, d\sigma(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n}\, d(E(x)\delta_0,\delta_0)_{\ell^2} < +\infty.$$

[‡]Podstawowe fakty dotyczące twierdzenia spektralnego są umieszczone w Dodatku.

Ponadto z (11.3) wynika, że

$$m_n = (J^n\delta_0, \delta_0)_{\ell^2} = (\widetilde{J}^n\delta_0, \delta_0)_{\ell^2} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^n \, d(E(x)\delta_0, \delta_0)_{\ell^2} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^n \, d\sigma(x).$$

Pokażemy, że wielomiany tworzą gęstą podprzestrzeń w $L^2(\mathbb{R}, \sigma)$. Niech $f \in C_c(\mathbb{R})$. Wtedy operator $f(\widetilde{J})$ jest ograniczony oraz

$$\begin{aligned} a_n = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)p_n(x)\, d\sigma(x) &= (p_n(\widetilde{J})\, f(\widetilde{J})\delta_0, \delta_0)_{\ell^2} \\ &= (f(\widetilde{J})\delta_0, p_n(\widetilde{J})\delta_0)_{\ell^2} = (f(\widetilde{J})\delta_0, \delta_n)_{\ell^2}. \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, d\sigma(x) &= (\overline{f}(\widetilde{J})f(\widetilde{J})\delta_0, \delta_0)_{\ell^2} \\ &= \|f(\widetilde{J})\delta_0\|^2_{\ell^2} = \sum_{n=0}^{\infty} |(f(\widetilde{J})\delta_0, \delta_n)_{\ell^2}|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2. \end{aligned}$$

Ostatnia równość oznacza, że funkcja f może być przybliżona wielomianami w normie przestrzeni $L^2(\mathbb{R}, \sigma)$. Zatem σ jest N-ekstremalnym rozwiązaniem problemu momentów $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Pokażemy, że każdemu N-ekstremalnemu rozwiązaniu odpowiada samosprzężone rozszerzenie operatora J. Niech σ będzie N-ekstremalnym rozwiązaniem problemu momentów. Wtedy przestrzeń $\mathcal{H}$ określona po Twierdzeniu 11.2 można utożsamić z przestrzenią $L^2(\mathbb{R}, \sigma)$, bo wielomiany leżą gęsto w $L^2(\mathbb{R}, \sigma)$. Zatem U określony w (11.1) jest operatorem unitarnym z $\ell^2(\mathbb{N})$ na $L^2(\mathbb{R}, \sigma)$. Ze wzoru (11.2) operator J jest unitarnie równoważny z operatorem M. Z kolei z Lematu 11.4 operator M posiada samosprzężone rozszerzenie M_x, bo dziedzina operatora M_x zawiera wielomiany. Wtedy operator J posiada samosprzężone rozszerzenie $\widetilde{J} = U^{-1}M_xU$. Rozkład jedności $E(x)$ związany z operatorem $\widetilde{J}$ otrzymujemy z rozkładu jedności $F(x)$ związanego z operatorem M_x za pomocą wzoru $E(x) = U^{-1}F(x)U$. Znowu korzystamy z Lematu 11.4, aby otrzymać

$$\begin{aligned} (E(x)\delta_0, \delta_0)_{\ell^2} &= (U^{-1}F(x)U\delta_0, \delta_0)_{\ell^2} \\ &= (F(x)1, 1) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \chi_{(-\infty,x)}(y)\, d\sigma(y) = \sigma((-\infty, x)). \end{aligned}$$

□

12 Wektory analityczne i wektory jednoznaczności

Definicja 12.1. *Dla operatora symetrycznego A zbiór*

$$C^\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$$

nazywamy przestrzenią wektorów gładkich operatora A. Wektor $v \in C^\infty(A)$ nazywamy ***analitycznym****, jeśli dla pewnej liczby $t > 0$ mamy*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A^n x\|}{n!} t^n < \infty.$$

Przykład 12.2.

Rozważmy operator $A = i\dfrac{d}{dx}$ w przestrzeni $L^2(\mathbb{R}, dx)$ z dziedziną $C_c'(\mathbb{R})$. Funkcje $C_c^\infty(\mathbb{R})$ są wektorami gładkimi. Niech $f(z)$ będzie funkcją całkowitą spełniającą oszacowanie $|f(z)| \leqslant ce^{a|z|}$ dla pewnych stałych c, a i wszystkich liczb $z \in \mathbb{C}$, oraz $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx < +\infty$. Z twierdzenia Paley-Wienera funkcja $f(z)$ ma postać

$$f(z) = \int_{-a}^{a} g(y) e^{-iyz}\, dy,$$

dla pewnej funkcji $g \in L^2(\mathbb{R}, dx)$. Wtedy

$$A^n f(x) = \int_{-a}^{a} y^n g(y) e^{-iyx}\, dy.$$

Ze wzoru Plancherela otrzymujemy zatem

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |A^n f(x)|^2\, dx &= 2\pi \int_{-a}^{a} y^{2n} |g(y)|^2\, dy \\ &\leqslant 2\pi a^{2n} \int_{-a}^{a} |g(y)|^2\, dy = a^{2n} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx.\end{aligned}$$

Dostajemy oszacowanie $\|A^n f\|_2 \leqslant a^n \|f\|_2$, z którego wynika, że f jest wektorem analitycznym.

Jeśli operator A jest samosprzężony, to wektory analityczne tego operatora tworzą gęstą podprzestrzeń w $D(A)$. Rzeczywiście, mamy

$$D(A) = \left\{ v \in \mathcal{H} \,:\, \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 d(E(x), v, v) < +\infty \right\}.$$

Dla $k \in \mathbb{N}$ niech $\mathcal{H}_k = (E_k - E_{-k})\mathcal{H}$. Zatem

$$E(x)(E(k) - E(-k)) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < -k, \\ E(k) - E(-k) & \text{dla } x > k. \end{cases}$$

Dla wektora $v \in \mathcal{H}_k$ mamy wtedy

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^{2n}\, d(E(x)v, v) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^{2n}\, d(E(x)(E(k) - E(-k))v, v)$$
$$== \int\limits_{[-k,k]} x^{2n}\, d(E(x)v, v) \leqslant k^{2n} \|v\|^2.$$

Stąd $v \in D(A^n)$ dla dowolnej liczby n oraz

$$(A^n v, A^n v) = (A^{2n} v, v) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^{2n} d(E(x)v, v) \leqslant k^{2n} \|v\|^2.$$

Otrzymujemy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A^n v\|}{n!}\, t^n \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n \|v\|}{n!}\, t^n < +\infty.$$

Wektory z $\mathcal{H}_k$ są więc analityczne. Ponieważ

$$\mathcal{H} = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}_k}$$

to wektory analityczne leżą gęsto w $\mathcal{H}$.

Definicja 12.3. *Niech $v \in C^\infty(A)$ oraz*

$$\begin{aligned} D_v &= \{p(A)v \ : \ p \in \mathbb{P}\}, \\ \mathcal{H}_v &= \overline{D_v}. \end{aligned}$$

Wektor v nazywamy ***wektorem jednoznaczności****, jeśli operator A ograniczony do dziedziny D_v jest istotnie samosprzężony jako operator w $\mathcal{H}_v$.*

Definicja 12.4. *Podzbiór $V \subset C^\infty(A)$ nazywamy* ***totalnym****, jeśli zbiór $\{p(A)v \ : \ v \in V, \ p \in \mathbb{P}\}$ jest liniowo gęsty w $\mathcal{H}$.*

Twierdzenie 12.5 (Nussbaum)**.** *Załóżmy, że dla operatora symetrycznego dziedzina $D(A)$ zawiera totalny podzbiór wektorów jednoznaczności. Wtedy A jest operatorem istotnie samosprzężonym.*

Dowód. Z Wniosku 10.20 wystarczy pokazać, że przestrzenie R_i oraz R_{-i} są gęste w $\mathcal{H}$. Ustalmy wektor $v \in \mathcal{H}$ oraz liczbę $\varepsilon > 0$. Z założenia można znaleźć wektory jednoznaczności $v_1, v_2, \ldots, v_n \in C^\infty(A)$ oraz wielomiany $P_1, P_2, \ldots, P_n$ spełniające

$$\|v - [P_1(A)v_1 + P_2(A)v_2 + \ldots + P_n(A)v_n]\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ponieważ v_i są wektorami jednoznaczności, to istnieją wektory $u_1, u_2, \ldots, u_n$ takie, że $u_i \in D_{v_i} \subset C^\infty(A)$ oraz

$$\|P_i(A)v_i - (A - iI)u_i\| < \frac{\varepsilon}{2n}.$$

Wtedy $u_1 + u_2 + \ldots + u_n \in C^\infty(A)$ i

$$\|v - (A - iI)(u_1 + u_2 + \ldots u_n)\| < \varepsilon.$$

□

Twierdzenie 12.6. *Załóżmy, że dla operatora symetrycznego A oraz dla wektora $v \in C^\infty(A)$ spełniony jest warunek $\sum_{n=1}^{\infty} \|A^n v\|^{-1/n} = +\infty$. Wtedy v jest wektorem jednoznaczności.*

Dowód. Możemy założyć, że $\|v\| = 1$. Rozważmy ciąg wektorów $\{A^n v\}_{n=0}^{\infty}$. Jeśli wektory tego ciągu są liniowo zależne, to przestrzeń liniowa określona w Definicji 12.3 ma skończony wymiar. Wtedy A jest operatorem ograniczonym na $\mathcal{H}_v$. W szczególności A jest tam samosprzężony. Załóżmy zatem, że wektory ciągu $\{A^n v\}_{n=0}^{\infty}$ są liniowo niezależne. Wtedy ciąg $m_n = (A^n v, v)$ jest ciągiem momentów Hamburgera. Z założenia mamy $\sum_{n=1}^{\infty} m_{2n}^{-1/(2n)} = +\infty$. Zatem z kryterium Carlemana (patrz zadanie 36) macierz Jacobi'ego J związana z tym ciągiem jest istotnie samosprzężona. Niech $\mathcal{H}_m$ oznacza uzupełnienie przestrzeni $\mathbb{P}$ względem iloczynu skalarnego wyznaczonego przez ciąg $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$. Wtedy operator M mnożenia przez x z dziedziną $\mathbb{P}$ jest istotnie samosprzężony. Rozważmy odwzorowanie liniowe $U:\ D_v \to \mathbb{P}$ określone przez $U(A^n v) = x^n$. Ponieważ U zachowuje iloczyn skalarny, to można rozszerzyć U do operatora unitarnego z $\mathcal{H}_v$ na $\mathcal{H}_m$. Operator U wiąże operatory $A|_{D_v}$ i M poprzez $A|_{D_v} = U^{-1} M U$. Zatem $A|_{D_v}$ jest również istotnie samosprzężony. □

Wniosek 12.7. *Każdy wektor analityczny operatora symetrycznego jest wektorem jednoznaczności.*

Dowód. Załóżmy, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|A^n v\|}{n!} t^n < +\infty$ dla pewnej liczby $t > 0$. Wtedy

$$\frac{\|A^n v\|}{n^n} t^n \leqslant \frac{\|A^n v\|}{n!} t^n \leqslant 1$$

dla $n \geqslant N$. Zatem $\|A^n v\|^{-1/n} \geqslant \frac{t}{n}$ dla $n > N$. Z Twierdzenia 12.6 wynika, że v jest wektorem jednoznaczności. □

Wniosek 12.8 (Twierdzenia Nelsona)**.** *Załóżmy, że dziedzina operatora symetrycznego A zawiera totalny podzbiór wektorów analitycznych. Wtedy A jest operatorem istotnie samosprzężonym.*

13 Problem momentów Stieltjesa i rozszerzenia operatorów nieujemnych

Definicja 13.1. *Operator A nazywamy nieujemnym, jeśli $(Ax, x) \geqslant 0$, dla każdego wektora $x \in D(A)$.*

W szczególności operator nieujemny jest symetryczny.

Twierdzenie 13.2. *Indeksy defektu operatora nieujemnego są sobie równe. Operator A jest istotnie samosprzężony wtedy i tylko wtedy, gdy przestrzeń $N = \ker(A^* + I)$ jest trywialna.*

Dowód. Domknięcie operatora A jest znowu operatorem nieujemnym. Zatem bez straty ogólności możemy założyć, że A jest operatorem domkniętym. Mamy

$$\|(A+I)v\|^2 = \|Av\|^2 + 2(Av, v) + \|v\|^2 \geqslant \|v\|^2.$$

Podobnie jak w dowodzie Twierdzenia 10.14 wnioskujemy, że przestrzeń $R_{-1} = \mathrm{Im}\,(A+I)$ jest domknięta. Z Lematu 10.21 zastosowanego do $A+I$ oraz do $B = -(\overline{z}+1)I$ otrzymujemy równość

$$\dim\ker(A^* - zI) = \dim\ker(A^* + I)$$

dla $|z+1| < 1/2$. □

Z dowodu Twierdzenia 13.2 otrzymujemy następujący wniosek.

Wniosek 13.3. *Symetryczny domknięty operator nieujemny jest samosprzężony wiedy i tylko wtedy, gdy* $\mathrm{Im}\,(A+I) = \mathcal{H}$.

Dla operatora A możemy określić formę kwadratową $q(x, y)$ wzorem

$$q(x, y) = (x, Ay), \qquad x \in D(A).$$

Jeśli operator A jest symetryczny, to $q(y, x) = \overline{q(x, y)}$. Z kolei, jeśli A jest nieujemny, to $q(x, x) \geqslant 0$ dla $x \in D(A)$.

Ogólnie formą kwadratową $q(x, y)$ określoną na podprzestrzeni $D(q) \subset \mathcal{H}$ nazywamy odwzorowanie $q : D(q) \times D(q) \to \mathcal{H}$, które jest liniowe ze względu na pierwszą zmienną i antyliniowe ze względu na drugą zmienną.

Formę kwadratową nazywamy ***nieujemną***, jeśli $q(x, x) \geqslant 0$ dla $x \in D(q)$. Nieujemną formę kwadratową nazywamy ***domkniętą***, jeśli z faktu $x_n \in D(q)$, $x_n \to x$ oraz $q(x_n - x_m, x_n - x_m) \to 0$, przy $n, m \to \infty$ wynika, że $x \in D(q)$ oraz $q(x_n - x, x_n - x) \to 0$. Równoważnie, nieujemna forma $q(x, y)$ jest domknięta wtedy i tylko wtedy, gdy przestrzeń $\mathcal{H}_q = D(q)$ jest zupełna względem normy

$$\|x\|_q = \sqrt{\|x\|^2 + q(x, x)}.$$

Przykład 13.4.

Niech A będzie operatorem domkniętym o gęstej dziedzinie $D(A)$. Wtedy forma kwadratowa

$$q(x, y) = (Ax, Ay), \qquad D(q) = D(A)$$

jest domknięta. Rzeczywiście, jeśli $x_n \to x$ oraz $q(x_n - x_m, x_n - x_m) \to 0$, to Ax_n jest ciągiem Cauchy'ego w $\mathcal{H}$. Niech $Ax_n \to y$. Z domkniętości operatora A otrzymujemy $x \in D(A)$ oraz $Ax = y$.

Lemat 13.5. *Niech B będzie różnowartościowym operatorem samosprzężonym. Wtedy operator B^{-1} jest samosprzężony.*

Dowód. Ponieważ B jest różnowartościowy, to przestrzeń $\operatorname{Im} B$ jest gęsta w $\mathcal{H}$. Z samosprzężoności wynika, że wykres operatora B jest domknięty, zatem wykres operatora B^{-1} jest również domknięty. Niech $C = B^{-1}$. Mamy $D(C) = \operatorname{Im} B$ oraz $(CBx, Bx) = (x, Bx) \in \mathbb{R}$. Zatem C jest operatorem symetrycznym o gęstej dziedzinie. Dla zakończenia dowodu wystarczy pokazać, że przestrzenie defektu operatora C są zerowe. Niech $C^*x = \pm ix$. Wtedy

$$(x, y) = (x, CBy) = (C^*x, By) = \pm i(x, By), \qquad y \in D(B).$$

Zatem $(x, (I \mp iB)y) = 0$ dla $y \in D(B)$. Ale z samosprzężoności operatora B mamy $\operatorname{Im}(I \mp iB) = \mathcal{H}$, czyli $x = 0$. $\square$

Twierdzenie 13.6. *Dla każdej domkniętej nieujemnej formy kwadratowej $q(x, y)$ istnieje operator samosprzężony A taki, że dziedzina $D(A)$ jest gęsta w $D(q)$ oraz $q(x, y) = (x, Ay)$ dla $x, y \in D(A)$.*

Dowód. Z założenia $\mathcal{H}_q = D(q)$ jest przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym

$$(x, y)_q = (x, y) + q(x, y).$$

Każdy wektor $y \in \mathcal{H}$ wyznacza ograniczony funkcjonał liniowy na przestrzeni $\mathcal{H}_q$ wzorem

$$\mathcal{H}_q \ni x \mapsto (x, y),$$

bo

$$|(x, y)| \leqslant \|y\|\|x\| \leqslant \|y\|\|x\|_q,$$

gdzie $\|x\|_q = (x, x)_q^{1/2}$. Z Twierdzenia Riesza istnieje jedyny wektor $By \in \mathcal{H}_q$ taki, że

$$(x, y) = (x, By)_q, \qquad x \in \mathcal{H}. \tag{13.1}$$

Przyporządkowanie $y \mapsto By$ jest odwzorowaniem liniowym określonym na $\mathcal{H}$ oraz $\operatorname{Im} B \subset \mathcal{H}_q \subset \mathcal{H}$. Co więcej B jest ograniczonym różnowartościowym operatorem samosprzężonym na $\mathcal{H}$. Istotnie z (13.1) otrzymujemy

$$(By, By) \leqslant (By, By)_q = (By, y) \leqslant \|By\| \|y\|.$$

Różnowartościowość wynika ze wzoru $(y, y) = (y, By)_q$. Ponadto obraz operatora B jest gęsty w $\mathcal{H}_q$. Rzeczywiście, załóżmy, że wektor $x \in \mathcal{H}_q$ jest ortogonalny do obrazu operatora B. Wtedy

$$(x, y) = (x, By)_q = 0, \qquad y \in \mathcal{H}.$$

Zatem $x = 0$.

Z Lematu 13.5 operator B^{-1} jest samosprzężony. Ze wzoru (13.1) wnioskujemy, że dla $x, z \in \operatorname{Im} B$

$$q(x, z) = (x, B^{-1}z) - (x, z) = (x, (B^{-1} - I)z).$$

$\square$

Uwaga 13.7.
Z dowodu wynika, że dziedziną operatora A jest zbiór

$$D(A) = \{z \in \mathcal{H} : \exists_{y\in\mathcal{H}} \forall_{x\in D(q)}\ (x,z) + q(x,z) = (x,y)\}$$

Jeśli $z \in D(A)$ oraz $(x,z) + q(x,z) = (x,y)$ dla pewnego $y \in \mathcal{H}$ i wszystkich $x \in D(q)$, to $Az = y - z$.

Wniosek 13.8. *Niech A będzie operatorem domkniętym o gęstej dziedzinie. Wtedy złożenie A^*A jest operatorem samosprzężonym.*

Dowód. Na podstawie Przykładu 13.4 forma $q(x,y) = (Ax, Ay)$ określona na $D(q) = D(A)$ jest domknięta. Z Twierdzenia 13.6 istnieje operator samosprzężony S taki, że dziedzina $D(S)$ jest gęstym podzbiorem w $D(A)$ oraz

$$(Ax, Ay) = (x, Sy), \qquad x, y \in D(S).$$

Z gęstości dziedziny $D(S)$ w $D(A)$ i z domkniętości operatora A wynika, że

$$(Ax, Ay) = (x, Sy), \qquad x \in D(A),\ y \in D(S).$$

Zatem $Ay \in D(A^*)$ oraz $A^*Ay = Sy$. Stąd $S \subset A^*A$. Ale operator A^*A jest symetryczny, bo jeśli $x, y \in D(A^*A)$, to

$$(A^*Ax, y) = (Ax, Ay) = (x, A^*Ay).$$

Stąd $S = A^*A$. □

Mówimy, że forma kwadratowa $q(x,y)$ określona na $\mathcal{H}_q \subset \mathcal{H}$ jest ***domykalna***, jeśli istnieje domknięta forma kwadratowa $\widetilde{q}(x,y)$ określona na $\mathcal{H}_{\widetilde{q}} \supset \mathcal{H}_q$ taka, że $\widetilde{q}(x,y) = q(x,y)$ dla $x, y \in \mathcal{H}_q$. Można pokazać, że forma kwadratowa jest domykalna wtedy i tylko wtedy, gdy z warunku $\|x_n - x_m\|_q \to 0$ i $\|x_n\| \to 0$ wynika, że $\|x_n\|_q \to 0$.

Twierdzenie 13.9 (Rozszerzenie Friedrichsa)**.** *Niech A będzie nieujemnym operatorem symetrycznym. Wtedy forma kwadratowa jest $q(x,y) = (x, Ay)$ określona na $D(q) = D(A)$ jest domykalna. Domknięcie $\widetilde{q}$ formy q odpowiada samosprzężonemu rozszerzeniu $\widetilde{A}$ operatora A. Operator $\widetilde{A}$ jest nieujemny oraz*

$$\inf\{(x, \widetilde{A}x) : x \in D(\widetilde{A}),\ \|x\| = 1\} = \inf\{(x, Ax) : x \in D(A),\ \|x\| = 1\}$$

Dowód. Dla $x, y \in \mathcal{H}_q = D(A)$ określamy iloczyn skalarny i normę wzorem

$$(x, y)_q = (x, y) + q(x, y), \quad \|x\|_q = (x, x)_q^{1/2}.$$

Niech $\mathcal{H}_{\widetilde{q}}$ oznacza uzupełnienie przestrzeni $\mathcal{H}_q$ względem normy $\|\cdot\|_q$. Rozszerzenie normy na tę przestrzeń oznaczymy przez $\|\cdot\|_{\widetilde{q}}$. Pokażemy, że $\mathcal{H}_{\widetilde{q}}$ jest podprzestrzenią w $\mathcal{H}$. W tym celu rozważmy włożenie $i : \mathcal{H}_q \to \mathcal{H}$ dane wzorem $i(x) = x$. Ponieważ $\|x\| \leqslant \|x\|_q$, dla $x \in \mathcal{H}_q$, to i rozszerza się do ograniczonego odwzorowania $\widetilde{i}$ z $\mathcal{H}_{\widetilde{q}}$ w $\mathcal{H}$. Wystarczy wykazać, że $\widetilde{i}$ jest odwzorowaniem różnowartościowym. Załóżmy więc, że $\widetilde{i}(x) = 0$ dla $x \in \mathcal{H}_{\widetilde{q}}$. Wtedy istnieje ciąg elementów $x_n \in \mathcal{H}_q$ taki, że $\|x_n\|_q \to \|x\|_{\widetilde{q}}$ oraz $\|x_n\| \to 0$. Zatem

$$\|x\|_{\widetilde{q}}^2 = \lim_{n,m\to\infty}(x_n, x_m)_q \lim_{n,m\to\infty}[(x_n, Ax_m) + (x_n, x_m)] = 0.$$

W przestrzeni $\mathcal{H}_{\widetilde{q}}$ określamy formę $\widetilde{q}(x, y)$ wzorem

$$\widetilde{q}(x, y) = \lim_{n\to\infty} q(x_n, y_n),$$

jeśli $x_n, y_n \in \mathcal{H}_q$ oraz $\|x_n - x\|_q \to 0$ i $\|y_n - y\|_q \to 0$. Forma $\widetilde{q}$ jest domknięta, bo przestrzeń $\mathcal{H}_{\widetilde{q}}$ jest zupełna względem normy $\|\cdot\|_{\widetilde{q}}$. Z Twierdzenia 13.6 istnieje nieujemny samosprzężony operator $\widetilde{A}$ taki, że dziedzina $D(\widetilde{A})$ jest gęstą podprzestrzenią w $\mathcal{H}_{\widetilde{q}}$ oraz $q(x, y) = (x, \widetilde{A}y)$ dla $x \in D(\widetilde{A})$. Z Uwagi 13.7 wynika, że dziedzina operatora $\widetilde{A}$ zawiera dziedzinę operatora A oraz, że $\widetilde{A}x = Ax$ dla $x \in D(A)$.

Niech $m = \inf\{(x, Ax) : x \in D(A), \|x\| = 1\}$. Z konstrukcji formy $\widetilde{q}$ mamy $m = \inf\{\widetilde{q}(x, x) : x \in \mathcal{H}_{\widetilde{q}}, \|x\| = 1\}$. To pociąga

$$m \leqslant \inf\{(x, \widetilde{A}x) : x \in D(\widetilde{A}), \|x\| = 1\}.$$

Nierówność w przeciwną stronę wynika z tego, że $\widetilde{A}$ jest rozszerzeniem operatora A. $\square$

Uwaga 13.10.

Z konstrukcji przestrzeni $D(\widetilde{q}) = \mathcal{H}_{\widetilde{q}}$ wynika, że dla $x \in D(\widetilde{A}) \subset \mathcal{H}_{\widetilde{q}}$ istnieją elementy $x_n \in D(A)$ takie, że $\|x_n - x\|_{\widetilde{q}} \to 0$. Zatem $\|x_n\| \to \|x\|$ oraz

$$(x_n, Ax_n) = q(x_n, x_n) \to \widetilde{q}(x, x) = (x, \widetilde{A}x).$$

Uwaga 13.11.

Twierdzenie stanowi, że forma kwadratowa związana z operatorem nieujemnym jest domykalna. Okazuje się, że nie każda nieujemna forma kwadratowa ma domknięte rozszerzenie. Rozważmy formę określoną na przestrzeni $C_c(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2})$ wzorem

$$q(f, g) = f(0)\overline{g(0)}.$$

Niech $f_n \in C_c(\mathbb{R})$ spełnia $f_n(0) = 1$ oraz $\operatorname{supp} f_n \subset [-1/n, 1/n]$. Wtedy $\{f_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego względem normy $\|\cdot\|_q$. Ponadto $\|f_n\|_{L^2} \to 0$ ale $q(f_n, f_n) = 1$.

Uwaga 13.12.

Dla nieujemnego nieograniczonego operatora samosprzężonego A dziedzina domknięcia $\widetilde{q}$ formy kwadratowej $q(x, y) = (x, Ay)$ jest większa niż $D(A)$. Z twierdzenia spektralnego istnieje nieujemny samosprzężony operator $\sqrt{A}$ oraz $A = \sqrt{A}^2$. Zatem $(x, Ay) = (\sqrt{A}x, \sqrt{A}y)$. Stąd przestrzeń $D(\widetilde{q})$ jest równa $D(\sqrt{A})$.

Lemat 13.13. *Niech A będzie nieujemnym domkniętym operatorem symetrycznym. Niech $\widetilde{A}$ oznacza samosprzężone nieujemne rozszerzenie operatora A. Wtedy przestrzenie $D(\widetilde{A})$ i $N = \ker(A^* + I)$ są liniowo niezależne oraz*

$$D(A^*) = D(\widetilde{A}) + N.$$

Dowód. Zawieranie $D(A^*) \supset D(\widetilde{A}) + N$ jest oczywiste, bo $\widetilde{A} \subset A^*$. Załóżmy, że $x \in D(A^*)$. Z Wniosku 13.3 istnieje $y \in D(\widetilde{A})$ spełniający $(A^* + I)x = (\widetilde{A} + I)y$. Zatem $(A^* + I)(x - y) = 0$. To oznacza, że $x = y + n$, gdzie $n \in N$.

Pozostaje pokazać liniową niezależność. Załóżmy, że $a + n = 0$, gdzie $a \in D(\widetilde{A})$ oraz $n \in N$. Wtedy $(I + \widetilde{A})a = (I + A^*)(a + n) = 0$. Ale operator $I + \widetilde{A}$ jest różnowartościowy. Zatem $a = 0$, co pociąga $n = 0$. □

Uwaga 13.14.

Przy oznaczeniach Lematu 13.13 można pokazać, że

$$D(\widetilde{A}) = D(A) + (I + \widetilde{A})^{-1}(N),$$

przy czym składniki w sumie są liniowo niezależne. Rzeczywiście, ponieważ $\widetilde{A}$ jest nieujemnym operatorem samosprzężonym, to $(I + \widetilde{A})\mathcal{H} = \mathcal{H}$. Zatem

$$D(\widetilde{A}) = (I + \widetilde{A})^{-1}(\mathcal{H}) = (I + \widetilde{A})^{-1}(\operatorname{Im}(I + A) + N) = D(A) + (I + \widetilde{A})^{-1}(N).$$

Wniosek 13.15. *Niech A będzie nieujemnym niesamosprzężonym operatorem symetrycznym . Załóżmy, że*

$$\inf\{(x, Ax) : x \in D(A), \|x\| = 1\} = \alpha > 0.$$

Wtedy nieujemne samosprzężone rozszerzenie operatora A nie jest jednoznaczne.

Dowód. Niech

$$\inf\{(x, Ax) : x \in D(A), \|x\| = 1\} = \alpha > 0.$$

Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $\alpha = 1$ oraz, że A jest operatorem domkniętym. Wtedy operator $C = A - I$ jest nieujemny, domknięty i symetryczny. Niech C_F oznacza rozszerzenie Friedrichsa operatora C oraz $A_F = C_F - I$. Z Lematu 13.13 mamy

$$D(A^*) = D(C^*) = N + D(C_F) = N + D(A_F),$$

gdzie $N = \ker(C^* + I) = \ker A^*$. Przestrzeń N jest nietrywialna, bo z założenia A nie jest samosprzężony. Określmy operator A_K na dziedzinie $D(A_K) = D(A) + N$ wzorem $A_K(a + n) = Aa$. Wtedy A_K jest nieujemnym, symetrycznym rozszerzeniem operatora A. Zauważmy, że operator A_K nie jest zawarty w A_F, bo $N \cup D(A_F) = \{0\}$. Zatem nieujemne samosprzężone rozszerzenie operatora A_K jest różne od A_F. □

Uwaga 13.16.

Jeśli indeksy defektu operatora A są skończone, to operator A_K skonstruowany w dowodzie twierdzenia jest samosprzężony. Możemy założyć, że A jest operatorem domkniętym. Zbadajmy obraz operatora $\lambda I + A_K$ dla $\lambda > 0$. Jeśli $a \in D(A)$ oraz $n \in N = \ker A^*$, to

$$(\lambda I + A_K)(a + n) = (\lambda I + A)a + \lambda n.$$

Zatem $\mathrm{Im}\,(\lambda I + A_K) = \mathrm{Im}\,(\lambda I + A) + N$. Ponieważ N jest podprzestrzenią skończonego wymiaru i $\mathrm{Im}\,(\lambda I+A)$ jest domknięta, to przestrzeń $\mathrm{Im}\,(\lambda I+A_K)$ jest też domknięta. Niech v będzie wektorem ortogonalnym do $\mathrm{Im}\,(\lambda I + A_K)$. Wtedy $v \in \ker(\lambda I + A^*)$ oraz v jest ortogonalny do $\ker A^*$. Z dowodu Lematu 10.21 zastosowanego do $\lambda < \alpha/2$ wynika, że $v = 0$. Stąd $\mathrm{Im}\,(\lambda I + A_K) = \mathcal{H}$, dla $0 < \lambda < \alpha/2$. Z Wniosku 13.3 wynika, że A_K jest samosprzężony.

Twierdzenie 13.17. *Niech $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ będzie ciągiem momentów Stieltjesa niezdeterminowanym jako ciąg momentów Hamburgera. Istnieje jedyne rozwiązanie problemu momentów Stieltjesa wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\inf\{(xp,p) \,:\, p \in \mathbb{P},\ \|p\| = 1\} = 0.$$

Równoważnie, macierz Jacobi'ego J ma jednoznaczne nieujemne samosprzężone rozszerzenie.

Dowód. Rozważmy odwzorowanie liniowe U z $D(J)$ w $\mathbb{P}$ określone wzorem $U\delta_n = p_n$. Operator U jest izometrią oraz $UJU^{-1}p = xp$, dla $p \in \mathbb{P}$. Zatem

$$\inf\{(Jv,v) \,:\, v \in D(J),\ \|v\|_{\ell^2} = 1\} = \{(xp,p) \,:\, p \in \mathbb{P},\ \|p\| = 1\}. \tag{13.2}$$

Załóżmy, że

$$\inf\{(xp,p) \,:\, p \in \mathbb{P},\ \|p\| = 1\} > 0.$$

Wtedy z Wniosku 13.15 macierz J ma różne nieujemne samosprzężone rozszerzenia. Każdemu rozszerzeniu odpowiada inna miara N-ekstremalna σ. Rozszerzenie operatora J jest wtedy unitarnie równoważne operatorowi M_x na przestrzeni $L^2(\mathbb{R},\sigma)$. Z nieujemności operatora M_x wynika, że nośnik miary σ jest zawarty w $[0,+\infty)$. Zatem problem momentów Stieltjesa nie jest jednoznaczny.

Odwrotnie, załóżmy, że

$$\inf\{(xp,p) \,:\, p \in \mathbb{P},\ \|p\| = 1\} = 0. \tag{13.3}$$

Wiadomo, że $(xp,p) \geqslant 0$ dla $p \in \mathbb{P}$. Stąd wynika, że $(Jv,v) \geqslant 0$ dla $v \in D(J)$. Rozszerzenie Friedrichsa J_F odpowiada mierze N-ekstremalnej σ. Nośnik miary σ musi być zawarty w $[0,+\infty)$, bo J_F jest operatorem nieujemnym. Co więcej operator M_x w przestrzeni $L^2(\mathbb{R},\sigma)$ jest rozszerzeniem Friedrichsa operatora M mnożenia przez x określonego na wielomianach $\mathbb{P}$. Na podstawie (13.3) liczba 0 jest atomem miary σ. Niech $\sigma(\{0\}) = a > 0$. Oznaczmy przez x_1 najmniejszy dodatni atom miary σ. Symbolem f oznaczymy funkcją przyjmującą wartość 1 w przedziale zawierającym wewnątrz liczbę 0 i zerującą się w przedziale $[x_1/2,+\infty)$. Wtedy $\|f\|^2_{L^2(\sigma)} = a$. Zauważmy, że $xf = 0$ w przestrzeni $L^2(\mathbb{R},\sigma)$. Forma kwadratowa operatora M_x jest domknięciem formy operatora M (por. dowód Twierdzenia 13.9). Zatem na podstawie Uwagi 13.10 istnieje ciąg $w_n \in \mathbb{P}$ taki, że $\|w_n - f\|_{L^2(\sigma)}$, $\|w_n\|^2_{L^2(\sigma)} = a$ oraz $(xw_n, w_n) \to (xf,f)_{L^2(\sigma)} = 0$. Stąd wynika, że $w_n(0) \to f(0) = 1$.

Pokażemy, że problem momentów Stieltjesa ma jednoznaczne rozwiązanie. Załóżmy, że ϱ jest rozwiązaniem. Wtedy w_n jest ciągiem Cauchy'ego w $L^2(\mathbb{R}, \varrho)$. Niech $w_n \to g$ w $L^2(\mathbb{R}, \varrho)$. Zatem $\|g\|^2_{L^2(\varrho)} = a$. Ponadto

$$\int_{[0,+\infty)} x w_n^2(x)\, d\varrho(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

i w konsekwencji

$$\int_{[0,+\infty)} x g^2(x)\, d\varrho(x) = 0.$$

Stąd wynika, że $g(x) = 0$ dla $x > 0$, czyli ϱ ma atom w punkcie $x = 0$. Ponieważ $w_n(0) \to 1$, to $g(0) = 1$. Z warunku $\|g\|^2_{L^2(\varrho)} = a$ otrzymujemy $\varrho(\{0\}) = a = \sigma(\{0\})$. Z Twierdzenia 8.9 dostajemy $\varrho = \sigma$.

Z jednoznaczności rozwiązania problemu momentów Stieltjesa wynika natychmiast jednoznaczność nieujemnego samosprzężonego rozszerzenia macierzy J. $\square$

Dodatek

Podamy tu podstawowe fakty dotyczące twierdzenia spektralnego dla operatora samosprzężonego.

Niech A będzie operatorem samosprzężonym. Wtedy istnieje niemalejąca rodzina $E(x)$, $x \in \mathbb{R}$, rzutów ortogonalnych taka, że dla $v \in \mathcal{H}$ mamy

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} E(x)v &= 0, \\ \lim_{x\to+\infty} E(x)v &= v, \\ \lim_{y\to x} E(y)v &= E(x)v. \end{aligned} \tag{13.4}$$

Dzięki monotoniczności, dla dowolnego wektora $v \in \mathcal{H}$ funkcja liczbowa $x \mapsto (E(x)v, v)$ jest lewostronnie ciągła i niemalejąca. Przyrosty tej funkcji wyznaczają miarę borelowską oznaczaną przez $d((E(x)v, v))$. Ze wzorów (13.4) całkowita masa tej miary wynosi $\|v\|^2$.

Każdy rzut $E(x)$ jest przemienny z A w następującym sensie

$$E(x)D(A) \subset D(A) \quad \text{i} \quad E(x)A = AE(x).$$

Dziedzina operatora A oraz działanie operatora są opisane równościami

$$\begin{aligned} D(A) &= \left\{ v \in \mathcal{H} \,:\, \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \, d(E(x)v,v) < +\infty \right\}, && (13.5) \\ (Av,v) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \, d(E(x)v,v), \qquad v \in D(A). && (13.6) \end{aligned}$$

Rodzinę rzutów $E(x)$, $x \in \mathbb{R}$ nazywamy ***rozkładem jedności*** związanym z operatorem samosprzężonym A.

Dla dowolnej zespolonej, lokalnie ograniczonej funkcji borelowskiej $g(x)$, określamy operator $g(A)$ podobnie jak w (13.5) i (13.6).

$$\begin{aligned} D(g(A)) &= \left\{ v \in \mathcal{H} \,:\, \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 \, d(E(x)v,v) < +\infty \right\}, && (13.7) \\ (g(A)v,v) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \, d(E(x)v,v), \qquad v \in D(g(A)). && (13.8) \end{aligned}$$

Dziedziny $D(g(A))$ są gęste dla dowolnej funkcji g. Ponadto zachodzą wzory

$$\begin{aligned} (g(A))^* &= \overline{g}(A), \\ f(A)g(A) &= (fg)(A). \end{aligned}$$

W szczególności potęgi A^n są operatorami samosprzężonymi oraz

$$\begin{aligned} D(A^n) &= \left\{ v \in \mathcal{H} \,:\, \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} \, d(E(x)v,v) < +\infty \right\} && (13.9) \\ (A^n v,v) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^n \, d(E(x)v,v), \qquad v \in D(g(A)). && (13.10) \end{aligned}$$

Jeśli funkcja g jest jednostajnie ograniczona, to $D(g(A)) = \mathcal{H}$ oraz $g(A)$ jest operatorem ograniczonym. Istotnie dla $v \in \mathcal{H}$ mamy

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 \, d(E(x)v,v) \leqslant \|g\|_\infty \int_{-\infty}^{\infty} d(E(x)v,v) = \|g\|_\infty \|v\|^2 < +\infty.$$

Zatem

$$\|g(A)v\|^2 = (g(A)v, g(A)v) = (\overline{g}(A)g(A)v, v) = (|g|^2(A)v, v)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 \, d(E(x)v, v) \leqslant \|g\|_\infty \|v\|^2.$$

To oznacza, że $\|g(A)\| \leqslant \|g\|_\infty$.

Zadania

1. Obliczyć momenty miar

$$
\begin{aligned}
d\mu(x) &= x^{\alpha}\, dx, \qquad && x \in [0,1],\ \alpha > -1,\\
d\mu(x) &= x^{\alpha} e^{-x} dx, && x > 0,\ \alpha > -1,\\
d\mu(x) &= \frac{1}{2}\, d\delta_{-1}(x) + \frac{1}{2}\, d\delta_{1}(x), &&\\
d\mu(x) &= e^{-x^2} dx. &&
\end{aligned}
$$

2. Miara probabilistyczna μ na prostej ma nośnik ograniczony. Pokazać, że problem momentów $\{m_n\} = \int x^n d\mu(x)$ jest jednoznaczny. `Wskazówka:` Udowodnić, że jeśli $\operatorname{supp}\mu \subset [-a, a]$, to $m_{2n} \leqslant a^{2n}$. Wykazać też, że jeśli $b \in \operatorname{supp}\mu$, to $\lim m_{2n}^{1/2n} \geqslant |b|$.

3. Miara probabilistyczna μ na prostej spełnia $|m_n| \leqslant CR^n n!$, dla pewnych stałych $C > 0$ i $R > 0$. Pokazać, że problem momentów $\{m_n\} = \int x^n d\mu(x)$ jest jednoznaczny. `Wskazówka:` Udowodnić, że $e^{\alpha x} \in L^1(\mathbb{R}, \mu)$ dla $|\alpha| < R^{-1}$. Zauważyć, że funkcja $F_\mu(z) = \int e^{ixz} d\mu(x)$ jest analityczna dla $|\operatorname{Im} z| < R^{-1}$. Udowodnić, że współczynniki Taylora w punkcie $z = 0$ dla funkcji $F(z)$ są równe $i^n m_n/n!$. Zatem $F_\mu(z) = F_\sigma(z)$, dla $|\operatorname{Im} z| < R^{-1}$, jeśli σ jest innym rozwiązaniem problemu momentów. Wykazać, że wtedy $\mu = \sigma$.

4. Pokazać, że funkcje postaci $p(x)e^{-x}$, gdzie $p(x)$ jest wielomianem, leżą gęsto w przestrzeni $C_0(\mathbb{R}_+)$. `Wskazówka:` Pokazać, że

$$
e^{-x/2} \left| e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \right| \to 0, \quad \text{gdy} \quad n \to \infty
$$

jednostajnie dla $x \geqslant 0$. Niech V oznacza domknięcie przestrzeni funkcji postaci $p(x)e^{-x}$ w normie $\sup$. Pokazać indukcyjnie, że V zawiera funkcje postaci $p(x)e^{-nx}$, gdzie $p(x)$ jest wielomianem i $n \geqslant 2$. Następnie skorzystać z Twierdzenia Stone'a-Weierstrassa.

5. Pokazać, że wielomiany leżą gęsto w przestrzeni Hilberta $L^2(\mu)$, gdzie

   (a) $d\mu(x) = x^a e^{-x} dx, \quad x > 0,\ a > -1.$

   (b) $d\mu(x) = e^{-x^2} dx,$

6. Pokazać, że dla dowolnej stałej rzeczywistej c mamy

$$\int_0^\infty x^n[1 + c\sin(2\pi \log x)]e^{-\log^2 x}dx = \sqrt{\pi}e^{(n+1)^2/4}.$$

Wywnioskować, że odpowiedni problem momentów Stieltjesa jest niejednoznaczny.

7. Wyprowadzić wzór

$$\int_0^\infty x^n \sin(x^b \sin a)e^{-x^b \cos a} = \frac{1}{b}\Gamma\left(\frac{n+1}{b}\right)\sin\frac{(n+1)a}{b}$$

dla $0 < a < \pi/2$, $b > 0$ i $n = 0, 1, 2, \ldots$. Rozważyć przypadek $a = \pi b$. Wskazać odpowiedni niejednoznaczny problem momentów. `Wskazówka:` W całce

$$\int_0^\infty x^n e^{-x^b e^{ia}} dx$$

dokonać zamiany zmiennych $z = x^b e^{ia}$, otrzymując wielokrotność całki

$$\int z^{(n+1)/b-1}e^{-z}dz$$

po łuku $\arg z = a$. Zauważyć, że ostatnia całka jest równa $\Gamma((n+1)/b)$.

8. Pokazać, że jeśli $d\mu_1(x) \leqslant c d\mu_2(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$, to gęstość wielomianów w $L^2(\mu_2)$ pociąga gęstość wielomianów w $L^2(\mu_1)$.

9. Pokazać, że jeśli $d\mu_1(x) \leqslant c d\mu_2(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$, oraz miara μ_2 jest związana z jednoznacznym problemem momentów, to również miara μ_1 jest związana z jednoznacznym problemem momentów.

10. Dla niejednoznacznego ciągu momentów Stieltjesa $\{m_n\}$ określamy $\widetilde{m}_{2n} = m_n$ i $\widetilde{m}_{2n+1} = 0$. Pokazać, że $\{\widetilde{m_n}\}$ jest niejednoznacznym ciągiem momentów Hamburgera.

11. Korzystając z zadań 3 i 9, wykazać, że jeśli miara probabilistyczna μ na półprostej $[0, +\infty)$ spełnia $|m_n| \leqslant CR^n(2n)!$, dla pewnych stałych $C > 0$ i $R > 0$, to problem momentów $\{m_n\} = \int x^n d\mu(x)$ jest jednoznaczny.

12. Miara μ na $\mathbb{R}_+$ całkuje $e^{2\pi x}$. Pokazać, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4\pi^2)^n m_{2n}}{(2n)!} = 0,$$

gdzie $m_n = \int_0^\infty x^n d\mu(x)$, wtedy i tylko wtedy, gdy μ jest skupiona na liczbach 0, 1, 2, ...

13. Pokazać, że jeśli n pierwszych momentów funkcji $f(x)$ ciągłej o wartościach rzeczywistych w przedziale $a < x < b$ znika

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b xf(x)dx = \ldots = \int_a^b x^{n-1}f(x)dx = 0,$$

to $f(x)$ zmienia znak w tym przedziale n razy.

14. Wyrazić momenty miary $d\mu(x) = (1-x^2)^\alpha dx$, $-1 < x < 1$, $\alpha > -1$, przy pomocy funkcji $\Gamma(x)$.

15. Wielomiany p_n spełniają $p_0 = 1,\ p_1 = 2x$ oraz

$$xp_n = \frac{1}{2}p_{n+1} + \frac{1}{2}p_{n-1}.$$

Pokazać, że momenty związane ze wzorem rekurencyjnym wynoszą

$$m_{2n} = \frac{1}{4^n(n+1)}\binom{2n}{n} \qquad m_{2n+1} = 0.$$

`Wskazówka:` Wprowadzić operator przesunięcia na wielomianach $\mathcal{P}$ wzorem $Sp_0 = 0$ i $Sp_n = p_{n-1}$, dla $n \geqslant 1$. Wtedy

$$xp_n = \frac{1}{2}(S + S^*)p_n.$$

Zatem

$$m_n = (x^n, 1) = \frac{1}{2^n}\left((S+S^*)^n 1, 1\right).$$

Pokazać, że wielkość $((S+S^*)^{2n}1, 1)$ jest równa liczbie wszystkich dróg długości $2n$ przechodzących przez punkty kratowe płaszczyzny łączących punkty $(0,0)$ i (n,n), leżących pod główną przekątną (patrz W. Feller, Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa, tom 1).

16. Pokazać, że jeśli wielomian trygonometryczny (tzn. kombinacja liniowa funkcji $\cos nx$ i $\sin nx$ dla $n \in \mathbb{N}$) jest nieujemny, to jest on postaci $|h(e^{ix})|^2$ dla pewnego wielomianu $h(x)$. Pokazać, że jeśli wielomian trygonometryczny jest funkcją parzystą, to można zażądać, aby $h(x)$ miał współczynniki rzeczywiste.

17. Pokazać, że liczby $\{m_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ są współczynnikami Fouriera miary μ na przedziale $[0, 2\pi)$, tzn.
$$m_n = \int_0^{2\pi} e^{inx} d\mu(x),$$
wtedy i tylko wtedy, gdy $\{m_n\}$ jest dodatnio określony w następującym sensie
$$\sum_{i,j=0}^{n} m_{i-j} z_i \overline{z_j} \geqslant 0,$$
dla dowolnego ciągu $\{z_i\}_{i=0}^{\infty}$, w którym tylko skończenie wiele wyrazów nie zeruje się.

18. Udowodnić, że każdy wielomian przyjmujący nieujemne wartości dla $0 \leqslant x \leqslant 1$ ma postać
$$A(x)^2 + x(1-x)B(x)^2,$$
dla pewnych wielomianów $A(x)$ i $B(x)$. `Wskazówka:` Zastosować drugą część zadania 16.

19. Dla ciągu $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$, $m_0 = 1$, określamy
$$\Delta_0 m_n = m_n, \quad \Delta m_n = m_n - m_{n+1}, \qquad \Delta^{k+1} m_n = \Delta^k m_n - \Delta^k m_{n+1}.$$
Pokazać, że $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ jest ciągiem momentów miary probabilistycznej określonej na przedziale $[0,1]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta^k m_n \geqslant 0$ dla każdego k i n (Twierdzenie Hausdorffa). `Wskazówka:` Obliczyć $\Delta_k x^n$. Pokazać, że $\Delta^k (1-x)^{n-k} = x^k (1-x)^{n-k}$. Wywnioskować, że $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Delta^k m_{n-k} = m_0 = 1$. Dla funkcji $f(x) \in C[0,1]$ określamy wielomiany Bernsteina $B_n(f) = \sum_{k=0}^n f(k/n) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$. Pokazać, że $B_n(x^l) = x^l + p_n(x)$, gdzie $p_{n,l}(x)$ jest wielomianem stopnia nie większego niż l oraz współczynniki tego wielomianu dążą do zera. Określmy

miarę probabilistyczną σ_n wzorem $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^k m_{n-k} \delta_{k/n}$. Jeśli σ jest punktem skupienia miar σ_n, to $m_l = \int_0^1 x^l \, d\sigma$.

20. Pokazać, że dla ciągu momentów Stieltjesa wielomian $p_n(x) - \tau p_{n-1}(x)$ ma $n-1$ pierwiastków dodatnich. Czy mogą istnieć pierwiastki ujemne? Dla jakich wartości τ?

21. Wyprowadzić wzór Christoffela–Darboux używając relacji ortogonalności. **Wskazówka:** Obliczyć iloczyn skalarny względem zmiennej y obu stron wzoru z wielomianem $p_k(y)$.

22. Przeanalizować rozwiązalność problemu momentów w przypadku ciągu momentów, który jest nieujemnie określony ale nie jest dodatnio określony, tzn. spełnia $\sum m_{i+j} z_i \bar{z}_j \geqslant 0$.

23. Przeanalizować wzór rekurencyjny w przypadku nieujemnie określonego ciągu momentów.

24. Dla ciągu $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ określamy

$$\begin{aligned} \widetilde{m}_{2n} &= m_n, \\ \widetilde{m}_{2n+1} &= 0. \end{aligned}$$

Pokazać, że ciąg $\{\widetilde{m}_n\}$ jest dodatnio określony wtedy i tylko wtedy, gdy ciągi $\{m_n\}$ i $\{m_{n+1}\}$ są dodatnio określone, tzn. $\{\widetilde{m}_n\}$ jest ciągiem momentów Hamburgera wtedy i tylko wtedy, gdy $\{m_n\}$ jest ciągiem momentów Stieltjesa.

25. Pokazać, że wielomiany $\widetilde{p}_n$ i p_n ortonormalne względem $\{\widetilde{m}_n\}$ i $\{m_n\}$ odpowiednio, spełniają

$$\widetilde{p}_{2n}(\sqrt{x}) = p_n(x).$$

26. W oparciu o poprzednie zadanie podać inny dowód twierdzenia, że dla ciągu $\{m_n\}$ momentów Stieltjesa wielomian p_n posiada n różnych dodatnich pierwiastków.

27. Pokazać, że jeśli $\{m_n\}$ jest ciągiem dodatnio określonym oraz $m_{2n+1} = 0$ dla $n \in \mathbb{N}$, to $p_n(-x) = (-1)^n p_n(x)$. Pokazać, że wzór rekurencyjny

ma wtedy postać

$$xp_n(x) = \lambda_n p_{n+1} + \lambda_{n-1} p_{n-1}(x) \quad n = 0, 1, \dots,$$

$p_{-1} = 0$, $p_0 = 1$. Udowodnić, że jeśli wielomiany p_n zadane są tym wzorem, gdzie $\lambda_n > 0$, to ciąg momentów związanych z wielomianami p_n spełnia $m_{2n+1} = 0$.

28. Udowodnić, że wielomiany p_n spełniające wzór

$$xp_n(x) = \lambda_n p_{n+1} + \beta_n p_n(x) + \lambda_{n-1} p_{n-1}(x) \quad n = 0, 1, \dots,$$

$p_{-1} = 0$, $p_0 = 1$, można określić wzorem $p_n(x) = \det(xI - J_n)$, gdzie J_n oznacza obciętą macierz Jacobi'ego, tzn.

$$J_n = \begin{pmatrix} \beta_0 & \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_0 & \beta_1 & \lambda_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \beta_2 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \lambda_{n-3} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-3} & \beta_{n-2} & \lambda_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_{n-2} & \beta_{n-1} \end{pmatrix}.$$

29. Pokazać, że jeśli wyrazy macierzy Jacobi'ego są ograniczone oraz

$$\sup |\beta_n| + 2 \sup \lambda_n \leqslant R,$$

to formy kwadratowe

$$\sum_{i,j}^{n} (R\, m_{i+j} \pm m_{i+j+1}) x_i x_j$$

są dodatnio określone. Pokazać, że wynikanie odwrotne też jest prawdziwe.

30. Załóżmy, że ciąg momentów Hamburgera m_n spełnia $m_{2n} \leqslant R^{2n}$. Pokazać, że $p_n(x) > 0$ dla $x \geqslant R$, oraz $(-1)^n p_n(x) > 0$ dla $x \leqslant R$.

31. Ciąg liczb $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazywamy ciągiem łańcuchowym, jeśli istnieje ciąg $\{g_n\}_0^{\infty}$ spełniający $0 \leqslant g_n \leqslant 1$ oraz $a_n = g_n(1 - g_{n-1})$, dla $n = 1, 2, \dots$. Pokazać, że $(-1)^n p_n(0) > 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\beta_0 > 0$ oraz $\lambda_n^2 / (\beta_n \beta_{n+1})$ jest ciągiem łańcuchowym.

32. Pokazać, że jeśli $(-1)^n p_n(0) > 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, to $(-1)^n q_n(0) > 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

33. Udowodnić, że dla liczb $x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \ldots < x_{n-1} < y_{n-1} < x_n$ zachodzi nierówność

$$\left| \frac{(z-y_1)(z-y_2)\ldots(z-y_{n-1})}{(z-x_1)(z-x_2)\ldots(z-x_{n-1})(z-x_n)} \right| \leqslant \frac{1}{|\operatorname{Im} z|}.$$

34. (Kryterium Carlemana) Pokazać, że problem momentów jest zdeterminowany, jeśli szereg $\sum \lambda_n^{-1}$ jest rozbieżny. `Wskazówka:` $p_n q_{n+1} - p_{n+1} q_n = \lambda_n^{-1}$.

35. Udowodnić, że jeśli

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\beta_{n+1}|}{\lambda_n \lambda_{n+1}} = +\infty,$$

to problem momentów jest zdeterminowany. `Wskazówka:` Obliczyć $p_n(x)q_{n+2}(x) - p_{n+2}(x)q_n(x)$.

36. (Kryterium Carlemana) Pokazać, że problem momentów $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ jest zdeterminowany, jeśli

$$\sum_{n=1}^{\infty} m_{2n}^{-1/2n} = +\infty.$$

`Wskazówka:` Dla $xp_n = \lambda_n p_{n+1} + \beta_n p_n + \lambda_{n-1} p_{n-1}$, mamy

$$\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1} p_n(x) = x^n + \ldots\ .$$

Zatem

$$\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1} (p_n, p_n) = (x^n, p_n) \leqslant \sqrt{m_{2n}}.$$

Stąd

$$\sum_{n=1}^{\infty} m_{2n}^{-1/2n} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1})^{-1/n}.$$

Pokazać, że jeśli szereg jest rozbieżny, to również szereg $\sum \lambda_n^{-1}$ jest rozbieżny. W tym celu skorzystać z nierówności Carlemana

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 a_2 \ldots a_n)^{1/n} \leqslant e \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

37. (Kryterium Hamburgera) Pokazać, że problem momentów $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ jest zdeterminowany wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej jeden z szeregów $\sum p_n^2(0)$ lub $\sum q_n^2(0)$ jest rozbieżny. `Wskazówka:` Skorzystać z dowodu Twierdzenia Hellingera–Nevanlinny.

38. Pokazać, że jeśli $(-1)^n p_n(0) > 0$ dla $n \in \mathbb{N}$, to $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ jest ciągiem momentów Stieltjesa.

39. Dla ciągu liczb dodatnich λ_n znaleźć ciąg liczb rzeczywistych β_n tak, że odpowiadający tym ciągom problem momentów jest zdeterminowany. Czy można wybrać ciąg β_n tak, że nośnik miary jest zawarty w półprostej $[0, +\infty)$?

40. Dla ciągu liczb rzeczywistych β_n znaleźć ciąg liczb dodatnich λ_n tak, że odpowiadający tym ciągom problem momentów jest niezdeterminowany.

41. Czy problem momentów odpowiadający ciągom $\lambda_{2n} = \lambda_{2n-1} = n^2$ oraz $\beta_n \equiv 0$ jest zdeterminowany ? Czy problem momentów odpowiadający ciągom $\lambda_{2n} = \lambda_{2n+1} = n^2$ oraz $\beta_n \equiv 0$ jest zdeterminowany ?

42. Przy założeniach zadania 3 pokazać, że dla liczb $\operatorname{Im} z < 0$ zachodzi wzór
$$-i \int_0^{\infty} e^{-ixz} F_\mu(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu(x)}{x - z}.$$
Udowodnić, że jeśli $F_\mu = F_\sigma$, to $\mu = \sigma$, korzystając z Twierdzenia Stieltjesa o odwróceniu.

43. Czy ciąg m_n spełniający $ce^{\sqrt{n}} \leqslant m_{2n} \leqslant Ce^{\sqrt{n}}$ dla pewnych stałych c i C, może być dodatnio określony ? Czy ciąg m_n spełniający $e^{d\sqrt{n}} \leqslant m_{2n} \leqslant De^{\sqrt{n}}$ dla pewnych dodatnich stałych d i D, może być dodatnio określony

44. Niech $G(z)$ będzie funkcją analityczną w kole jednostkowym $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Pokazać, że dla $0 < R < 1$ oraz dla $|z| \leqslant 1$ zachodzi wzór
$$G(Rz) = i\operatorname{Im} G(0) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \operatorname{Re} G(Re^{it})\, dt.$$
`Wskazówka:` Pokazać, korzystając z całki Poissona dla funkcji harmonicznych, że części rzeczywiste obu stron wzoru są równe. Następnie

zauważyć, że obie strony wzoru przedstawiają funkcje analityczne dla $|z| < 1$, zatem obie strony mogą różnić się o stałą.

45. Niech $G(z)$ będzie funkcją analityczną przekształcającą koło jednostkowe w półpłaszczyznę $\operatorname{Re} z \geqslant 0$. Pokazać, że z rodziny miar $d\sigma_R(t) = \operatorname{Re} G(Re^{it})\, dt$ określonych na przedziale $[-\pi, \pi]$ można wybrać podciąg zbieżny $d\sigma_{R_k}(t)$ taki, że $R_k \to 1^-$. W tym celu obliczyć całkowitą masę miary $d\sigma_R(t)$.

46. Korzystając z zadań 44 i 45 pokazać, że funkcja analityczna przekształcającą koło jednostkowe w górną półpłaszczyznę ma postać

$$G(z) = iv + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\, d\sigma(t),$$

dla pewnej miary σ, gdzie $v = \operatorname{Im} G(0)$.

47. Niech $F(w)$ będzie funkcją analityczną przekształcającą górną półpłaszczyznę w siebie. Pokazać, że funkcja

$$G(z) = -iF\left(i\frac{1-z}{1+z}\right)$$

odwzorowuje otwarte koło jednostkowe półpłaszczyznę $\operatorname{Re} z \geqslant 0$. Korzystając z poprzedniego zadania pokazać, że istnieje skończona miara $d\tau(x)$ na prostej taka, że

$$F(w) = cw + d + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + xw}{x - w}\, d\tau(x),$$

gdzie $c \geqslant 0$ oraz $d \in \mathbb{R}$. `Wskazówka:` W całce z zadania 46 podstawić $u = \operatorname{tg}(t/2)$.

48. Przy oznaczeniach z poprzedniego zadania pokazać, że przyjmując $d\sigma(x) = (1 + x^2)\, d\tau(x)$ otrzymujemy

$$F(w) = cw + d + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{x - w} - \frac{x}{1 + x^2}\right) d\sigma(x).$$

49. Niech A będzie macierzą samosprzężoną wymiaru $n \times n$ z wartościami własnymi $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ uporządkowanymi tak, że $|\lambda_1| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_n|$. Udowodnić wzór "minimax"

$$\lambda_k = \min_{\dim V = k-1} \max_{x \perp V} \frac{(Ax, x)}{(x, x)}.$$

`Wskazówka:` Niech $x_1, \ldots, x_n$ będą odpowiednimi wektorami własnymi i $V_k = \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_k\}$. Pokazać, że dla dowolnej podprzestrzeni V wymiaru $k-1$ istnieje wektor $x \in V_k$ taki, że $x \neq 0$ oraz $x \perp V$. Wtedy $(Ax, x)/(x, x) \geqslant \lambda_k$.

50. Zastosować poprzednie zadanie i zadanie 25 do podania innego dowodu o wzajemnym położeniu zer dla wielomianów p_n i p_{n+1}.

51. Niech A będzie operatorem liniowym o gęstej dziedzinie w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Wykres Γ_A określamy jako

$$\Gamma_A = \{\langle x, Ax \rangle \mid x \in D(A)\}.$$

Niech $J(x, y) = \langle -y, x \rangle$ dla $x, y \in \mathcal{H}$. Pokazać, że

$$\Gamma_{A^*} = J(\Gamma_A)^{\perp},$$

gdzie symbol $\perp$ oznacza dopełnienie ortogonalne w przestrzeni $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$. W szczególności A^* jest operatorem domkniętym.

52. Pokazać, że jeśli $A \subset B$, to $B^* \subset A^*$, gdzie A i B są operatorami liniowymi o gęstych dziedzinach.

53. Operator liniowy A jest *domykalny*, jeśli posiada on rozszerzenie o wykresie domkniętym. Pokazać, że jeśli A jest domykalny, to domknięcie zbioru Γ_A jest wykresem rozszerzenia operatora A, nazywanego domknięciem A i oznaczanego symbolem $\overline{A}$.

54. Pokazać, że operator A^*, gdzie A jest domykalnym operatorem o gęstej dziedzinie, ma również gęstą dziedzinę.

55. Pokazać, że jeśli A ma gęstą dziedzinę i jest domykalny, to $A^{**} = \overline{A}$. `Wskazówka:` $\Gamma_{A^{**}} = J(\Gamma_{A^*})^{\perp}$.

56. Niech M i N będą domkniętymi podprzestrzeniami przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Pokazać, że jeśli M nie posiada wektora ortogonalnego do przestrzeni N, to $\dim M \leqslant \dim N$.

57. Dla domkniętego symetrycznego operatora liniowego A i liczby $z \notin \mathbb{R}$ niech V będzie izometrią z domkniętej podprzestrzeni $D(V)$ przestrzeni $N_{\overline{z}}$ w przestrzeń N_z. Pokazać, że operator A_V o dziedzinie

$$D(A_V) = \{x + u - Vu \,:\, x \in D(A),\ u \in D(V)\}$$

określony wzorem

$$A_V(x + u - Vu) = Ax + zu - \overline{z}Vu,$$

jest symetrycznym rozszerzeniem operatora A. Pokazać, że każde symetryczne rozszerzenie operatora A może być otrzymane w ten sposób. `Wskazówka:` Skorzystać ze wzorów łączących A i transformatę Cayley U_z.

58. Operator liniowy A określony jest na dziedzinie

$$D(A) = \operatorname{span}\{e_n - e_{2n}\}_{n=0}^{\infty} \subset \ell^2(\mathbb{N}_0)$$

wzorem

$$A(e_n - e_{2n}) = i(e_n + e_{2n}), \qquad n \geqslant 0.$$

Pokazać, że dziedzina jest gęsta w ℓ^2 oraz, że A jest operatorem symetrycznym. Udowodnić, że indeksy defektu $\dim N_i$ oraz $\dim N_{-i}$ operatora A nie są sobie równe.

Rozwiązanie zadania 16

Lemat 1. *Niech* $p(z) = \sum_{k=-n}^{n} a_k z^k$ *oraz* $\operatorname{Im} p(e^{ix}) = 0$ *dla* $x \in \mathbb{R}$. *Dla liczby* $0 < |z_0| \neq 1$ *z warunku* $p(z_0) = 0$ *wynika, że* $p(\overline{z}_0^{-1}) = 0$. *Ponadto* $p(z) = -\overline{z}_0 z^{-1}(z - z_0)(z - \overline{z}_0^{-1})\widetilde{p}(z)$, *gdzie* $\widetilde{p}(z) = \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} b_k z^k$ *oraz* $\operatorname{Im} \widetilde{p}(e^{ix}) = 0$.

Dowód. Mamy

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(e^{ix}) e^{-ikx}\, dx.$$

W konsekwencji

$$\overline{a_k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(e^{ix}) e^{ikx}\, dx = a_{-k}.$$

Możemy założyć, że $a_n \neq 0$. Stąd również $a_{-n} \neq 0$. Wtedy

$$\overline{p(z)} = \sum_{k=-n}^{n} \overline{a}_k \, \overline{z}^k = \sum_{k=-n}^{n} a_{-k} \, \overline{z}^k = \sum_{k=-n}^{n} a_k \, \overline{z}^{-k} = p(\overline{z}^{-1}).$$

To natychmiast daje pierwszą część tezy lematu. Wielomian $q(z) = z^n p(z)$ dzieli się zatem przez $(z - z_0)(z - \overline{z}_0^{-1})$. Stąd $q(z)$ ma przedstawienie

$$q(z) = -\overline{z}_0(z - z_0)(z - \overline{z}_0^{-1})\widetilde{q}(z),$$

gdzie $\widetilde{q}(z)$ jest wielomianem stopnia $2n - 2$. Wtedy

$$p(z) = -\overline{z}_0 z^{-1}(z - z_0)(z - \overline{z}_0^{-1})\widetilde{p}(z),$$

gdzie $\widetilde{p}(z) = z^{-(n-1)}\widetilde{q}(z)$. Dalej dla $z = e^{ix}$ mamy

$$-\overline{z}_0 z^{-1}(z - z_0)(z - \overline{z}_0^{-1}) = (z - z_0)(\overline{z} - \overline{z}_0) > 0.$$

Zatem $\operatorname{Im} \widetilde{p}(e^{ix}) = 0$. $\square$

Lemat 2. *Niech* $p(z) = \sum_{k=-n}^{n} a_k z^k$ *oraz* $p(e^{-ix}) = p(e^{ix})$ *dla* $x \in \mathbb{R}$. *Dla liczby* $z_0 \neq 0$ *z warunku* $p(z_0) = 0$ *wynika, że* $p(z_0^{-1}) = 0$. *Ponadto* $p(z) = z^{-1}(z - z_0)(z - z_0^{-1})\widetilde{p}(z)$, *gdzie* $\widetilde{p}(z) = \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} b_k z^k$ *oraz* $\widetilde{p}(e^{-ix}) = \widetilde{p}(e^{ix})$.

Dowód. Mamy

$$a_{-k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(e^{ix}) e^{ikx} \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(e^{ix}) e^{-ikx} \, dx = a_k.$$

Wtedy

$$p(z^{-1}) = \sum_{k=-n}^{n} a_k z^{-k} = \sum_{k=-n}^{n} a_{-k} z^k = \sum_{k=-n}^{n} a_k z^k = p(z).$$

Stąd otrzymujemy pierwszą część tezy.

Wielomian $q(z) = z^n p(z)$ dzieli się zatem przez $(z - z_0)(z - z_0^{-1})$. Stąd $q(z)$ ma przedstawienie

$$q(z) = (z - z_0)(z - z_0^{-1})\widetilde{q}(z),$$

gdzie $\widetilde{q}(z)$ jest wielomianem stopnia $2n-2$. Wtedy

$$p(z) = z^{-1}(z - z_0)(z - z_0^{-1})\widetilde{p}(z),$$

gdzie $\widetilde{p}(z) = z^{-(n-1)}\widetilde{q}(z)$. Ponadto funkcja

$$b(z) = z^{-1}(z - z_0)(z - z_0^{-1}) = z + z^{-1} - z_0 - z_0^{-1}$$

spełnia

$$b(e^{-ix}) = b(e^{ix}).$$

Z tego wynika, że również $\widetilde{p}(e^{-ix}) = \widetilde{p}(e^{ix})$. □

Lemat 3. *Niech* $p(z) = \sum_{k=-n}^{n} a_k z^k$ *oraz* $p(e^{ix}) \geqslant 0$ *dla* $x \in \mathbb{R}$. *Jeśli* $p(e^{ix_0}) = 0$, *to* $p(z)$ *ma przedstawienie*

$$p(z) = -e^{-ix_0} z^{-1}(z - e^{ix_0})^2 \widetilde{p}(z),$$

gdzie $\widetilde{p}(z) = \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} b_k z^k$ *oraz* $\widetilde{p}(e^{ix}) \geqslant 0$.

Dowód. Jeśli $p(e^{ix_0}) = 0$, to funkcja $p(e^{ix})$ osiąga minimum w punkcie x_0. Stąd

$$\frac{d}{dx} p(e^{ix})|_{x=x_0} = 0.$$

Ale

$$\frac{d}{dx} p(e^{ix})|_{x=x_0} = ie^{ix_0} p'(e^{ix_0}).$$

Stąd $p'(e^{ix_0}) = 0$. Wielomian $q(z) = z^n p(z)$ dzieli się zatem przez $(z - e^{ix_0})^2$, czyli $q(z) = -e^{-ix_0}(z - e^{ix_0})^2 \widetilde{q}(z)$, gdzie $\widetilde{q}(z)$ ma stopień $2n-2$. Mamy wtedy

$$p(z) = -e^{-ix_0} z^{-1}(z - e^{ix_0})^2 \widetilde{p}(z),$$

gdzie $\widetilde{p}(z) = z^{-(n-1)}\widetilde{q}(z)$. Dalej dla $z = e^{ix}$ mamy

$$-e^{-ix_0} z^{-1}(z - e^{ix_0})^2 = (z - e^{ix_0})(\overline{z} - e^{-ix_0}) \geqslant 0.$$

Zatem $\widetilde{p}(e^{ix}) \geqslant 0$. □

Z Lematów 1 i 3 wynika, że jeśli $p(z) = \sum_{k=-n}^{n} a_k z^k$, $a_n \neq 0$, oraz $p(e^{ix}) \geqslant 0$ dla $x \in \mathbb{R}$, to $p(z)$ ma przedstawienie w postaci

$$p(z) = a_n z^{-n} \prod_{j=1}^{s} (z - z_j)(z - \overline{z}_j^{-1}) \prod_{k=1}^{r} (z - e^{ix_k})^2,$$

gdzie $0 < |z_j| < 1$ oraz $s + r = n$. Niech

$$g(z) = \prod_{j=1}^{s} (z - z_j) \prod_{k=1}^{r} (z - e^{ix_k}).$$

Zauważmy, że dla $|z| = 1$ mamy

$$|z - \overline{z}_j^{-1}| = |z_j|^{-1} |z - z_j| = |z_j|^{-1} |z - z_j|.$$

Stąd

$$p(e^{ix}) = |p(e^{ix})| = |a_n||z_1|^{-1} \ldots |z_s|^{-1} |g(e^{ix})|^2.$$

Kładziemy $h(z) = cg(z)$, gdzie $c = |a_n|^{1/2} |z_1|^{-1/2} \ldots |z_s|^{-1/2}$. Wtedy

$$p(e^{ix}) = |h(e^{ix})|^2.$$

Jeśli dodatkowo funkcja $p(z)$ spełnia, $p(e^{-ix}) = p(e^{ix})$, to z Lematu 2 krotności pierwiastków z_0 i z_0^{-1} są takie same. To oznacza, że również krotności pierwiastków z_0 i $\overline{z}_0$ są takie same. Wtedy funkcja $g(z)$ ma przedstawienie w postaci

$$g(z) = (z-1)^u (z+1)^v \prod_{l=1}^{t} (z - y_l) \prod_{j=1}^{s'} (z - z_j)(z - \overline{z}_j) \prod_{k=1}^{r'} (z - e^{ix_k})(z - e^{-ix_k}),$$

gdzie z_j są pierwiastkami nierzeczywistymi o module mniejszym niż 1, y_l są pierwiastkami rzeczywistymi o module mniejszym niż 1 oraz $e^{ix_k} \neq \pm 1$. Wielomian $g(z)$ ma wtedy współczynniki rzeczywiste.

Literatura

[1] N. I. Akhiezer, "The Classical Moment Problem", Hafner Publishing Co., New York, 1965.

[2] N. I. Akhiezer, I. M. Glazman, "Teoriya lineinykh operatorov v gilbertovom prostranstve", tom 1 (po rosyjsku), Vishcha Shkola, Charków, 1977.

[3] C. Berg, G. Valent, *The Nevanlinna parametrization for some indetereminate Stieltjes moment problems associated with birth and death processes,* Methods and Appl. Analysis **1** (1994), 169–209.

[4] T. Chihara, "An Introduction to Orthogonal Polynomials", *Mathematics and Its Applications,* Vol. 13, Gordon and Breach, New York, London, Paris, 1978.

[5] G. Freud, "Orthogonal Polynomials", Pergamon Press, Oxford, 1971.

[6] M. A. Naimark, "Lineinye differentsialnye operatory" (po rosyjsku), Nauka, Moskwa, 1969.

[7] M. Reed, B. Simon, "Methods of Modern Mathematical Physics, I. Functional Analysis", Academic Press, New York, 1972.

[8] M. Reed, B. Simon, "Methods of Modern Mathematical Physics, II. Fourier Analysis, Self-Adjointness", Academic Press, New York, 1975.

[9] F. Riesz, B. Sz.-Nagy, "Lecons d'Analyse Fonctionnelle", Akadémiai Kiadò, Budapest, 1972.

[10] W. Rudin, "Analiza rzeczywista i zespolona", PWN, Warszawa, 1999.

[11] J. A. Shohat, J. D. Tamarkin, "The Problem of Moments", Mathematical Surveys No.1, Providence, 1943.

[12] B. Simon, *The classical moment problem as self-adjoint finite difference operator,* Advances in Mathematics **137** (1998), 82–203.

[13] M. Stone,"Linear transformations in Hilbert Space and their applications to analysis", Colloq. Publ. Vol. 15, Amer. Math. Soc., New York, 1932.

Skorowidz