

1. Ciąg $\{a_n\}$ jest rozbieżny do minus nieskończoności a ciąg $\{b_n\}$ jest ograniczony. Czy ciąg $\{\max(a_n, b_n)\}$ jest ograniczony od dołu ? Odpowiedź uzasadnić.

Odpowiedź brzmi **tak**. Z założenia $|b_n| \leq M$ dla pewnej stałej M i wszystkich n . Zatem

$$\max(a_n, b_n) \geq b_n \geq -M.$$

2. Zbadać zbieżność szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n - \frac{2}{5})(n + \frac{3}{5})} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{7n + 11}.$$

Mamy

$$\frac{2n}{7n + 11} = \frac{2}{7 + \frac{11}{n}} \xrightarrow{n} \frac{2}{7} \neq 0.$$

Zatem drugi szereg jest rozbieżny.

Wersja 1.

$$\frac{1}{(n - \frac{2}{5})(n + \frac{3}{5})} = \frac{1}{n - \frac{2}{5}} - \frac{1}{n + \frac{3}{5}} = b_n - b_{n+1},$$

gdzie $b_n = \frac{1}{n - \frac{2}{5}}$. Zatem

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k - \frac{2}{5})(k + \frac{3}{5})} = b_1 - b_{n+1} = \frac{5}{3} - \frac{1}{n + \frac{3}{5}}.$$

Czyli $s_n \xrightarrow{n} \frac{5}{3}$.

Wersja 2. Mamy dla $n \geq 2$

$$0 \leq \frac{1}{(n - \frac{2}{5})(n + \frac{3}{5})} = \frac{1}{n^2 + \frac{1}{5}n - \frac{6}{25}} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Szereg $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny (wykład), zatem z kryterium porównawczego nasz szereg też jest zbieżny.

3. Czy warunek

$$\forall(\eta > 0) \exists(N \in \mathbb{N}) \forall(n \in \mathbb{N}) \{n > N \Rightarrow |a_n - a| < 3^\eta\}$$

jest równoważny zbieżności ciągu $\{a_n\}$ do liczby a ? Odpowiedź uzasadnić przez podanie dowodu równoważności lub przez wskazanie przykładu wskazującego na nierównoważność.

Odpowiedź brzmi **nie**. Liczby postaci 3^η dla $\eta > 0$ są większe od 1. Ciąg $a_n = (-1)^n$ oraz liczba $a = 0$ spełniają podany warunek, bo $|a_n - a| = 1 < 3^\eta$. Ale ciąg $\{a_n\}$ nie jest zbieżny do $a = 0$ ani do żadnej innej liczby.

4. Obliczyć granicę ciągu $\sqrt[n]{4^n - 3^n}$.

Mamy

$$\frac{4}{\sqrt[n]{4}} = 4 \sqrt[n]{1 - \frac{3}{4}} \leq 4 \sqrt[n]{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n} = \sqrt[n]{4^n - 3^n} \leq \sqrt[n]{4^n} = 4.$$

Z twierdzenia o 3 ciągach i z faktu, że $\sqrt[n]{4} \xrightarrow{n} 1$ otrzymujemy $\lim_n \sqrt[n]{4^n - 3^n} = 4$.