

1. Funkcja $F : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $F(t) = (t^2 + 1, 3t^2 + 4)$ przekształca punkty przedziału na punkty płaszczyzny; np.: $F(-1) = (2, \dots)$, $F(-0.5) = \dots$.

a) Czy p-nty $(3.25, 10.75)$, $(1.09, 4.27)$, $(2.69, 9.07)$ należą do zbioru wartości F ?

b) Zbiorem wartości tej funkcji jest odcinek – jaki? Uzasadnij, że środek tego odcinka jest w zbiorze wartości.

UWAGA. Mówimy też: $x(t) = t^2 + 1$, $y(t) = 3t^2 + 4$, $-1 \leq t \leq 2$ jest jedną z możliwych *parametryzacji* tego odcinka, inną jest: $x = t^2 + 1$, $y = 3t^2 + 4$, $0 \leq t \leq 2$.

c) Powtórz b) dla $G(t) = (|t| + 1, 3|t| + 4)$, $|t| \leq 4$, $H(t) = (|t|, 3|t| + 1)$, $t \in [1, 5]$.

d) Powtórz b) dla $x = \sin t + 1$, $y = 2 \sin t + 3$, $-4\pi \leq t \leq 2\pi$.

e) Powtórz b) dla $x = 2 - 3t$, $y = -4t$, $0 \leq t \leq 12$.

f) Powtórz b) dla $x = e^t$, $y = e^{4+t} + 3$, $0 \leq t \leq \log 5$.

2. Zaznacz łuki opisane parametrycznie: (wyznacz zbiory wartości funkcji):

a) $x = \cos(2\pi t) + 1$, $y = \cos(2\pi t) + 3$, $t \in [-2, 1]$.

b) $x = 3 \cos(2\pi t) + 1$, $y = 3 \cos(2\pi t) + 3$, $t \in [-2, 1]$.

c) $x = 3 \cos(2\pi t) + 1$, $y = 3 \sin(2\pi t) + 3$, $t \in [-2, 1]$.

d) $x = 2 \cos(2\pi t) + 1$, $y = 3 \sin(2\pi t) + 3$, $t \in [-2, 1]$.

e) $x = 2 \cos(2\pi t) + 1$, $y = 3 \cos^2(2\pi t) + 3$, $t \in [-2, 1]$.

f) $x = 2 \cos(2\pi t) + 1$, $y = 3 \sin^2(2\pi t) + 3$, $t \in [-2, 1]$.

g) $x = t$, $y = -\sqrt{4 - t^2}$, $t \in [-2, 2]$.

h) $x = -\sqrt{4 - t^2}$, $y = 4 - t^2$, $t \in [-2, 2]$.

i) $x = \min\{t, 1 - t\}$, $y = \max\{t, 1 - t\}$, $t \in [-1, 1]$.

j) $x = 2t$, $y = 3t$, $z = 4t$, $t \in [1, 2]$.

k) $x = 2t + 3$, $y = 3t + 4$, $z = 4t + 5$, $t \in [-1, 3]$.

ℓ) $x = 2t^2 + 3$, $y = 3t^2 + 4$, $z = 4t^2 + 5$, $t \in [0, 2]$.

m) $x = 2t^2 + 3$, $y = 3t^2 + 4$, $z = 4t^2 + 5$, $t \in [-1, 2]$.

UWAGA. Opis parametryczny łuku (krzywej) można interpretować jako opis ruchu punktu po tym łuku (po krzywej); zmienną t traktujemy wtedy jako czas.

Funkcja $v(t) = (x'(t), y'(t))$ opisuje (wektory) prędkości w ruchu, w którym położenie zadane jest wzorem $r(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$ (o ile istnieją pochodne $x'(t)$, $y'(t)$).

3. a) Czy jadące pojazdy A i B :

$$x_A = t + 1, y_A = 4t + 3, t \in \mathbb{R}_+, \quad x_B = t - 5, y_B = 2t + 1, t \in \mathbb{R}_+$$

kiedys zderzą się? Jeśli tak, to kiedy? Jeśli nie, to jak blisko siebie miną?

b) Podaj takie parametryzacje przy $t \in [0, 1]$ odcinków: $(0, 0)(1, 5)$ i $(0, 2)(9, 0)$, które opisują ruch punktów które się 'zderzą' w punkcie przecięcia tych odcinków.

4. Podaj opis jakiejś wędrówki:

a) po łamanej $\{(x, y) : y = |x| \wedge x \in [-2, 2]\}$

b) po łamanej $\{(x, y) : y = ||x - 1| - 2| \wedge x \in [-5, 5]\}$

c) po brzegu kwadratu o wierzchołkach: $(-1, -1)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$, $(-1, 1)$

d) po brzegu jakiegoś trójkąta e) po ósemce

5. Wzór $M(t) = (5 \cos(\pi/2 - 2\pi t), y = 5 \sin(\pi/2 - 2\pi t))$, $t \in [0, 24]$ opisuje położenie końca minutowej wskazówki (o długości ...) zegarka jako funkcję czasu.

a) Opisz ruch końca małej wskazówki (o długości 3)

b) Opisz długość odcinka łączącego końce wskazówek (jako funkcję czasu). Jest to funkcja o okresie

c) Jak zmienić powyższe, gdy zegar późni się (jednostajnie) 5 minut na dobę?

* * *

6. Zbiór wartości funkcji $F : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F(t) = (\cos t, \sin t, t)$ nazywany jest *linią śrubową*. Opisz gwint śruby o średnicy 12mm i skoku 2mm.

* * *

7*. W których z poprzednio rozważanych ruchów szybkość jest stała, czyli $||v(t)|| = \text{const}$? W których przyspieszenie ma stałą wartość?

8*. Opisz ruch po okręgu, w którym największa szybkość osiągana jest 'na dole okręgu'. Dla utrudnienia: niech to będzie ruch okresowy.