

ANALIZA MATEMATYCZNA A3. LISTA 2.

c1. WYPEŁNIAŃKA. Udowodnimy, że granicą ciągu $a_n = (\frac{1}{\dots\dots}, \frac{n-1}{\dots\dots})$ punktów płaszczyzny ($\mathbb{R}^2$) jest punkt $g = (\dots, \dots)$. Zauważmy, że dla $n \in \mathbb{N}$ zachodzi:

$$\begin{aligned} \|a_n - (0, 1)\| &= \sqrt{\left(\frac{1}{2n+3} - \dots\right)^2 + \left(\frac{n-1}{n} - \dots\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{(2n+3)^2} + \frac{1}{n^2}} = \\ &= \frac{1}{n(2n+3)} \sqrt{5n^2 + 12n + 9} \leq \frac{1}{n(2n+3)} \sqrt{26n^2} = \frac{\dots\dots}{2n+3}. \end{aligned}$$

Stąd dla dowolnego $\varepsilon > 0$ dla każdego naturalnego $n \geq \dots\dots$ mamy $\|a_n - g\| < \varepsilon$ □

c2. Odgadnij granicę g ciągu a_n i udowodnij wprost z definicji, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$, gdy

a) $a_n = \left(\frac{1}{n^2}, \frac{n-2}{n^2-4}\right)$ b) $a_n = \left(\frac{\sin(n\pi/6)}{n}, \frac{1}{n+3}\right)$ c) $a_n = \left(\frac{\sin n}{n^2}, \frac{\cos n}{n^3}\right)$

c3. Udowodnij wprost z definicji, że $(1, 0)$ nie jest granicą ciągu $a_n = (n \sin \frac{1}{n}, \sin(\frac{n\pi}{3}))$.

c4. Podaj po trzy przykłady ciągów $a_n = (a'_n, a''_n)$ zbieżnych do $(0, 0)$ i takich, że

a) $0 < a'_n < n \cdot a''_n$ b) $\lim \frac{a'_n}{a''_n} = 17$ c) $\lim \frac{a'_n}{a''_n} = -\infty$ d) $\lim \frac{a''_n}{a'_n} = \infty$

c5. Karol Omyłek (jak to Karol) wypowiedział błędne zdania. Gdzie są błędy?

- a) Każdy rosnący i ograniczony ciąg punktów płaszczyzny jest zbieżny.
b) Jeżeli ciąg (x_n) ma podciąg zbieżny do π i ciąg (y_n) ma podciąg zbieżny do e , to ciąg (a_n) zdefiniowany wzorem $a_n = (x_n, y_n)$, ma podciąg zbieżny do (π, e) .
* * *

1. Niech $f(x, y) = x^2 - y + 2$.

PRZYGOTOWANIA DO ZADANIA 9.

a) Oblicz: $f(2, 3) = \dots\dots\dots$, $f(3, 2) = \dots\dots\dots$, $f(x, 0) = \dots\dots\dots$,
 $f(1, y) = \dots\dots\dots$, $f(2x + y, 3x) = \dots\dots\dots$, $f(x, -x) = \dots\dots\dots$

b) Rozwiąż równania: $f(x, 4) = 0$, $f(4, y) = 0$, $f(x, x) = 0$, $f(y, y) = 0$

c) Zaznacz w układzie współrzędnych następujące zbiory:

$P_0 = \{(x, y) : f(x, y) = 0\}$, $P_1 = \{(x, y) : f(x, y) = 1\}$, $P_2 = \{(x, y) : f(x, y) = 2\}, \dots$

d) Następujące zbiory leżą na płaszczyznach. Narysuj je (płaszczyzny i zbiory).

$A = \{(x, y, z) : z = f(x, y) \wedge y = 1\}$, $B = \{(x, 2, f(x, 2)) : x \in \mathbb{R}\}$,

$C = \{(2, y, z) : z = f(2, y)\}$, $D = \{(x, y, z) : z = f(x, y) \wedge y = x + 1\}$,

$E = \{(x, y, f(x, y)) : x = 1\}$, $F = \{(x, x, z) : z = f(x, x)\}$

2. KONIECZNIE powtórz zadanie 1. dla innych przykładów funkcji.

3. Jak wyglądają wykresy funkcji: $f(x, y) = x^2$, $g(x, y) = x^2 - y$, $h(x, y) = x^3 - x$?

3'. Niech $f, g : [0, 3] \times [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ i $g(x, y) = f([x], [y])$. Jak wygląda wykres funkcji g ? A jak $g_2(x, y) = f([2x]/2, [2y]/2)$?

4. Podaj po trzy przykłady (wzorów) funkcji $f(x, y)$ takich, że

- a) $0 \leq f(x, y) \leq 2$ i $f(x, y) = f(y, x)$ dla każdej pary (x, y)
b) $f(x, y) = f(-x, -y)$ dla każdej pary (x, y) c) $\forall_x \forall_y f(x, y) = f(x, -y)$
d) $\forall_{x, y} f(x, y) = f(|x|, |y|)$ Jak sens geometryczny mają powyższe warunki?

5. Opisz (i naszkicuj) obszar będący dziedziną funkcji dwóch zmiennych

a) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2/9 - y^2/16}$ b) $f(x, y) = \ln(y^2 - 4x + 8)$

c) $f(x, y) = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$ d) $f(x, y) = \sqrt{x - \sqrt{y}}$ e) $f(x, y) = \ln(xy)$

f) $f(x, y) = \arcsin \frac{x+y^2}{4}$ g) $f(x, y) = \sqrt{x \sin y}$ h) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}$

i) $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2} + \sqrt{x+2}$ j) $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y} + \sqrt{x^2 + y}$

k) $f(x, y) = \arcsin \frac{x}{y}$ l) $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$ m) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 9)$

n) $f(x, y) = \sin^{-1} x + \cos^{-1} y$ o) $f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2} - (x^2 + y^2 - 4)^{-1/2}$

6. Niech $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Niektóre z poniższych napisów nie mają sensu – które?

$f(g(x, y), y)$, $f(g(x, y), g(x, y))$, $f(g(x), g(y))$, $g(f(g(x, y), x), x)$, $g(f(x+1, y) + x)$.

7. Niech $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $g_\alpha(x, y) = (x^2 + y^2)^\alpha$, dla $\alpha > 0$. Jak wyglądają wykresy tych funkcji? (WSK. p. zad.1c; rozważ też zbiór $\{(x, 0, z) : z = g_\alpha(x, 0)\}$.)

8. Dobierz odpowiednią funkcję (i jej dziedzinę) tak, by jej wykres wyglądał jak:

- a) dach (dwuspadzisty) b) dach hali fabrycznej c) dach hangaru
d) pół pow. piłki do rugby e) wigwam f) namiot igloo g) wulkan

9. Narysuj poziomicę (i/lub inne cięcia) wykresu funkcji tak, by odkryć jego kształt.

a) $f(x, y) = x^2 + y^2$ b) $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$ c) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy$

d) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy$ e) $f(x, y) = xy$ f) $f(x, y) = x^2 - y^2$

g) $f(x, y) = x + y$ h) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ i) $f(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4}$

j) $f(x, y) = \sqrt[4]{x^2 + y^2}$ k) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x$ l) $f(x, y) = 2x + [y]$

m) $f(x, y) = y^2 - |x|$ n) $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ o) $f(x, y) = \sqrt[4]{x^4 + y^4}$

p) $f(x, y) = x^4 + y^4 + xy$ r) $f(x, y) = x^4 + y^4 + 4xy$ s) $f(x, y) = y^3 - 3x^2y$

t) $f(x, y) = x^4 - 2x^2 + y^2$ u) $f(x, y) = x^4 - 2x^2 - y^2$ v) $f(x, y) = [x] \cdot [y]$

w) $f(x, y) = x^4 - 2x^2 + y^4 - 2y^2$ y) $f(x, y) = x^4 - 2x^2 - y^4 + 2y^2$

x) $f(x, y) = x^3 - 3x + y^3 - 3y$ z) $f(x, y) = x^3 + y^2$ ż) $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)^p$