Pokazać, że dla liczby $a > 0$ mamy

$$\int\limits_0^\infty \frac{t^2 - a}{(t^2+1)(t^2+a^2)}\,dt = 0.$$

Jedynym punktem osobliwym jest ∞. Całka jest zbieżna, bo w nieskończoności funkcja podcałkowa zachowuje się jak $1/t^2$. Wykonujemy podstawienie $t = a/y$. Wtedy $dt = -(a/y^2)\,dy$. Przy podstawieniu 0^+ przechodzi na ∞ i vice versa. Minus zużywamy na zapisanie nowej całki od 0 do ∞. Po przekształceniu otrzymujemy

$$\int\limits_0^\infty \frac{a - y^2}{(y^2+1)(y^2+a^2)}\,dy,$$

czyli wynik przeciwny do wyjściowego. Zatem całka zeruje się.

Można też, od biedy, obliczyć funkcję pierwotną poprzez rozbicie na ułamki proste funkcji podcałkowej. Najpierw przyjmijmy $x = t^2$. Przy założeniu $a \neq 1$ chodzi o rozbicie

$$\frac{x-a}{(x+1)(x+a^2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+a^2}.$$

Stąd łatwo obliczyć, że

$$A = \left.\frac{x-a}{x+a^2}\right|_{x=-1} = \frac{-1-a}{-1+a^2} = \frac{1}{1-a}, \quad B = \left.\frac{x-a}{x+1}\right|_{x=-a^2} = -\frac{a}{1-a}.$$

Dla $a = 1$ rozbicie na ułamki proste ma postać

$$\frac{x-1}{(x+1)^2} = \frac{x+1-2}{(x+1)^2} = \frac{1}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2}.$$