

Znaleźć przybliżenie liczby $\sqrt{5}$ z dokładnością do 10^{-4} .

Stosujemy wzór Taylora dla funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ w punkcie $a = 4$. Wtedy

$$f(x) = f(4) + f'(4)(x-4) + \frac{1}{2}f''(4)(x-4)^2 + \frac{1}{6}f'''(4)(x-4)^3 + \frac{1}{24}f^{(4)}(4)(x-4)^4 + R_5(x),$$

gdzie

$$R_5 = \frac{1}{120}f^{(5)}(4 + \theta(x-4))(x-4)^5.$$

Ponieważ

$$f^{(k)}(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{2} - k + 1\right) x^{(1/2)-k},$$

to

$$f(4) = 2, \quad f'(4) = \frac{1}{4}, \quad f''(4) = -\frac{1}{32}, \quad f'''(4) = \frac{3}{256}, \quad f^{(4)}(4) = -\frac{15}{2048}.$$

Zatem dla $x = 5$ mamy

$$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{64} + \frac{1}{512} - \frac{5}{16384} + R_5(5),$$

gdzie

$$R_5(5) = \frac{1}{120}f^{(5)}(4 + \theta) = \frac{1}{120} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{5}{2} \frac{7}{2} (4 + \theta)^{(1/2)-5} \leq \frac{7}{2^{17}} < \frac{1}{10^4}.$$