Zadanie

Pokazać, że jeśli b/a jest liczbą wymierną różną od ± 1, 0, $\pm\infty$, to kąt $\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}$ jest niewspółmierny z π.

Rozwiązanie

Niech $\varphi = 2\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}$. Wtedy

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2ab}{a^2 - b^2} \text{ oraz } \cos\varphi = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}.$$

Możemy założyć, że ułamek $\frac{b}{a}$ jest nieskracalny. Wtedy

(a) ułamek $\dfrac{b^2}{a^2 + b^2}$ jest nieskracalny;
(b) $a^2 + b^2 > 4$.

Zatem

$$2\cos\varphi = 2 + \frac{4b^2}{a^2 + b^2} \notin \mathbf{Z}. \tag{1}$$

Następnie pokażemy, że jeśli kąt φ jest współmierny z π oraz $\cos\varphi$ jest liczbą wymierną, to $2\cos\varphi$ musi być liczbą całkowitą i w ten sposób uzyskamy sprzeczność z (1).

Niech $a_n = 2\cos n\varphi$ i $x = 2\cos\varphi$. Wtedy ze znanego wzoru trygonometrycznego mamy

$$xa_n = a_{n+1} + a_{n-1}.$$

Indukcyjnie można wykazać, że a_n jest wielomianem stopnia n zmiennej x, i że ten wielomian ma współczynniki całkowite, przy czym współczynnik przy x^n jest równy 1. Np.

$$a_0 = 1, \quad a_1 = x, \quad a_2 = x^2 - 1, \quad a_3 = x^3 - 2x, \quad a_4 = x^4 - 3x^2 + 1.$$

Oznaczmy ten wielomian przez $p_n(x)$. Tzn.

$$2\cos n\varphi = p_n(x).$$

Jeśli kąt φ jest współmierny z π, to dla pewnego n mamy

$$2 = 2\cos n\varphi = p_n(x).$$

To równanie ma pierwiastki całkowite lub niewymierne. Zatem $x = 2\cos\varphi$ jest liczbą całkowitą.