

Wykład Nr 02, 03

(wyk. 15, 22 X 10 r.)

Definicja 1. (programowanie liniowe (LP), [3, s. 14])

Zagadnienie programowania liniowego (LP) polega na znalezieniu zbioru nieujemnych wartości zmiennych, minimalizujących liniową funkcję celu i spełniających pewien zbiór ograniczeń liniowych.

Definicja 2. (standardowa postać LP, [3, s. 14])

Znaleźć minimum

$$z = c^T x$$

przy warunkach

$$Ax \leq b,$$

$$x \geq 0,$$

gdzie A jest daną macierzą o wymiarach $m \times n$, $m \leq n$, c jest n -elementowym wektorem kosztów, b jest wektorem o m składowych, a x jest wektorem niewiadomych o n składowych.

Dalej pojęcia są wzięte z [1, pp. 42–50].

Definicja 3. (wielościan)

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b\}$$

gdzie $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$.

Definicja 4. (hiperpłaszczyzna)

$$\{x \in \mathbb{R}^n : x^T a = b\}$$

gdzie $a \neq 0$, $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$.

Definicja 5. (zbiór wypukły)

$$S \subset \mathbb{R}^n - \text{wypukły} \iff \forall x, y \in S \forall \lambda \in [0, 1] : \lambda x + (1 - \lambda)y \in S.$$

Definicja 6. (wypukła otoczka)

$$\{\lambda_1 x^1 + \dots + \lambda_n x^n : \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1, \text{ gdzie } \lambda_i \geq 0\}.$$

Definicja 7. (punkt ekstremalny) Niech P będzie wielościanem:

$$x \in P - \text{ekstremalny} \iff \neg \exists y, z \in P, y \neq x, z \neq x \exists \lambda \in [0, 1] : x = \lambda y + (1 - \lambda)z.$$

Definicja 8. (wierzchołek) Niech P będzie wielościanem:

$$x \in P - \text{wierzchołek} \iff \exists c \in \mathbb{R}^n \forall y \in P, y \neq x : c^T x < c^T y$$

Niech będzie dany $P \subset \mathbb{R}^n$ – wielościan:

$$\begin{aligned} a_i^T x &\geq b_i, & i &\in M_1, \\ a_i^T x &\leq b_i, & i &\in M_2, \\ a_i^T x &= b_i, & i &\in M_3, \end{aligned}$$

gdzie M_1, M_2, M_3 – skończone zbiory indeksów, każdy $a_i \in \mathbb{R}^n$ a $b_i \in \mathbb{R}$.

Definicja 9. (ograniczenie aktywne) Jeśli x^* spełnia $a_i^T x^* = b_i$ dla pewnego $i \in M_1 \cup M_2 \cup M_3$, to mówimy że odpowiednie ograniczenie jest aktywne w x^* .

Twierdzenie 1. Niech $x^* \in \mathbb{R}^n$ i niech $I = \{i \in I : a_i^T x^* = b_i\}$ będzie zbiorem indeksów aktywnych ograniczeń w x^* . Wtedy następujące warunki są równoważne:

- (1) W zbiorze $\{a_i : i \in I\}$ istnieje n niezależnych liniowo wektorów.
- (2) $\text{lin}\{a_i : i \in I\} = \mathbb{R}^n$.
- (3) Układ równań $a_i^T x^* = b_i, i \in I$ wyznacza jednoznacznie rozwiązanie.

Definicja 10.

Niech P będzie wielościanem zdefiniowanym przez ograniczenia typu równości i nierówności, oraz niech $x^* \in \mathbb{R}^n$.

- (1) Wektor x^* nazywamy rozwiązaniem bazowym, gdy:
 - (a) wszystkie ograniczenia typu równości są aktywne,
 - (b) wśród ograniczeń aktywnych w x^* jest n liniowo niezależnych.
- (2) Jeśli x^* jest rozwiązaniem bazowym spełniającym wszystkie ograniczenia, to wtedy mówimy że jest to rozwiązanie bazowe dopuszczalne.

Twierdzenie 2.

Niech $P \neq \emptyset$ będzie wielościanem i niech $x^* \in P$. Wtedy następujące warunki są równoważne:

- (1) x^* jest wierzchołkiem,
- (2) x^* jest punktem ekstremalnym,
- (3) x^* jest rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym.

Wniosek 1.

Dla skończonej liczby liniowych ograniczeń typu nierówność istnieje skończenie wiele rozwiązań bazowych i rozwiązań bazowych dopuszczalnych.

Twierdzenie 3.

Niech będą dane ograniczenia $Ax = b$ i $x \geq 0$ i założmy, że $m \times n$ macierz A ma liniowo niezależne wiersze. Wektor $x \in \mathbb{R}^n$ jest rozwiązaniem bazowym jedynie wtedy, gdy $Ax = b$ i istnieją indeksy $i_1, \dots, i_m$ o własności:

- (1) kolumny $A_{i_1}, \dots, A_{i_m}$ są liniowo niezależne,
- (2) dla $i \notin \{i_1, \dots, i_m\}$, $x_i = 0$.

Literatura

- [1] Bertsimas, D. & Tsitsiklis, J.N., *Introduction to Linear Optimization*, Athena Scientific, 1997.
- [2] Nazareth, J.L., *An Optimization Primer. On Models, Algorithms, and Duality*, Springer, 2004.
- [3] Sysło, M.M., Deo, N. & Kowalik, J.S., *Algorytmy optymalizacji dyskretnej*, WN PWN, 1995.

Wrocław, dnia 18/11/2010