

Wykład Nr 06, 07

(wyk. 19 XI, 26 XI 10 r.)

Algorytm sympleks^{1 2} – na liście: Top 10 Algorithms [2].

Zadanie:
$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{ograniczone do:} & Ax = b, \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Oznaczenia: $P = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$ – wielościan. A macierz $m \times n$ z wierszami liniowo niezależnymi. A_i – i ta kolumna macierzy A , a_i^T – i ty wiersz.

Definicja 1. (dopuszczalny kierunek)

Niech $x \in P$. Wektor $d \in \mathbb{R}^n$ nazywamy dopuszczalnym kierunkiem, jeśli istnieje dodatnia liczba θ dla której zachodzi: $x + \theta d \in P$.

Konstrukcja bazowego kierunku:

Niech x będzie bazowym dopuszczalnym rozwiązaniem, niech $i_1, \dots, i_m$ będą indeksami bazowych zmiennych i niech $B = [A_{i_1}, \dots, A_{i_m}]$ będzie odpowiednią macierzą bazową. Mamy³

$$x_B = B^{-1}b.$$

Rozważamy przejście z x do $x + \theta d$ przez wybór niebazowej zmiennej x_j . Wymagamy aby $A(x + \theta d) = b$ i oczywiście zachodzi $Ax = b$. Stąd, przy $\theta > 0$ aby ograniczenie było spełnione musi zajść $Ad = 0$. Ponieważ $d_j = 1$ i $d_i = 0$ dla pozostałych niebazowych indeksów, to mamy

$$0 = Ad = \sum_{i=1}^n A_i d_i = \sum_{k=1}^m A_{i_k} d_{i_k} + A_j = Bd_B + A_j.$$

Stąd

$$d_B = -B^{-1}A_j \quad \text{jest to } j - \text{ty kierunek bazowy.}$$

Z ograniczeniami typu nieujemnego jest jeszcze łatwiej.

A co się dzieje z funkcją kosztów ?

Definicja 2. (zredukowany koszt)

Niech x będzie rozwiązaniem bazowym, niech B będzie odpowiadającą bazową macierzą i niech c_B będzie wektorem kosztów współrzędnych bazowych. Dla każdego j definiujemy zredukowany koszt $\bar{c}_j$ dla zmiennej x_j , który jest określony wzorem:

$$\bar{c}_j = c_j - c_B^T B^{-1} A_j.$$

¹ http://pl.wikipedia.org/wiki/Algorytm_sympleksowy

² http://en.wikipedia.org/wiki/Simplex_algorithm

³ Wyk. Nr 05

Przykład 1.

$$\begin{array}{ll}
\min & c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 \\
\text{ograniczone do} & \begin{array}{rrrr} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 = 2 \\ 2x_1 & & +3x_3 & +4x_4 = 2. \end{array} \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.
\end{array}$$

Twierdzenie 1.

Niech x będzie dopuszczalnym bazowym rozwiązaniem z macierzą bazową B i niech $\bar{c}$ będzie odpowiadającym wektorem zredukowanych kosztów.

Zad. 1 Jeśli $\bar{c} \geq 0$, wtedy x jest optymalne.

Zad. 2 Jeśli x jest optymalne i niezdegenerowane, to wtedy $\bar{c} \geq 0$.

Definicja 3.

Macierz bazowa B nazywamy optymalną, jeśli

Zad. 1 $B^{-1}b \geq 0$ oraz

Zad. 2 $\bar{c}^T = c^T - c_B^T B^{-1}A \geq 0^T$.

Twierdzenie 2.

Niech

$$\bar{B}(i) = \begin{cases} B(i), & i \neq l, \\ j, & i = l. \end{cases}$$

Zad. 1 Jeśli kolumny $A_{B(i)}$, $i \neq l$ i A_j są liniowo niezależne, to $\bar{B}$ jest macierzą bazową.

Zad. 2 Wektor $y = x + \theta^* d$ jest bazowym dopuszczalnym rozwiązaniem związanym z macierzą bazową $\bar{B}$.

Przedstawienie metody sympleks

Założmy, że x jest dopuszczalnym rozwiązaniem bazowym i niech $\bar{c}_j$ będzie zredukowanym kosztem j -tej niebazowej zmiennej. Jeśli $\bar{c}_j \geq 0$, to z twierdzenia (Wyk. 09 tw. 1) x jest optymalnym rozwiązaniem i koniec. Jeśli natomiast zredukowany koszt $\bar{c}_j$ niebazowej zmiennej x_j jest ujemny, to j -te bazowy kierunek d jest dopuszczalnym kierunkiem w którym koszt maleje.

Algorytm sympleks

Zad. 1 Startujemy z bazy utworzonej z bazowych kolumn $A_{i_1}, \dots, A_{i_m}$ i odpowiadającego tej bazie bazowego rozwiązania dopuszczalnego x .

Zad. 2 Obliczamy zredukowane koszty $\bar{c}_j = c_j - c_B^T B^{-1}A_j$ dla wszystkich niebazowych indeksów j . Jeśli wszystkie obliczone koszty są nieujemne, to aktualne rozwiązanie bazowe dopuszczalne jest optymalne i algorytm kończy działanie. W przeciwnym przypadku istnieje j dla którego $\bar{c}_j < 0$.

Zad. 3 Obliczamy $u = B^{-1}A_j$. Jeśli wszystkie składowe u są niedodatnie, to mamy $\theta^* = \infty$ i optymalny koszt wynosi $-\infty$. Kończymy algorytm.

Zad. 4 Jeśli jakaś składowa u jest dodatnia, to niech

$$\theta^* = \min_{\{k=1,\dots,m|u_k>0\}} \frac{x_{i_k}}{u_k}.$$

Zad. 5 Niech indeks ℓ spełnia $\theta^* = x_{i_\ell}/u_\ell$. Tworzymy nową bazę zamieniając A_{i_ℓ} z A_j . Jeśli y jest nowym dopuszczalnym bazowym rozwiązaniem, to wartości składowych $y_j = \theta^*$ oraz $y_{i_k} = x_{i_k} - \theta^* u_k$, $k \neq \ell$.

Twierdzenie 3.

Założmy, że zbiór rozwiązań dopuszczalnych jest niepusty i że każde dopuszczalne bazowe rozwiązanie jest niezdegenerowane. Wtedy algorytm sympleks skończy swoje działanie po skończonej liczbie kroków z wynikiem:

- (a) Otrzymaliśmy optymalną bazę B i związane z nią dopuszczalne bazowe rozwiązanie, które jest optymalne.
- (b) Znaleźliśmy wektor d spełniający $Ad = 0$, $d \geq 0$ i $c^T d < 0$. Optymalny koszt wynosi $-\infty$.

Literatura

- [1] Bertsimas, D. & Tsitsiklis, J.N., *Introduction to Linear Optimization*, Athena Scientific, 1997.
- [2] Barry A. Cipra, *The Best of the 20th Century: Editors Name Top 10 Algorithms*, SIAM News, Volume 33, Number 4, <http://www.siam.org/pdf/news/637.pdf>

Wrocław, dnia 03/12/2010