

Wykład Nr 08

(wyk. 3 XII 10 r.)

Algorytm sympleks – Tablica sympleks¹ (Simplex Tableaux).

Postać tablicy sympleks i przykład są z [4] oraz [2], gdzie dodatkowo na stronie [Example LP3: Using the Simplex Tableau](#)² jest poglądowa animacja.

Twórca – George Dantzig, USA 1947 rok

Cel: rozwiązywanie zadania programowania liniowego określonego w postaci standardowej:

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{przy warunkach:} & Ax = b, \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Oznaczenia: $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$ – wielościan. A macierz $m \times n$ z wierszami liniowo niezależnymi. Oznaczenia: A_i – i ta kolumna macierzy A , a_i^T – i ty wiersz.

Funkcja celu $f(x_1, \dots, x_n) = c^T x = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \rightarrow \min$,
szukamy minimum przy warunkach:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \quad x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, \quad b_1 \geq 0, \dots, b_m \geq 0.$$

W skrócie:

$$\min\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}, \text{ gdzie } A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

Zakładamy (oczywiście $m < n$!), że $\text{rz}(A) = m$.

Schemat przeszukiwania: Zaczynając od pewnego *rozwiązania bazowego dopuszczalnego*, przechodzimy kolejno do innych *rozwiązań bazowych dopuszczalnych*, w każdym kroku zastępując jeden element *zbioru bazowego* innym, dopóki da się pomniejszać wartość *funkcji celu* f .

Interpretacja geometryczna: *Rozwiązania bazowe dopuszczalne* = *wierzchołki wielościanu* (zbioru dopuszczalnego) P . Wymiana jednego elementu w *zbiorze bazowym* = przejście do sąsiedniego (tzn. połączonego krawędzią) *wierzchołka* wielościanu P . Wędrówkę po wierzchołkach kończymy w wierzchołku „najniższym” w sensie *funkcji celu* f .

Przykład (Szczegóły metody sympleks):

Szukamy największej wartości funkcji $g(x_1, x_2) = 15x_1 + 10x_2$, przy ograniczeniach
(*) $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 \leq 2, x_2 \leq 3, x_1 + x_2 \leq 4$.

Sprowadzamy zagadnienie do postaci standardowej, wprowadzając dodatkowe zmienne x_3, x_4, x_5 ,

¹ Za [4] i [5] przyjęliśmy nazwę *tablica sympleks* w [6] jest *tabela simpleksowa*.

² <http://optlab-server.sce.carleton.ca/POAnimations2007/SimplexTableau.html>

zastępując nierówności (*) następującym układem równości i nierówności elementarnych:

$$\begin{aligned}x_1 + x_3 &= 2 \\x_2 + x_4 &= 3 \\x_1 + x_2 + x_5 &= 4 \\x_1 \geq 0, \dots, x_5 &\geq 0\end{aligned}$$

zaś maksymalizację funkcji g minimalizacją funkcji $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = -15x_1 - 10x_2$. Inaczej można to zadanie zapisać w postaci $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = -15x_1 - 10x_2 \rightarrow \min$ przy

$$Ax = b, \quad x \geq 0, \quad \text{gdzie} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix},$$

Utworzymy tzw. *tablicę sympleks*, składającą się z macierzy bazowego układu równań zadania programowania liniowego, rozszerzonej o wiersz nazwany *wierszem funkcji celu* reprezentujący równanie $z = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \iff z - f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 0$, gdzie z jest pewną dodatkową zmienną i pewną pomocniczą kolumnę tzw. *kolumnę ilorazów*, która pozwoli nam podjąć decyzję usunięcia zmiennej z układu bazowego i kolumnę reprezentującą wybór zmiennych układu bazowego. Początkowym rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym jest $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 2, 3, 4)$.

zmienna bazowa	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	iloraz
x_3	0	1	0	1	0	0	2	*
x_4	0	0	1	0	1	0	3	*
x_5	0	1	1	0	0	1	4	*
wiersz f	1	15	10	0	0	0	0	

W wierszu f (funkcji celu) występują w kolumnach zmiennych x_1, x_2 wyrazy dodatnie. Oznacza to, że można poprawić (zmniejszyć) funkcję celu przechodząc do nowego rozwiązania bazowego dopuszczalnego. Jako nową zmienną bazową wybieramy x_1 , kierując się tym, że w jej kolumnie w wierszu f jest największa liczba.

Musimy również wybrać spośród zmiennych x_3, x_4, x_5 , tą, która opuści zbiór zmiennych bazowych. W tym celu obliczamy ilorazy wyrazów stałych z kolumny b przez odpowiadające im elementy w kolumnie nowej zmiennej bazowej x_1 – o ile elementy te są dodatnie (jeśli takich elementów nie było, oznaczałoby to, że f nie jest ograniczona z dołu na P).

	zmienna bazowa	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	iloraz
$w_1 :$	x_3	0	1	0	1	0	0	2	$2/1 = 2$
$w_2 :$	x_4	0	0	1	0	1	0	3	nd
$w_3 :$	x_5	0	1	1	0	0	1	4	$4/1 = 4$
$w_f :$	wiersz f	1	15	10	0	0	0	0	

Najmniejszy z ilorazów = 2, w jego wierszu w_1 jest 1 w kolumnie zmiennej bazowej x_3 z tej to przyczyny zmienna ta opuszcza *zmiennie bazowe*. Operacjami: $\bar{w}_3 := w_3 - w_1$, $\bar{w}_f := w_f - 15w_1$ budujemy nową tablicę – względem zmiennych x_1, x_4, x_5 .

	zmienna bazowa	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	iloraz
$\bar{w}_1$:	x_1	0	1	0	1	0	0	2	*
$\bar{w}_2$:	x_4	0	0	1	0	1	0	3	*
$\bar{w}_3$:	x_5	0	0	1	-1	0	1	2	*
$\bar{w}_f$:	wiersz f	1	0	10	-15	0	0	-30	

Nowym rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym jest $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2, 0, 0, 3, 2)$, wartość f odczytujemy w w_f , kolumny b : mamy $z = -30$. Znow w wierszu funkcji celu zauważamy element dodatni 10 w rubryce x_2 . Zatem można poprawić wartość f . Nową zmienną bazową jest x_2 , zmienną opuszczającą zmiennie bazowe wyznacza test ilorazów:

	zmienna bazowa	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	iloraz
w_1 :	x_1	0	1	0	1	0	0	2	nd
w_2 :	x_4	0	0	1	0	1	0	3	3/1 = 3
w_3 :	x_5	0	0	1	-1	0	1	2	2/1 = 2
w_f :	wiersz f	1	0	10	-15	0	0	-30	

Jest nią x_5 . Przy pomocy operacji $\bar{w}_2 := w_2 - w_3$, $\bar{w}_f := w_f - 10w_3$ tworzymy następną tablicę sympleks:

	zmienna bazowa	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	iloraz
$\bar{w}_1$:	x_1	0	1	0	1	0	0	2	*
$\bar{w}_2$:	x_4	0	0	0	1	1	-1	1	*
$\bar{w}_3$:	x_2	0	0	1	-1	0	1	2	*
$\bar{w}_f$:	wiersz f	1	0	0	-5	0	-10	-50	

Tym razem w wierszu f w kolumnach zmiennych $x_1, \dots, x_5$ nie ma dodatnich elementów - tzn. jesteśmy w minimum = -50. Znalezione rozwiązanie bazowe dopuszczalne to $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2, 2, 0, 1, 0)$. Zatem rozwiązanie pierwotnego problemu, to $\max(g) = 50$, w punkcie $(x_1, x_2) = (2, 2)$.

Modyfikacja przykładu 3.5 z [1, ss. 101-103]:

Szukamy najmniejszej wartości funkcji $f(x_1, x_2, x_3) = -10x_1 - 12x_2 - 12x_3 \rightarrow \min$, przy ograniczeniach $x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 20$, $2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 20$, $2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 20$ i $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$.

Po sprowadzeniu zagadnienia do postaci standardowej, przez wprowadzenie zmiennych pomocniczych x_4, x_5, x_6 , przedstawiamy zadanie w postaci zapisu macierzowego:

$$\min\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$$

$$\text{gdzie } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} -10 \\ -12 \\ -12 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ 20 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}.$$

Tak jak poprzednio tworzymy *tablicę sympleks* oznaczając:

$z = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = -10x_1 - 12x_2 - 12x_3$. Tyma razem w tablicy sympleks nie ma kolumny oznaczonej jako z . Początkowym rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym jest $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 0, 0, 20, 20, 20)$. Przy przyjętych oznaczeniach, zechcemy poprzez dopuszczalne operacje wykonane na tablicy sympleks, pozbyć się ujemnych wartości w *wierszu* f .

zmienna bazowa	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	iloraz
x_4	1	2	2	1	0	0	20	*
x_5	2	1	2	0	1	0	20	*
x_6	2	2	1	0	0	1	20	*
wiersz f	-10	-12	-12	0	0	0	0	

Z uwagi na ujemną wartość w *wierszu* f , wybieramy nową zmienną bazową x_1 oraz obliczamy ilorazy:

	zmienna bazowa	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	iloraz
$w_1 :$	x_4	1	2	2	1	0	0	20	$20/1 = 20$
$w_2 :$	x_5	2	1	2	0	1	0	20	$20/2 = 10$
$w_3 :$	x_6	2	2	1	0	0	1	20	$20/2 = 10$
$w_f :$	wiersz f	-10	-12	-12	0	0	0	0	

Z testu ilorazów wynika, że zmienną opuszczającą zmienne bazowe jest zmienna x_5 . Na tablicy sympleks dokonujemy odpowiadające temu faktowi dopuszczalne przekształcenia:

$$\bar{w}_1 := w_1 - \frac{1}{2}w_2, \bar{w}_3 := w_3 - w_2, \bar{w}_f := w_f + 5w_2, \bar{w}_2 := \frac{1}{2}w_2$$

Otrzymujemy w ten sposób nową tablicę sympleks

	zmienna bazowa	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	iloraz
$\bar{w}_1 :$	x_4	0	1.5	1	1	-0.5	0	10	*
$\bar{w}_2 :$	x_1	1	0.5	1	0	0.5	0	10	*
$\bar{w}_3 :$	x_6	0	1	-1	0	-1	1	0	*
$w_f :$	wiersz f	0	-7	-2	0	5	0	100	

Ograniczenia odpowiadające tak otrzymanej tablicy przedstawiają się następująco:

$$\begin{cases} 1.5 x_2 + x_3 + x_4 - 0.5 x_5 & = 10 \\ x_1 + 0.5 x_2 + x_3 + 0.5 x_5 & = 10 \\ x_2 - x_3 - x_5 + x_6 & = 0 \end{cases}$$

Z analizy *wiersza* f wybieramy nową zmienną bazową x_3 i tworzymy ilorazy:

	zmienna bazowa	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	iloraz
$w_1 :$	x_4	0	1.5	1	1	-0.5	0	10	$10/1 = 10$
$w_2 :$	x_1	1	0.5	1	0	0.5	0	10	$10/1 = 10$
$w_3 :$	x_6	0	1	-1	0	-1	1	0	nd
$w_f :$	wiersz f	0	-7	-2	0	5	0	100	

Z testu ilorazów wynika, że możemy usunąć zmienną x_4 . Dokonujemy tego poprzez operacje: $\bar{w}_2 := w_2 - w_1$, $\bar{w}_3 := w_3 + w_1$, $\bar{w}_f := w_f + 2w_1$

	zmienna bazowa	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	iloraz
$\bar{w}_1 :$	x_3	0	1.5	1	1	-0.5	0	10	*
$\bar{w}_2 :$	x_1	1	-1	0	-1	1	0	0	*
$\bar{w}_3 :$	x_6	0	2.5	0	1	-1.5	1	10	*
$\bar{w}_f :$	wiersz f	0	-4	0	2	4	0	120	

Kolejna tablica sympleksowa przedstawia się następująco:

	zmienna bazowa	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	iloraz
$w_1 :$	x_3	0	1.5	1	1	-0.5	0	10	$10/1.5 \approx 6.67$
$w_2 :$	x_1	1	-1	0	-1	1	0	0	nd
$w_3 :$	$\mathbf{x_6}$	0	2.5	0	1	-1.5	1	10	$10/2.5 = 4$
$w_f :$	wiersz f	0	-4	0	2	4	0	120	

Pozostaje nam tu pozbyć się z wiersza f wartości ujemnej -4 , dokonujemy tego poprzez operacje: $\bar{w}_1 := w_1 - 0.6w_3$, $\bar{w}_2 := w_2 + 0.4w_3$, $\bar{w}_f := w_f + 1.6w_3$, $\bar{w}_3 := 0.4w_3$

	zmienna bazowa	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	iloraz
$\bar{w}_1 :$	x_3	0	0	1	0.4	0.4	-0.6	4	*
$\bar{w}_2 :$	x_1	1	0	0	-0.6	0.4	0.4	4	*
$\bar{w}_3 :$	x_2	0	1	0	0.4	-0.6	0.4	4	*
$\bar{w}_f :$	wiersz f	0	0	0	3.6	1.6	1.6	136	

Otrzymaliśmy w ten sposób, że:

$$\min\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\} = -136$$

i jest osiągnięte w punkcie $(x_1, x_2, x_3) = (4, 4, 4)$.

Uwaga: Do sprawdzenia obliczeń polecam stronę [3].

Literatura

- [1] Bertsimas, D. & Tsitsiklis, J.N, *Introduction to Linear Optimization*, Athena Scientific, 1997.
- [2] Chinneck, J.W, *Practical Optimization: A Gentle Introduction*, Systems and Computer Engineering, Carleton University, Ottawa, Canada,
url: <http://www.sce.carleton.ca/faculty/chinneck/po.html>
- [3] Silva, P.M. & Guise, T.C., *Linear Programming - Simplex Applet*, Lisbon, 1999,
url: <http://vinci.inesc.pt/lp/>
- [4] Sobolewski, M., *Wykład z algebry liniowej*, WMIM UW, Warszawa, styczeń 2009 r.,
url: <http://www.mimuw.edu.pl/~msobol/>.
- [5] Strojnowski, A., *Optymalizacja I*, WMIM UW, 2010 r.,
url: <http://mst.mimuw.edu.pl/lecture.php?lecture=op1>
- [6] Wojda, A.P., *Wykłady z programowania liniowego*, Wydział Matematyki Stosowanej AGH, 2010,
url: http://wms.mat.agh.edu.pl/wojda/Prog_lin/Pl2/Pl2.html

Wrocław, dnia 06/12/2010