

Wykład Nr 10

(wyk. 17 XII 10 r.)

Przykład 3.6 z [1, ss. 104–105]:

Rozważmy następującą tablicę sympleks:

zmienna bazowa	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
x_5	*1/4	−8	−1	9	1	0	0	0
x_6	1/2	−12	−1/2	3	0	1	0	0
x_7	0	0	1	0	0	0	1	1
wiersz f	− 3/4	20	−1/2	6	0	0	0	3

Dążymy do tego aby z wiersza f pozbyć się wartości ujemnych. Metoda wyboru elementu do eliminacji (pivoting rules) jest następująca:

- (a) Wybieramy niebazową zmienną z najmniejszym ujemnym zredukowanym kosztem $\bar{c}_j$.
- (b) Dla wybranej zmiennej niebazowej z bazy usuwamy zmienną o najmniejszym indeksie dolnym.

W ten sposób otrzymujemy następujący ciąg tablic sympleks, gdzie * został oznaczony element do usunięcia:

zmienna bazowa	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
x_1	1	−32	−4	36	4	0	0	0
x_6	0	*4	3/2	−15	−2	1	0	0
x_7	0	0	1	0	0	0	1	1
wiersz f	0	− 4	−7/2	33	3	0	0	3

zmienna bazowa	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
x_1	1	0	*8	−84	−12	8	0	0
x_2	0	1	3/8	−15/4	−1/2	1/4	0	0
x_7	0	0	1	0	0	0	1	1
wiersz f	0	0	− 2	18	1	1	0	3

zmienna bazowa	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
x_3	1/8	0	1	−21/2	−3/2	1	0	0
x_2	−3/64	1	0	*3/16	1/16	−1/8	0	0
x_7	−1/8	0	0	21/2	3/2	−1	1	1
wiersz f	1/4	0	0	− 3	−2	3	0	3

zmienna bazowa	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
x_3	−5/2	56	1	0	*2	−6	0	0
x_4	−1/4	16/3	0	1	1/3	−2/3	0	0
x_7	5/2	−56	0	0	−2	6	1	1
wiersz f	−1/2	16	0	0	− 1	1	0	3

zmienna bazowa	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
x_5	$-5/4$	28	$1/2$	0	1	-3	0	0
x_4	$1/6$	-4	$-1/6$	1	0	* $1/3$	0	0
x_7	0	0	1	0	0	0	1	1
wiersz f	$-7/4$	44	$1/2$	0	0	-2	0	3

zmienna bazowa	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
x_5	* $1/4$	-8	-1	9	1	0	0	0
x_6	$1/2$	-12	$-1/2$	3	0	1	0	0
x_7	0	0	1	0	0	0	1	1
wiersz f	- $3/4$	20	$-1/2$	6	0	0	0	3

Po sześciu krokach otrzymaliśmy pierwszą tablicę sympleks, sposób wyboru elementu do usunięcia doprowadził do powstania cyklu !

Definicja 1. (porządek leksykograficzny)

Wektor $u \in \mathbb{R}^n$ jest leksykograficznie większy (mniejszy) od wektora $v \in \mathbb{R}^n \iff u \neq v$ i gdy pierwsza niezerowa składowa $u - v$ jest dodatnia (ujemna, odpowiednio).

Symbolicznie zapisujemy wtedy:

$$u >^L v \quad \text{lub} \quad u <^L v.$$

Przykładowo mamy, że:

$$(0, 2, 3, 0) >^L (0, 2, 1, 4)$$

oraz

$$(0, 4, 5, 0) <^L (1, 2, 1, 2).$$

Jeżeli wektor $u >^L 0$, to mówimy że u jest leksykograficznie dodatni.

Leksykograficzny wybór elementu (lexicographic pivoting rule)

1. Wybieramy kolumnę A_j z zredukowanym jej kosztem $\bar{c}_j$ ujemnym. Niech $u = B^{-1}A_j$ będzie j tą kolumną tablicy sympleks.
2. Dla każdego i , $u_i > 0$ dzielimy i ty wiersz tablicy sympleks przez u_i i wybieramy leksykograficznie najmniejszy wiersz. Jeśli wiersz l jest leksykograficznie najmniejszy, wtedy l ta zmienna bazowa x_l opuszcza bazę.

Przykład 3.7 z [1, ss. 109]:

Rozważmy następujący fragment tablicy sympleks i załóżmy, że wybraliśmy zmienną z kolumny trzeciej na nową zmienną bazową:

0	5	3	...	1
4	6	-1	...	2
0	7	9	...	3

Mamy teraz:

0	$5/3$	1	...	$1/3$
*	*	*	...	*
0	$7/9$	1	...	$1/3$

A ponieważ $7/9 < 5/3$, to z bazy usuwamy zmienną wyznaczoną przez trzeci wiersz.

Twierdzenie 1. *Założmy, że algorytm sympleks startuje z leksykograficznie dodatniego wiersza. Założmy też, że stosujemy leksykograficzny wybór elementu. Wtedy*

- (a) Każdy wiersz tablicy sympleks różny od wiersza zerowego pozostaje cały czas leksykograficznie dodatni.*
- (b) Zera w wierszach ściśle rosną leksykograficznie przy każdej iteracji.*
- (c) Algorytm sympleks kończy się po skończonej ilości kroków.*

Literatura

- [1] Bertsimas, D. & Tsitsiklis, J.N, *Introduction to Linear Optimization*, Athena Scientific, 1997.

Wrocław, dnia 07/01/2011