

Wykład Nr 12

(wyk. 14 I 11 r.)

Szukanie wierzchołka startowego

Rozważmy zadanie [1, pp. 112–116] LP:

$$\min c^T x$$

z ograniczeniami:

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

Mnożąc odpowiednio przez -1 wiersze w $Ax = b$ możemy doprowadzić do $b \geq 0$. Wprowadzamy teraz „sztuczne zmienne” (*artificial variables*) $y \in \mathbb{R}^m$ i używamy metody simpleks do rozwiązania pomocniczego zadania:

$$\min y_1 + y_2 + \dots + y_m$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{aligned} Ax + y &= b \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

W przypadku pomocniczego zadania znalezienie początkowego *bazowego rozwiązania dopuszczalnego* jest łatwe, wystarczy przyjąć $x = 0$, $y = b$ i macierz bazową identycznościową.

Uwaga: Jeżeli x jest dopuszczalnym rozwiązaniem wyjściowego zagadnienia, to wybierając x i kładąc $y = 0$ otrzymujemy rozwiązanie optymalne z funkcją kosztów równą zero zadania pomocniczego. Przeciwnie, jeżeli koszt optymalny dla zagadnienia pomocniczego jest różny od zera, to układ wyjściowy jest sprzeczny (infeasible).

Otrzymaliśmy w ten sposób metodę na stwierdzenie czy dane zadanie nie jest sprzeczne, oraz sposób na wyznaczenie początkowego bazowego rozwiązania dopuszczalnego o ile będziemy umieli wykluczyć z końcowej bazy zadania pomocniczego kolumny odpowiadające „sztucznym zmiennym”.

Pokażemy cały proces na przykładzie [1, pp. 114–115]. Rozważmy następujące zagadnienie LP:

$$\min x_1 + x_2 + x_3$$

z ograniczeniami:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 3 \\ -x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= 2 \\ 4x_2 + 9x_3 &= 5 \\ 3x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1, \dots, x_5 &\geq 0. \end{aligned}$$

Aby znaleźć dopuszczalne rozwiązanie rozważamy zagadnienie pomocnicze:

$$\min x_5 + x_6 + x_7 + x_8$$

z ograniczeniami:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 &= 3 \\ -x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_6 &= 2 \\ 4x_2 + 9x_3 + x_7 &= 5 \\ 3x_3 + x_4 + x_8 &= 1 \end{aligned}$$

$$x_1, \dots, x_8 \geq 0.$$

Tworzymy tablicę sympleks:

zmienna bazowa	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	b
x_5	1	2	3	0	1	0	0	0	3
x_6	-1	2	6	0	0	1	0	0	2
x_7	0	4	9	0	0	0	1	0	5
x_8	0	0	3	*1	0	0	0	1	1
wiersz f	0	-8	-21	-1	0	0	0	0	-11

I zgodnie z algorytmem sympleks przekształcamy:

zmienna bazowa	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	b
x_5	1	2	3	0	1	0	0	0	3
x_6	-1	2	6	0	0	1	0	0	2
x_7	0	4	9	0	0	0	1	0	5
x_4	0	0	*3	1	0	0	0	1	1
wiersz f	0	-8	-18	0	0	0	0	0	-10

zmienna bazowa	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	b
x_5	1	2	0	-1	1	0	0	-1	2
x_6	-1	*2	0	-2	0	1	0	-2	0
x_7	0	4	0	-3	0	0	1	-3	2
x_3	0	0	1	1/3	0	0	0	1/3	1/3
wiersz f	0	-8	0	6	0	0	0	7	-4

zmienna bazowa	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	b
x_5	*2	0	0	1	1	-1	0	1	2
x_2	-1/2	1	0	-1	0	1/2	0	-1	0
x_7	2	0	0	1	0	-2	1	1	2
x_3	0	0	1	1/3	0	0	0	1/3	1/3
wiersz f	-4	0	0	-2	0	4	0	-1	-4

zmienna bazowa	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	b
x_1	1	0	0	1/2	1/2	-1/2	0	1/2	1
x_2	0	1	0	-3/4	1/4	1/4	0	-3/4	1/2
x_7	0	0	0	0	-1	-1	1	0	0
x_3	0	0	1	1/3	0	0	0	1/3	1/3
wiersz f	0	0	0	0	2	2	0	1	0

Stąd otrzymuje bazowe rozwiązanie dopuszczalne wyjściowego zadania:

zmienna bazowa	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_1	1	0	0	1/2	1
x_2	0	1	0	-3/4	1/2
x_3	0	0	1	1/3	1/3
wiersz f	*	*	*	*	*

Literatura

- [1] Bertsimas, D. & Tsitsiklis, J.N, *Introduction to Linear Optimization*, Athena Scientific, 1997.

Wrocław, dnia 20/01/2011